

Uniwersytet Gdański
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki



Bartosz Kamedulski

WYBRANE WŁASNOŚCI I ZASTOSOWANIA
STOPNIA ODWZOROWAŃ
WSPÓŁZMIENNICZYCH

Rozprawa doktorska
napisana pod kierunkiem
dr. hab. Piotra Bartłomiejczyka, prof. PG

Gdańsk 2022

OŚWIADCZENIE

Ja, niżej podpisany (a) oświadczam, iż przedłożona praca doktorska została wykonana przez mnie samodzielnie, nie narusza praw autorskich, interesów prawnych i materialnych innych osób.

.....
data

.....
własnoręczny podpis

Podziękowania

Na początku pragnę podziękować Rodzicom, za nieocenione wsparcie od najwcześniejszych etapów edukacji, ugruntowanie we mnie pasji do matematyki oraz za kibicowanie mi na całej dotychczasowej drodze rozwoju w tej dziedzinie.

Dziękuję Marcie Leśniak, Karolinie Lademann, Marcie Kweli, Gabrieli Łuczyńskiej i Piotrowi Michalakowi za inspirujące rozmowy w pokoju doktorantów, a także za cenną pomoc w sprawach organizacyjnych.

Serdeczne podziękowania dla Pana Profesora Witolda Rosickiego za wsparcie i zaangażowanie w roli opiekuna naukowego w początkowych latach moich studiów doktoranckich. Pragnę również wyrazić wdzięczność Panu Profesorowi Zbigniewowi Szafrącowi za umożliwienie mi uczestnictwa w bardzo inspirującej konferencji Young Topologists Meeting w Lozannie.

Dziękuję z całego serca Profesorowi Piotrowi Bartłomiejczykowi za niezliczone godziny poświęconego mi czasu, za wyrozumiałość w okresach zastoju i cenne wskazówki pchające mnie do przodu. Dziękuję też za samo zainteresowanie mnie tematem stopnia współmienniczego i możliwość pracy w Pana zespole. Panu Doktorowi Piotrowi Nowakowi-Przygodzkiemu również dziękuję za czas poświęcony na ożywcze dyskusje i pomoc w lepszym zrozumieniu geometrycznych aspektów stopnia.

I wreszcie dziękuję Tobie, Agnieszko, za gruntowne sprawdzenie pracy, a przede wszystkim za dodawanie mi otuchy i zarażanie uśmiechem w szare dni.

Streszczenie

Stopień współmienniczy \deg_G jest narzędziem służącym do wykrywania zer lokalnych odwzorowań współmienniczych. Idea jego działania jest analogiczna do stopnia Brouwera: jeżeli wartość stopnia jest różna od zera, dane odwzorowanie posiada miejsca zerowe. Choć proces wyznaczania wartości stopnia współmienniczego bywa skomplikowany, posiada on bogatszą strukturę niż klasyczny stopień. Wartości \deg_G nie są liczbami, lecz elementami pierścienia Burnside'a, składającymi się z kilku współczynników. W wielu przypadkach ten stopień jest skuteczniejszy niż stopień Brouwera, przyjmując niezerową wartość tam, gdzie ten drugi jest równy zero. Co więcej, analiza niezerowych współczynników \deg_G pozwala na wyciągnięcie wniosków na temat konkretnych typów orbitowych występujących w zbiorze miejsc zerowych. Dla jeszcze węższej klasy odwzorowań współmienniczych, które są jednocześnie gradientowe, rozwinęła się teoria współmienniczego stopnia gradientowego \deg_G^∇ o wartościach w pierścieniu Eulera-tom Diecka i jeszcze bogatszej strukturze. Oba te stopnie na przestrzeni kilkudziesięciu ostatnich lat doczekały się licznych zastosowań oraz uogólnień.

Celem pracy jest rozwinięcie dwóch wybranych aspektów teorii tych stopni. Pierwszym z nich jest kwestia własności produktowej stopnia \deg_G . Własność ta została wykazana w ogólnym przypadku zwartej grupy Liego przez Kazimierza Gębę, Wiesława Krawcewicza i Jianhonga Wu w artykule z 1994 roku, jednak przedstawiony tam dowód miał charakter skrótowy i formalny. Przedstawiamy nowy, pełny dowód wzoru produktowego przy założeniu, że G jest grupą skończoną lub zwartą abelową grupą Liego. Drugi aspekt, któremu poświęcona jest praca, to wprowadzenie nowej wersji gradientowego stopnia współmienniczego w przestrzeni Hilberta. Motywacją do jego opracowania były potencjalne zastosowania m.in. przy wykrywaniu okresowych rozwiązań układów hamiltonowskich.

