Wydział MiNI
Politechnika Warszawska
Koszykowa 75
00-662 Warszawa

19 sierpnia 2022

Przewodniczący RD Matematyka UG
dr hab. Błażej Szepietowski, prof. UG
ul. Wita Stwosza 57
80-309 Gdańsk

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Gabrieli Łuczyńskiej.

Tematem recenzowanej rozprawy są badania dynamiki stochastycznej generowanej przez pewną półgrupę G homeomorfizmów okręgu. Termin "dynamika stochastyczna" przybiera różne znaczenia, warto więc od razu wyjaśnić, że chodzi tu o składanie losowych ciagów elementów z G wybieranych niezależnie według pewnej ustalonej miary probabilistycznej na G. Można zatem rzec, że mamy do czynienia z produktem prostym deterministycznej dynamiki półgrupy G i procesu stochastycznego na półgrupie, w odróżnieniu od rozpatrywanego niekiedy produktu skośnego, w którym losowany kolejny element ciągu iteracji zależeć może także od położenia w przestrzeni fazowej, którą w tym przypadku jest okrąg. Kolejnym aspektem, na który warto zwrócić uwagę jest brak założeń o gładkości dla elementów z G, co nie pozwala na bezpośrednie zastosowanie większości narzędzi teorii układów dynamicznych. Gdyby jednak na moment założyc, że elementy G są dyfeomorfizmami, to ich dynamika byłaby niehiperboliczna. W przypadku tylko ciągłym można natomiast mówić o braku chaosu i ten właśnie niechaotyczny aspekt omawianego układu jest kolejną wartą odnotowania cechą omawianego problemu.

Rozprawa udziela odpowiedzi na dwa naturalne pytania pojawiające się w związku z omawianym układem. Pierwsze dotyczny istnienia i jedyności miary niezmienniczej dla odpowiadającego tej dynamice operatora Fellera P. Operator ten łatwo można zrozumieć w terminach znanego z dynamiki deterministycznej operatora Perrona-Frobeniusa zadającego ewolucję rozkładów prawdopodobieństwa na okręgu pod działaniem dynamki, przy dodatkowym założeniu nieosobliwości metrycznej elementów półgrupy G. W przypadku stochastycznym działanie tego operatora na ustalonej mierze należy następnie uśrednić stosownie do zadanego rozkładu prawdopodobieństwa na grupie. Operator Fellera ma swój operator pre-dualny, który z kolei można rozumieć jako uśrednienie operatorów Koopmana odpowiadających elementom G.

Pierwszym głównym rezultatem rozprawy jest Twierdzenie 3.4 orzekające, że jeśli tylko półgrupa G działa minimalnie z prawdopodobieństwm 1, to istnieje dokładnie jedna miara niezmiennicza dla operatora Fellera. Sam ten rezultat nie jest nowy, ponieważ pojawia się w pracy D. Maliceta z roku 2017 cytowanej w rozprawie jako pozycja [31]. Nowy jest dowód, o czym jeszcze będę pisał. W kontekście dynamiki gładkiej rezultat ten nie jest nieoczekiwany, ponieważ wynika z ogólnej tzw. zasady niezmienniczości dla miar o niedodatnim wykładniku Lapunowa. Jednym z osiągnięć pracy Maliceta było pozbycie się założeń o gładkości, przy czym posłużył się rozumowaniem pochodzącym z pracy A. Avili i M. Viany. Avila to juz laureat medalu Fieldsa, co sygnalizuje, że mamy do czynienia z problematyką nietrywialną i ciekawą. Rezulatów o jedynej mierze niezmiennej i stabilności stochastycznej nie brak w teorii układów dynamicznych, należy zatem podkreślić tu niechaotyczny charakter układu. Mówiąc w przenośni, dynamika półgrupy nie miesza orbit i przez to zagadnienie istnienia i jednoznaczności miary niezmienniczej jest subtelniejsze niż w przypadku chociażby niejednostajnie hiperbolicznym.

Druga grupa rezultatów dotyczy centralnego twierdzenia granicznego i prawa iterowanego logarytmu dla ciągu zmiennych losowych generowanego przez pewną dowolną funkcję lipszycowską przyłożoną do iteracji punktu przez losowy ciąg elementów z G. Są to twierdzenia 4.9 i 4.10 z rozprawy, a założyc w nich trzeba oprócz wspomnianej minimalności działania G także i to, że jej elementy nie mają wspólnej miary niezmienniczej. Tych rezultatów brak we wspomnianej pracy Maliceta, natomiast dowody przytoczone w rozprawie opierają się na wykazanej tamże własności kontrakcji prawie na pewno. Własność ta polega na tym, że każdy punkt ma otoczenie, który przy iterowaniu losowym ciągiem z G prawie na pewno kurczy się wykładniczo i to w ustalonym stosunku. Właśnie ta własność kontrakcji wymaga braku wspólnej miary niezmienniczej, a konieczność tego warunku widać od razu, jeśli rozważyć półgrupę składającą się ze sztywnych obrotów, dla której oczywiście żadnej kontrakcji być nie może.

