Prof. dr hab. Szymon Peszat
WMiI UJ
ul. Łojasiewicza 6
30-348 Kraków,
e-mail napeszat@cyf-kr.edu.pl

Kraków, 12 września 2022 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej Pani mgr. Gabrieli Łuczyńskiej pt. "Ergodyczność oraz twierdzenie graniczne dla stochastycznych układów dynamicznych na okręgu"

51 stronicowa rozprawa ma charakter małej monografii. Poświęcona jest własnością ergodycznym układów dynamicznych zadanych przez losowe iterowanie odwzorowań okręgu $\mathbb{S}^1$. Tematyka jest ciekawa i trudna. Prace na podobne tematy pojawiają się w najlepszych czasopismach. Pani Łuczyńska używa nowoczesnych i zaawansowanych metod matematycznych. Rozprawa świadczy, że Doktorantka bardzo dobrze rozumie tą tematykę.

W pierwszych dwóch rozdziałach podano podstawowe definicje: stochastycznego układu dynamicznego, operatora Markowa–Fellera, miary niezmienniczej. Podano kilka klasycznych twierdzeń: Prochorowa o ciasności, Krylowa–Bogolubowa o istnieniu miary niezmienniczej, indywidualne twierdzenie ergodyczne Kakutaniego. Rozdział drugi zawiera kilka nowszych wyników; podano definicje e-własności, asymptotycznej e-własności, e-własności według średniej. Są to pojęcia wprowadzone przez Promotora Profesora Szarka kilka lat temu. Dowód Lematu 2.8 jest prostszy niż w oryginalnej pracy Komorowskiego, Peszata i Szarka z 2010. Podobnie dowód Lematu 2.12 o asymptotycznej stabilności. Pierwsze dwa rozdziały są bardzo dobrze zredagowane. Wyniki są znane ale dowody są znacznie uproszczone i dopracowane.

Podstawowe wyniki rozprawy przedstawione są w Rozdziałach 3 i 4. Rozdział 3 poświęcony jest jedyności miary niezmienniczej. Są dwa ważne eleganckie wyniki. Twierdzenie 3.3 gwarantuje e-własność i jedyność miary niezmienniczej przy założeniu, że zbiór odwrotności elementów półgrupy homeomorfizmów G (w skrócie G^{-1}) działa minimalne. Oczywiście istnienie miary niezmienniczej wynika z twierdzenia Krylowa–Bogolubowa. Dużym problemem jest pokazanie jedyności. Dowód twierdzenia jest pomysłowy i trudny. Pewne elementy przypominają mi argumenty przedstawione przez Promotora Profesora Tomasza Szarka na Seminarium Probabilistycznym IMPAN kilka lat temu. Drugi wynik; Twierdzenie 3.4 gwarantuje jedyność miary niezmienniczej przy założeniu, że G działa minimalnie. O podobnym wyniku słyszałem na wspomnianym seminarium, ale przytoczony dowód wydaje się być znacznie prostszy (podobnie jak poprzedniego twierdzenia) i bardzo pomysłowy. Należy wspomnieć, że minimalność jest bardzo naturalnym założeniem. Twierdzenia są ogólne i w takiej ogólności trudno będzie je poprawić.

S.P.

W Rozdziale 3.3 podano ciekawy przykład układu, dla którego stosuje się Twierdzenie 3.4. Mianowicie, półgrupa generowana jest przez rodzinę

$$g_\lambda = \begin{cases} \lambda h_1 = (1-\lambda)h_2 & \text{dla } \lambda \in [0,1/2), \\ h_3(x) & \text{dla } \lambda \in [1/2,1], \end{cases}$$

gdzie h_1, h_2, h_3 są zadanymi odwzorowaniami o gęstych orbitach. Pozostała część Rozdziału 3 poświęcona jest asymptotycznej stabilności. Podano przykład układu, w którym półgrupa działa minimalne ale, który nie jest asymptotyczne stabilny. Na koniec pokazano jak zmodyfikować przykład by uzyskać asymptotyczną stabilność. W trakcie obrony poproszę o dokładniejsze omówienie tego fragmentu bo w tym punkcie tok rozumowania nie jest dla mnie jasny. Było to dla mnie zaskoczeniem bo pozostałe fragmenty są napisane bardzo klarownie.

W ostatnim rozdziale (Rozdział 4) udowodniono Centralne Twierdzenie Graniczne (CTG) oraz Prawo Iterowanego Logarytmu (PIL) dla spacerów losowych po okręgu. Wydaje mi się, że najważniejszym i całkowicie oryginalnym wynikiem jest kluczowy Lemat 4.5 o "zwężaniu". Dowód lematu jest trudny i bardzo pomysłowy. Korzystając z ogólnych wyników Derredica i Lina z 2003 r. udowodniono Twierdzenie 4.9 o CTG. Podobnie korzystając z wyników Zhao i Woodroofa z 2008 r., udowodniono Twierdzenie 4.10 o PIL. Wyniki są bardzo mocne, ciekawe i trudne.

Pani Łuczyńska jest autorką pracy z Statystics and Probabability Letters z 2021 r. oraz współautorką pracy z J. Stat. Phys. z 2022 r. Zarówno Statistics and Probabilility Letters jak i J. Stat. Physics są renomowanymi czasopismami.

Przedstawione wyniki są bardzo trudne i eleganckie. Prezentacja jest bardzo logiczna i przemyślana. Autorka powinna jednak skomentować jak przedstawione rezultaty są związane z wynikami z jej publikacji. Zwykle w rozprawach doktorskich omawia się wyniki opublikowane w jednej lub kilku pracach. Autorka powinna skonfrontować swoje rezultaty z wynikami otrzymanymi w cytowanych w rozprawie pracach Tomasza Szarka i Anny Zdunik.

Ostatecznie jednak nie mam wątpliwości, że przedstawiona praca jest bardzo dobrą rozprawą doktorską, która spełnia wszystkie wymagania i wnioskuję o jej przyjęcie.

Szymon Peszat

Szymon Peszat