Rozdział 1 poświęcony jest preliminariom. Zawiera podstawowe definicje dotyczące odwzorowań współmienniczych, stopnia \deg_G oraz elementy teorii wiązek wektorowych, które zostaną wykorzystane w kolejnych rozdziałach dotyczących wzoru pro-

duktowego. W Rozdziale 2 przedstawiamy dowód tego wzoru dla stopnia \deg_G w przypadku, gdy G jest grupą skończoną. Opiera się on na nowym pojęciu odwzorowań polistandardowych oraz na twierdzeniu typu Hopfa dla lokalnych odwzorowań współzmienniczych wykazanym przez P. Bartłomiejczyka w artykule z 2017 roku. W następnym rozdziale dowodzimy własności produktowej przy działaniu zwartej abelowej grupy Liego, stosując podobne rozumowanie z uwzględnieniem niezbędnych modyfikacji.

Kolejne dwa rozdziały dotyczą nowej nieskończone wymiarowej wersji stopnia. Mianowicie, prezentujemy konstrukcję stopnia w przestrzeni Hilberta dla współzmienniczych, gradientowych, zwartych zaburzeń współzmienniczego, nieograniczonego, samosprężonego operatora o czysto dyskretnym widmie. Wspomniany niezmiennik, oznaczany Deg_G^∇ , przyjmuje wartości w pierścieniu Eulera-tom Diecka. W Rozdziale 4 przedstawiamy definicję tego stopnia opartą na skończeniu wymiarowych aproksymacjach, a następnie pokazujemy, że Deg_G^∇ spełnia warunki wymagane od niezmienników nazywanych stopniami (addytywność, otopijna niezmienniczość, wykrywanie zer, normalizacja i własność produktowa). Rozdział 5 rozpoczyna się od omówienia problemu poszukiwania orbit okresowych układów hamiltonowskich wraz z rysem historycznym i opisem dotychczasowych wyników z tej dziedziny. W dalszej części rozdziału wyjaśniamy, jak sprowadzić ten problem z równań różniczkowych zwyczajnych do zagadnienia wyznaczania zer pewnego operatora nieliniowego w przestrzeni Hilberta. Tego typu zamiana pozwala na stosowanie naszego współzmienniczego stopnia gradientowego Deg_G^∇ .

W ostatnim rozdziale proponujemy kilka hipotez naturalnie wynikających z wcześniej omówionych rezultatów. Wyznaczają one możliwe ścieżki dalszych badań nad zagadnieniami prezentowanymi w tej pracy.

Abstract

Equivariant degree \deg_G is a useful tool that detects zeros of equivariant local maps. It works similarly to the classical Brouwer degree: if its value is non-zero, then a given map has zeros. While the evaluation of equivariant degree can sometimes be complicated, its structure is richer in comparison with the classical degree. The values of \deg_G are not integers, but elements of the Burnside ring, and they consist of multiple coefficients. In many cases, \deg_G is more efficient than the Brouwer degree, taking non-zero values where the latter is equal to zero. Moreover, the analysis of non-zero coefficients of \deg_G allows one to draw conclusions about specific orbit types occurring in the set of zeros. For the even more narrow class of maps that are both equivariant and gradient, the equivariant gradient degree theory was developed, with degree \deg_G^∇ having even richer structure and taking values in the Euler-tom Dieck ring. Over the last few decades, numerous applications and generalizations of both of these degrees have been explored.

The aim of the thesis is to develop two selected aspects from theory of these degrees. The first one is related to the product property of degree \deg_G . This property was proved in the general case of a compact Lie group by Kazimierz Gęba, Wiesław Krawcewicz and Jianhong Wu in a paper from 1994, but the proof introduced there was rather formal and sketchy in some parts. We present a new, complete proof of the product formula in the case where the compact Lie group G is finite or abelian. The second aspect discussed in the thesis is the introduction of a new version of equivariant gradient degree in a Hilbert space. The main motivation behind development of this invariant was the possibility of applying it to various problems of nonlinear analysis, such as finding periodic solutions of Hamiltonian systems.