W podsumowaniu tej wstępnej dyskusji problematyki rozprawy stwierdzić wypada, że jej przedmiot jest ciekawym, głebokim i przez to ważnym problemem teorii, który przyciągnął uwagę silnych matematyków. Uzyskane rezultaty są wprawdzie tylko częściowo nowe, ale naturalne i pełne, bez czynienia sztucznych założeń. Jako dodatkowe potwierdzenie tej opinii może służyć fakt, że część rezultatów rozprawy została opublikowana wspólnie z promotorem w dobrym periodyku rangi miedzynarodowej, jakim jest Journal of Statistical Physics - jest to pozycja [30] w rozprawie.

Od tej ogólnej charakterystyki osiągniętych rezultatów przejdźmy do bardziej szczegółowego opisu zawartości rozprawy. Rozdział pierwszy to ogólne wprowadzenie i opis osiągniętych rezultatów. Jest on raczej skrótowy w porównaniu z typową rozprawą doktorską, w której z reguły znajdujemy obszerne omówienie na tle literatury przedmiotu. Rozdział drugi zawiera podstawowe fakty i twierdzenia, z których korzysta się w rozprawie. Robi wrażenie zwięzłego i kompletnego, chociaż jak to zwykle bywa trudno zadowolić czytelnika we wszystkim - trochę się zastanawiałem nad gęstością funkcji lipszcowskich w $C^0(X, \mathbb{R})$ w dowolnej przestrzeni metrycznej, który to fakt jest przywołany bez odnośnika do literatury. Rozdział trzeci to dowód twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności miary niezmienniczej. Jak już wspomniałem, sam ten fakt nie jest nowy. Nowy jest tutaj dowód oparty na tzw. e-własności wprowadzonej między innymi przez promotora pracy. e-własność w punkcie polega na tym, że obrazy dowolnej funkcji lipszycowskiej pod działaniem iteracji operatora pre-dualnego są jednakowo ciągłe w tym punkcie. O ile dowód Maliceta jest dość pośrednią adaptacją zasady niezmienniczości do układu, który nie jest gładki, to podejście autorki jest bardziej bezprośrednie, co daje prostszy dowód. Wprowadzony jest przy tym słabszy wariant e-własności w średniej. Następnie trzeba wykazać, że zachodzi ona dla omawianego układu i implikuje potrzebne fakty o mierze niezmienniczej. Jest to robione bezpośrednimi oszacowaniami. Na koniec tego rozdziału znajdujemy przykłady zastosowań uzyskanych rezultatów, a w szczególności w odniesieniu do asymptotycznej stabilności badanego układu polegającej na tym, że dowolna miara zbiega do miary niezmienniczej przy iterowaiu operatora Fellera. Rozdział czwarty jest poświęcony centralnemu tweirdzeniu granicznemu i prawu iterowanego logarytmu. Wyniki te są oparte na zastosowaniu ogólnych faktów dotyczących stochastycznych układów dynamicznych popartych oszacowaniami opartymi na własności kontrakcji. Kluczowym oryginalnym elementem wydaje się tu lemat 4.5.Pod koniec następuje ponowne nawiązanie do przykładu z rozdziału poprzedniego, tym razem w kontekście rezultatów uzyskanych w rozdziale czwartym.

Nowy dowód istnienia i jednoznaczności w rozdziale trzecim uważam za wartościowy wkład w rozwój teorii. Dobrze jest mieć bardziej bezpośrednie i prostsze podejście, nawet jeśli w danym momencie nie prowadzi ono do dodatkowych rezultatów. Wyniki rozdziału czwartego są nowe. Odwołanie się do ogólnych mocnych twierdzeń wymagało solidnej znajomości teorii. Na poziomie technicznym rozważania są przedstawione na ogół starannie i czytelnie. Idea uwikłanego oszacowania na wielkość a_n w dowodzie lematu 4.5 bardzo mi się podoba, chociaż zdefiniowanie tej wielkości na samym początku dowodu nie było najlepszym pomysłem redakcyjnym - kiedy w końcu się pojawiła u dołu str. 40, to już tej definicji nie pamiętałem i zajęło mi nieco czasu jej odszukanie. Inna uwaga techniczna dotyczy formuły na środku str. 41, w której pojawiają się miary μ z x i y na przemian u góry i u dołu. Wydaje mi się, że ze względu na występującą tam całke podwójną wyrażenie to powinno mieć charakter kwadratowy, a zatem powinien pojawić się człon mieszany z x i y raz u góry i raz u dołu, wspólcznynnik β^2 itd. Jakkolwiek to w końcu jest, nie ma istotnego znaczenia dla dowodu, ponieważ pojawia się nietrywialne oszacowanie na człon z x i y u dołu, prowadzące dalej do wspomnianego już uwikłanego oszacowania na a_n.