Chapter 1 includes preliminaries: basic definitions about equivariant maps and the degree \deg_G along with elements of vector bundle theory. These will be applied in further chapters focused on the product formula. In Chapter 2 we present the proof of that formula for the degree \deg_G in the case where G is a finite group. It is based on

a new notion of polystandard maps and on a Hopf type theorem for equivariant local maps, proved by P. Bartłomiejczyk in his 2017 paper. In Chapter 3 we prove the product property under the action of a compact abelian Lie group, using a similar approach with necessary adjustments.

The next two chapters regard a new infinite-dimensional version of the degree. Namely, we present a construction of a degree in a Hilbert space for equivariant, gradient, compact perturbations of an equivariant, unbounded, self-adjoint operator with purely discrete spectrum. The invariant, denoted by Deg_G^∇ , takes values in the Euler-Dieck ring of G . In Chapter 4 we introduce the degree definition based on finite-dimensional approximations, and then we show that Deg_G^∇ meets the usual conditions required from degree-type invariants, such as additivity, otopy invariance, existence property, normalization and product property. Chapter 5 starts with a discussion of the problem of finding periodic orbits of Hamiltonian systems, along with the historical background and a description of previous results from that area of research. Later in the chapter we explain how to transform the ODE problem to the issue of determining zeros of a certain nonlinear operator in Hilbert space. Such transformation opens a possibility of applying our equivariant gradient degree Deg_G^∇ .

In the following, final chapter, we propose several hypotheses naturally arising from the previously discussed results. They pave the ways of possible future research on the problems presented in the thesis.

Spis treści

Wstęp	11
1 Preliminaria	16
1.1 Odwzorowania współzmiennicze i ich stopień	16
1.1.1 G-przestrzenie	16
1.1.2 Reprezentacje	17
1.1.3 Odwzorowania lokalne	17
1.1.4 Odwzorowania współzmiennicze	18
1.1.5 Otopie	18
1.1.6 Pierścień Burnside'a zwartej grupy Liego	19
1.1.7 Stopień współzmienniczy	19
1.2 Klasy otopii i wiązki wektorowe	20
1.2.1 Lokalne przekroje wiązki wektorowej	20
1.2.2 Indeks przecięcia	20
1.2.3 Odwzorowania współzmiennicze i lokalne przekroje	21
1.2.4 Rozkład zbioru klas otopii	21
2 Własność produktowa przy działaniu grupy skończonej	24
2.1 Pierścień Burnside'a grupy skończonej	25
2.2 Główny wynik	26
2.3 Przykład	26
2.4 Odwzorowania standardowe i polistandardowe	29
2.5 Dowód wzoru produktowego dla grupy skończonej	31
2.6 Dodatek	34
3 Własność produktowa przy działaniu grupy abelowej	35
3.1 Pierścień Burnside'a zwartej abelowej grupy Liego	35
3.2 Główny wynik	36
3.3 Odwzorowania standardowe i polistandardowe	36

3.4	Dowód wzoru produktowego dla grupy abelowej	38
3.5	Szczegóły techniczne	41
3.5.1	Modyfikacja twierdzenia typu Hopfa	41
3.5.2	Uzupełnienie dowodu Lematu 3.13	42
4	Nowy wariant stopnia współmienniczego w przestrzeni Hilberta	43
4.1	Podstawowe definicje	43
4.1.1	Nieograniczone operatory samosprężone w przestrzeni Hilberta	43
4.1.2	Gradient hilbertowski	44
4.1.3	Odwzorowania lokalne w przestrzeni Hilberta	45
4.1.4	Otopie w przestrzeni Hilberta	45
4.1.5	Pierścień Eulera-tom Diecka	46
4.1.6	Skończenie wymiarowy współmienniczy stopień gradientowy	46
4.2	Konstrukcja stopnia	47
4.2.1	Skończenie wymiarowe aproksymacje	47
4.2.2	Definicja stopnia	49
4.3	Poprawność definicji stopnia	50
4.3.1	Niezależność od wyboru n	50
4.3.2	Niezależność od wyboru U	51
4.4	Własności stopnia	52
5	Schemat zastosowania nowego stopnia w układach hamiltonowskich	55
5.1	Wstęp historyczny	55
5.1.1	Sformułowanie problemu	55
5.1.2	Historia problemu	56
5.2	Wprowadzenie matematyczne	58
5.2.1	Słaba pochodna i absolutna ciągłość	58
5.2.2	Przestrzeń Sobolewa funkcji okresowych	59
5.3	Własności operatora $Az := -\mathcal{J}z$	60
5.4	Objaśnienie schematu aproksymacyjnego	63
5.5	Lemat o gradiencie hilbertowskim (subliniowość)	67
5.6	Zamiana problemu różniczkowego na hilbertowski	69
6	Hipotezy	71
	Literatura	74

Wstęp

Rys historyczny

Odwzorowanie działające z otwartego podzbioru \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^n nazywamy lokalnym, jeżeli zbiór jego miejsc zerowych jest zwarty. Znanym i dobrze zbadanym narzędziem wykorzystywanym do poszukiwania miejsc zerowych takich odwzorowań jest klasyczny stopień Brouwera. Wartość tego stopnia jest liczbą całkowitą i jeżeli jest ona różna od zera, oznacza to, że dane odwzorowanie posiada miejsca zerowe. Istnieją jednak inne, pokrewne niezmienniki topologiczne, które znajdują podobne zastosowania. Gdy przedmiotem analizy jest pewna węższa klasa odwzorowań lokalnych, zastosowanie zmodyfikowanej wersji stopnia, wyspecjalizowanej do badania tej konkretnej klasy, niejednokrotnie pozwala na uzyskanie większej dokładności i skuteczności w wykrywaniu zer. Z pewnością jest tak w przypadku odwzorowań współzmienniczych, o czym świadczy intensywny rozwój teorii stopnia współzmienniczego oraz gradientowego stopnia współzmienniczego w ciągu kilkadziesiątu ostatnich lat.

Za jeden z pierwszych i pionierskich wyników z teorii odwzorowań współzmienniczych należy uznać twierdzenie Borsuka-Ułama [18] z początku lat 30. XX wieku. Wynika z niego, że każde ciągłe odwzorowanie nieparzyste $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (czyli współzmiennicze względem naturalnego działania grupy \mathbb{Z}_2 na tę przestrzeń) posiada miejsce zerowe. W kolejnych latach twierdzenie to doczekało się licznych uogólnień, m.in. [64, 81].

W roku 1967 Francis Brock Fuller w artykule [36] zdefiniował indeks dla okresowych orbit autonomicznych równań różniczkowych, o cechach odpowiadających klasycznym własnościom indeksu punktu stałego. Badanie całych orbit zamiast pojedynczych punktów to jedna z podstawowych idei, które później ukształtowały teorię stopnia współzmienniczego.

Na początku lat siedemdziesiątych nastąpił rozwój badań nad współzmienniczą teorią homotopii. W artykule [80] z 1970 roku Graeme B. Segal badał zagadnienie współzmienniczych stabilnych homotopii odwzorowań między sferami reprezentacji skoń-

czonej grupy G . Główny wynik z tej pracy można wyrazić wzorem

$$\omega_0^G(S^0) \cong \mathcal{A}(G). \quad (1)$$

Oznacza on, że przy zawieszeniu o odpowiednio wysoko wymiarową reprezentację, zbiór klas homotopii odwzorowań między sferami tej reprezentacji posiada strukturę pierścienia (z mnożeniem zdefiniowanym jako składanie odwzorowań) jest izomorficzny z pierścieniem Burnside'a $\mathcal{A}(G)$ (z mnożeniem pochodzącym od produktu G -zbiorów). Mówiąc ściślej, klasę homotopii danego odwzorowania charakteryzują wartości stopnia Brouwera jego obcięć do zbiorów punktów stałych względem działania poszczególnych podgrup grupy G . Segal zauważył też, że zestaw tych wartości, dający się jednoznacznie wyrazić jako pojedynczy element pierścienia Burnside'a, pełni dla odwzorowania współzmienniczego funkcję stopnia.

Sześć lat później Ryszard L. Rubinsztein w swojej pracy doktorskiej [72] pod kierunkiem Andrzeja Jankowskiego uogólnił wynik Segala, opisując klasy współzmienniczych homotopii sfer w przypadku działania zwartej grupy Liego, niekoniecznie skończonej. Przedstawił również ogólniejszą wersję twierdzenia Borsuka-Ulana.

Klasy współzmienniczych homotopii sfer w podobnym czasie badał Henning Hauschild, który w artykule [45] przedstawił nowe dowody wyników Rubinszteina. Cztery lata wcześniej obronił on rozprawę doktorską pod kierunkiem Tammo tom Diecka, którego prace były przełomowym krokiem w kierunku zdefiniowania stopnia odwzorowań współzmienniczych.