Po tych uwagach technicznych nie rzutujących na ocenę wartości rozprawy muszę jednak dać wyraz rzeczywistemu rozczarowaniu przykładami, głównie w podrozdziale 3.3. Przykład z wypukłą kombinacją ustalonych homeomorfizmów jest naturalny, ale raczej nie pomysłowy czy ciekawy. Natomiast wątpliwości budzą rozważania dotyczące asymptotycznej stabilności. Kontrprzykład na środku strony 31 jest napisany niestarannie. Nie doszukałem się defincji funkcji, czy tez rodziny funkcji $\tilde{g}_\lambda$, a pisanie o "iterowaniu odległości" to żargon studencki, który nie powinien występować w rozprawie doktorskiej. W końcu nie jestem nawet pewien, czy ten kontrprzykład rozumiem - wydaje się, ze chodzi tu o półgrupę składającą się z iteracji ustalonego sztywnego obrotu o kąt niewymierny, która rzeczywiście działa minimalnie, ale nie asymptotycznie stabilna. Z kolei następujący potem przykład pozytywny też nie zadowala, choć tu przynajmniej można formalnie go zrozumieć. Wydaje się jednak, że jest zbyt trywialny, bo dla półgrupy złożonej ze sztywnych obrotów o kąty z pewnego odcinka asymptotyczną stabilnosc można uzyskać rozważaniami dużo prostszymi. W takiej sytuacji $P^n\delta_x$ jest rozkładem sumy n niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie jednostajnym, następnie zrzutowanym na okrąg. W takiej sytuacji zbieżność do miary granicznej, która też nie jest jakimś tajemniczym obiektem tylko miarą Lebesguc'a, wynika z zastosowania centralnego twierdzenia granicznego w wersji z podstawowego kursu rachunku prawdopodobieństwa. Co wreszcie bardzo dziwne to fakt, że rozprawa zawiera wynik Maliceta cytowany jako twierdzenie 4.1, który jest w oczywisty sposób bliski asymptotycznej stabilności. Być może w ogóle ją implikuje i wtedy znaczenie przykładów z podrozdziału 3.3 byłoby jaśniejsze, ponieważ ze względu na miarę niezmienniczą wspólną dla całej półgrupy wynik ten się do niech nie stosuje. Nie znalazłem jednak na ten temat żadnego komentarza w rozprawie.

Pozostaje zastanowić nad tym, czy rozprawa spełnia warunki stawiane w przewodzie doktorskim. Sądze, że najlepiej będzie się odwołać do kryterium ustawowego, zawartego w art. 187 punktach 1 i 2. Odpowiednio, rozprawa powinna stanowić oryginalne rozwiązanie problemu naukowego, jak również wykazywać wiedzę teoretyczną doktoranta i umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy badawczej. Przymiotnik "oryginalny" w jezyku potocznym miewa różne znaczenia, ale w tym przypadku oznacza tyle co "nie znany wcześniej", a zatem rozwiązanie problemu znanego już wcześniej nie znaną poprzednio metodą jest oryginalne. Zacznijmy od tej przesłanki, która może budzić wątpliwości, dotyczącej wykazania się przez autorkę samodzielnością w pracy naukowej. Rozprawa jest stosunkowo krótka. Po pominięciu stron wstępnych i spisu literatury liczy ona 40 stron. Jeszcze z tego sporo stanowi rekapitulacja rezultatów z innych prac, na przykład aparatu uzytego w rozdziale czwartym. Z reguły, i niewatpliwie jest tak w tym przypadku, istotny jest wkład promotora w ogólną koncepcję pracy. Dodajmy, że jej wyniki dotyczące twierdzeń granicznych zostały opublikowane jako praca wspólna. Tym samym materiału stanowiącego samodzielny wkład doktorantki nie zostaje tak wiele. Dobrą okazją do wykazania przez doktoranta własnego wkładu bywa rozważanie przykładów lub innych zagadnień dookoła głównych wyników rozprawy. Jak jednak wspomniałem, w tej rozprawie dyskusja o przykładach odbiega od ogólnego jej poziomu. Pozostaje oprzeć się na szczegółowych rozważaniach dotyczących e-własności w rozdziale trzecim, oraz pewnych fragmentów rozdziału czwartego, np. lematu 4.5. Robią one wrażenie pomysłowych i można przyjąć, że są własnym wkładem autorki. Dodatkowo wyniki z rozdziału trzeciego ukazały się jako praca samodzielna. W ten sposób można uznać, że przesłanka o samodzielności jest spełniona przynajmniej w stopniu wystarczającym. Sytuację poprawia fakt, że pozostałe warunki ustawowe są spełnione bez wątpliwości lub z nadmiarem. I tak, mamy tu nie tylko oryginalne rozwiązanie problemu naukowego, ale dodać można, że problem ten jest ważny i głęboki, a uzyskane rozwiązanie pełne. Wobec zaawansowanego aparatu matematycznego pracy nie sposób też wątpić, że doktorantka wykazała się wysokim poziomem wiedzy teoretycznej.

Wnioskuję zatem o uznanie, że przedstawiona rozprawa odpowiada warunkom ustawy i dopuszczenie doktorantki do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

prof. dr hab. Grzegorz Świątek

Grzegorz Świątek