W roku 1975 tom Dieck w artykule [27] rozszerzył pojęcie pierścienia Burnside'a, dotychczas zdefiniowanego jedynie dla grupy skończonej, do przypadku zwartej grupy Liego. Uzyskana struktura była pierścieniem przemennym z jedyką, z dodawaniem pochodzącym od sumy rozłącznej skończonych G -kompleksów oraz z mnożeniem pochodzącym od ich iloczynu kartezyjskiego. Następnie w książce [28] z 1979 roku udowodnił on, że wzór (1) zachodzi także wtedy, gdy G jest zwartą grupą Liego. To zaś oznaczało, że wspomniany przez Segala stopień współzmienniczy również nie musi ograniczać się do przypadku grupy skończonej. W tej samej książce pojawiła się definicja pierścienia Eulera-tom Diecka $\mathcal{U}(G)$, która opiera się na klasach równoważności skończonych G -CW-kompleksów. Dla skończonej grupy G pierścień $\mathcal{U}(G)$ był izomorficzny z pierścieniem Burnside'a $\mathcal{A}(G)$, w ogólności posiadał jednak bogatszą strukturę.

Teoria stopnia współzmienniczego zaczęła kształtować się w połowie lat 80. Wtedy to Ivar Massabò i Alfonso Vignoli we współpracy z Kazimierzem Gębą ([39]) i Jorge Ize ([47, 48]) zdefiniowali go dla odwzorowań S^1 -współzmienniczych, a następnie prze-

nieśli na przypadek zwartej grupy Liego. Wartościami tego stopnia były klasy homotopii współmienniczych odwzorowań między sferami. Dalsze badania nad taką klasyfikacją pod kątem zastosowań w teorii stopnia S^1 -współmienniczego przeprowadził Grzegorz Dylawerski w swojej pracy doktorskiej pod kierunkiem Kazimierza Gęby (1987) i w artykule [31]. W podobnym czasie Wolfgang Lück w pracy [60] powiązał stopień współmienniczy z wygodniejszym środowiskiem pierścienia Burnside'a zwartej grupy Liego. Na początku lat 90. K. Gęba uporządkował i rozwinął tę teorię w przypadku działania grupy S^1 (z G. Dylawerskim, Jerzym Jodlem i Waławem Marzantowiczem [32]), a następnie dowolnej zwartej grupy Liego (z Wiesławem Krawcewiczem i Jianhongiem Wu [38]). We wspomnianych artykułach przedstawione zostały również potencjalne zastosowania.

Równolegle pojawił się inny niezmiennik o cechach stopnia, dla gradientowych odwzorowań S^1 -współmienniczych. W roku 1985 zdefiniował go Norman Dancer w artykule [24]. Inspirując się tą pracą, Sławomir Rybicki stworzył teorię współmienniczego stopnia gradientowego (ortogonalnego) w swojej pracy doktorskiej pod kierunkiem K. Gęby (1990) oraz w artykule [73]. S. Rybicki skoncentrował się na przypadku działania grupy S^1 , a uogólnienia na dowolną zwartą grupę Liego dokonał K. Gęba w pracy [37]. W kolejnych latach S. Rybicki utworzył na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu grupę badawczą skupioną wokół zastosowań gradientowego stopnia współmienniczego, w której skład weszli jego doktoranci Wiktor Radzki, Anna Gołębowska, Justyna Fura, Piotr Stefaniak i Daniel Strzelecki.

Warto podkreślić, że stopień współmienniczy w wariacie gradientowym istotnie różni się od klasycznego stopnia współmienniczego. W szczególności klasyfikuje współmiennicze odwzorowania gradientowe w sposób zdecydowanie subtelniejszy, a jego wartości są elementami pierścienia Eulera-tom Diecka $\mathcal{U}(G)$.

Oba rodzaje stopnia znalazły liczne zastosowania. Okazały się wyjątkowo efektywne w analizie problemów nieliniowych, takich jak bifurkacje Hopfa, problem n ciał, zagadnienie centralnych konfiguracji, łamanie symetrii w równaniu Schrödingera czy współmiennicza wersja twierdzenia Lapunowa o centrum. Na temat tych i innych zastosowań powstały setki artykułów i książek, których liczba przyrasta z każdym rokiem. Jako przykłady warto wymienić prace autorów takich jak Zalman Balanov, Norimichi Hirano, Wiesław Krawcewicz, Ernesto Perez-Chavela, Haibo Ruan, Heinrich Steinlein oraz członkowie grupy badawczej Sławomira Rybickiego ([4, 5, 41, 65, 71]).

Opis wyników

Niniejsza rozprawa poświęcona jest dwóm zagadnieniom z teorii stopnia dla odwzorowań współzmiennicznych. Pierwsze z nich to własność produktowa dla stopnia współzmiennicznego. Dowód tej własności w przypadku działania zwartej grupy Liego można znaleźć w pracy Kazimierza Gęby, Wiesława Krawcewicza i Jianhonga Wu [38], jednak miał on charakter bardzo formalny i szkicowy w niektórych fragmentach. Wzór produktowy niejednokrotnie wykorzystywany był w innych pracach, pełniąc ważną rolę przy konstrukcji różnych nieskończenie wymiarowych wariantów stopnia współzmiennicznego. Stanowiło to motywację do podjęcia próby przeprowadzenia pełnego dowodu tej własności, stanowiącego niejako formalne uzupełnienie pracy [38]. Udało się tego dokonać dla grupy skończonej (w pracy wspólnej z Piotrem Bartłomiejczykiem i Piotrem Nowakiem-Przygodzkim [9]) oraz dla zwartej abelowej grupy Liego (w pracy samodzielnej [52]), czemu poświęcone są dwa rozdziały tej rozprawy.

Trzonem dowodu w obu przypadkach jest pojęcie odwzorowań polistandardowych. Odwzorowania z tej wyróżnionej przez nas klasy są strukturalnie zbliżone do odwzorowań normalnych (patrz [7, 8, 25, 38]), a jednocześnie przystępniejsze do badania między innymi dzięki stowarzyszonej z nimi wygodnej notacji. Pokazujemy, że:

- wzór produktowy $\deg_G(f \times \tilde{f}) = \deg_G f \cdot \deg_G \tilde{f}$ zachodzi w przypadku, gdy oba odwzorowania f i \tilde{f} są polistandardowe,
- produkt dwóch odwzorowań polistandardowych również jest polistandardowy.

Wreszcie udowadniamy, że w każdej klasie otopii można znaleźć odwzorowanie polistandardowe, co dzięki otopijnej niezmienniczości stopnia współzmiennicznego zasadniczo kończy dowód. Dostęp do dokładnego opisu klas otopii zagwarantowało nam twierdzenie typu Hopfa dla współzmiennicznych odwzorowań lokalnych, udowodnione przez P. Bartłomiejczyka w [7] i dotyczące ogólnego przypadku zwartej grupy Liego.

Dowód w przypadku skończonym został przedstawiony w Rozdziale 2. Znalazł się tam również przykład ilustrujący działanie wzoru produktowego. Rozdział 3 poświęcony jest dowodowi tego wzoru przy działaniu zwartej abelowej grupy Liego. Brak założenia o skończoności wymusił odpowiednie dostosowanie definicji odwzorowań polistandardowych, a także pracę na pierścieniu Burnside'a w wersji zaproponowanej przez T. tom Diecka. Jednocześnie założenie o abelowości uprościło strukturę tego pierścienia oraz pozwoliło pracować bezpośrednio na podgrupach zamiast na klasach sprzężoności.

Drugie zagadnienie rozprawy to konstrukcja gradientowego stopnia współmiennego Deg_G^∇ dla zwartych zaburzeń nieograniczonego operatora samosprężonego o czysto dyskretnym widmie w przestrzeni Hilberta. Motywacją były potencjalne zastosowania takiego narzędzia do poszukiwania rozwiązań okresowych układów hamiltonowskich oraz do innych zagadnień z analizy nieliniowej związanych z przestrzeniami Sobolewa. Rozdział 4, dotyczący konstrukcji stopnia, powstał w oparciu o wspólny artykuł z P. Bartłomiejczykiem i P. Nowakiem-Przygodzkim [10]. Podobnie jak inne wersje gradientowego stopnia współmiennego, Deg_G^∇ przyjmuje wartości w pierścieniu Eulera-tom Diecka. Definicja naszego stopnia opiera się na skończeniu wymiarowych aproksymacjach i wykorzystuje własność produktową w wariancie gradientowym, udowodnioną m.in. przez K. Gębę w [37] oraz A. Gołębiowską i S. Rybickiego w [44]. Pod koniec rozdziału pokazujemy, że Deg_G^∇ posiada własności analogiczne do dobrze znanych własności stopnia skończenia wymiarowego deg_G^∇ , takie jak addytywność, otopijna niezmienniczość, wykrywanie zer, normalizacja oraz własność produktowa. Kolejny rozdział zaczyna się od szczegółowego sformułowania problemu poszukiwania orbit okresowych oraz od przedstawienia szerszego kontekstu historycznego tego zagadnienia. Dalsza część Rozdziału 5 poświęcona jest obszernemu wyjaśnieniu, w jaki sposób można stosować nasz stopień Deg_G^∇ do poszukiwania tego typu rozwiązań układów hamiltonowskich.

W Rozdziale 6, wieńczącym treść rozprawy, przedstawiamy dalsze perspektywy badawcze stanowiące możliwą kontynuację i zastosowanie wyników w niej prezentowanych.

Rozdział 1

Preliminaria

1.1 Odwzorowania współzmiennicze i ich stopień

Zaczynamy od przypomnienia podstawowych definicji oraz oznaczeń pochodzących z teorii odwzorowań współzmienniczych.

1.1.1 G-przestrzenie

Przestrzeń topologiczną X nazywamy G -przestrzenią, jeżeli grupa topologiczna G działa na X w sposób ciągły. Przypominamy kilka podstawowych definicji.

Definicja 1.1. Zbiór $Gx = \{gx \mid g \in G\}$ nazywamy orbitą punktu $x \in X$.

Definicja 1.2. Zbiór $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ jest podgrupą grupy G , nazywaną stabilizatorem (lub grupą izotropii) punktu $x \in X$.

Niech H będzie podgrupą grupy G . Będziemy oznaczać przez:

- (H) klasę sprzężoności podgrupy H ,
- NH normalizator H w G ,
- WH grupę Weyla podgrupy H , tj. $WH = NH/H$.

Ponadto będziemy stosować oznaczenia:

- $X^H = \{x \in X \mid H \subseteq G_x\}$,
- $X_H = \{x \in X \mid H = G_x\}$,
- $X_{(H)} = \{x \in X \mid (H) = (G_x)\}$.

Jeżeli $x \in X_{(H)}$, to (H) nazywamy typem orbitowym punktu x . Na zbiorze

$$\text{Iso}(X) := \{(H) \mid H \text{ jest domkniętą podgrupą } G \text{ oraz } X_H \neq \emptyset\}$$

można zadać częściowy porządek. Mianowicie $(H) \leq (K)$ jeżeli grupa H jest sprzężona do pewnej podgrupy grupy K .

1.1.2 Reprezentacje

Załóżmy, że V jest rzeczywistą, skończenie wymiarową, ortogonalną reprezentacją zwartej grupy Liego G , a Ω jest otwartym, G -niezmienniczym podzbiorem V . Wówczas zachodzą następujące własności:

- zbiór $\text{Iso}(\Omega)$ jest skończony,
- V^H jest liniową podprzestrzenią V oraz ortogonalną reprezentacją grupy Weyla WH ,
- zbiór Ω_H (i w szczególności zbiór V_H) jest otwarty w V^H ,
- działanie grupy Weyla WH na Ω_H jest wolne (dla każdego $x \in \Omega_H$ i dla $g \in WH$ równość $gx = x$ zachodzi tylko wtedy, gdy g jest elementem neutralnym),
- $\Omega_{(H)}$ jest G -niezmienniczą podrozmaitością Ω . Dodatkowo jeżeli klasa (H) jest maksymalna w porządku na $\text{Iso}(\Omega)$, to $\Omega_{(H)}$ jest domkniętą w Ω .

1.1.3 Odwzorowania lokalne

Notacja $A \Subset B$ oznacza, że A jest zwartym podzbiorem B . Dla przestrzeni topologicznych X i Y , przez $\mathcal{M}(X, Y)$ oznaczamy zbiór wszystkich funkcji ciągłych $f : D_f \rightarrow Y$, takich że D_f jest otwartym podzbiorem w X . Przez $\tau(X)$ będziemy oznaczać topologię na X .

Niech \mathcal{R} będzie rodziną podzbiorów Y . Definiujemy

$$\text{Loc}(X, Y, \mathcal{R}) := \{f \in \mathcal{M}(X, Y) \mid f^{-1}(R) \Subset D_f \text{ dla każdego } R \in \mathcal{R}\}.$$

Wprowadzamy w $\text{Loc}(X, Y, \mathcal{R})$ topologię generowaną przez podbazę złożoną ze wszystkich zbiorów postaci:

- $H(C, U) := \{f \in \text{Loc}(X, Y, \mathcal{R}) \mid C \subset D_f, f(C) \subset U\}$ dla $C \Subset X$ oraz $U \in \tau(Y)$,

- $M(V, R) := \{f \in \text{Loc}(X, Y, \mathcal{R}) \mid f^{-1}(R) \subset V\}$ dla $V \in \tau(X)$ oraz $R \in \mathcal{R}$.

Elementy $\text{Loc}(X, Y, \mathcal{R})$ nazywamy odwzorowaniami lokalnymi. Naturalnym punktem bazowym $\text{Loc}(X, Y, \mathcal{R})$ jest odwzorowanie puste.

Przez $f \sqcup \tilde{f}$ będziemy oznaczać sumę mnogościową dwóch rozłącznych odwzorowań lokalnych f i \tilde{f} . Ponadto dla jednoelementowej rodziny $\mathcal{R} = \{\{y\}\}$ będziemy pisać $\text{Loc}(X, Y, y)$, pomijając podwójny nawias klamrowy. Więcej szczegółów można znaleźć w [11].

1.1.4 Odwzorowania współzmiennicze

Załóżmy, że V jest rzeczywistą, skończenie wymiarową reprezentacją zwartej grupy Liego G , a X jest ustaloną G -przestrzenią. Mówimy, że odwzorowanie $f : X \rightarrow V$ jest współzmiennicze, jeżeli $f(gx) = gf(x)$ dla wszystkich $x \in X$ oraz $g \in G$. Przez $\mathcal{C}_G(X, V)$ oznaczamy przestrzeń $\{f \in \text{Loc}(X, V, 0) \mid f \text{ jest współzmiennicze}\}$ z topologią indukowaną. Dla Ω będącej otwartym niezmienniczym podzbiorem V , elementy $\mathcal{C}_G(\Omega, V)$ nazywamy współzmienniczymi odwzorowaniami lokalnymi. W przypadku gdy $\Omega = V$, zamiast $\mathcal{C}_G(V, V)$ będziemy używać skróconego oznaczenia $\mathcal{C}_G(V)$.

1.1.5 Otopie

Niech $I = [0, 1]$ z trywialnym działaniem grupy G . Elementy $\mathcal{C}_G(I \times \Omega, V)$ będziemy nazywać otopiami. Każda otopia odpowiada wzajemnie jednoznacznie drodze w $\mathcal{C}_G(\Omega, V)$. Dla każdego $t \in I$ oraz ustalonej otopii $h : \Lambda \subset I \times \Omega \rightarrow V$ możemy zdefiniować:

- zbiory $\Lambda_t = \{x \in \Omega \mid (t, x) \in \Lambda\}$
- odwzorowania $h_t : \Lambda_t \rightarrow V$, gdzie $h_t(x) = h(t, x)$.

O odwzorowaniach h_0 i h_1 powiemy, że są otopijne. Otopijność jest relacją równoważności na $\mathcal{C}_G(\Omega, V)$. Zbiór klas otopii będziemy oznaczać przez $\mathcal{C}_G[\Omega, V]$ (lub krócej $\mathcal{C}_G[V]$ dla $\Omega = V$).

Uwaga 1.3. Zauważmy, że jeśli $f \in \mathcal{C}_G(\Omega, V)$, a U jest otwartym niezmienniczym podzbiorem D_f , takim że $f^{-1}(0) \subset U$, to f oraz $f|_U$ są otopijne. W szczególności jeżeli $f^{-1}(0) = \emptyset$, to f jest otopijne z odwzorowaniem pustym.

1.1.6 Pierścień Burnside'a zwartej grupy Liego

Definicja, którą tu przytoczymy, pochodzi z [29, Chap. IV., 2]. Niech G będzie zwartą grupą Liego. Rozważmy relację równoważności na klasie skończonych G -kompleksów: $X \sim Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej domkniętej podgrupy H grupy G , zbiory X^H i Y^H posiadają taką samą charakterystykę Eulera. Oznaczamy zbiór klas równoważności tej relacji przez $\mathcal{A}(G)$, a klasę zbioru X przez $[X]$. Suma rozłączna i iloczyn kartezjański G -kompleksów są zgodne z tą relacją. Co więcej, indukują one odpowiednio dodawanie i mnożenie w $\mathcal{A}(G)$. Uzyskana struktura, nazywana pierścieniem Burnside'a grupy G , jest przemianym pierścieniem z jedyneką. Zerem tego pierścienia jest klasa takiego zbioru X , że charakterystyka Eulera $\chi(X^H) = 0$ dla każdej podgrupy H . Jeżeli zaś K jest przestrzenią z $\chi(K) = -1$ i trywialnym działaniem grupy G , to klasa $[Y \times K]$ jest addytywną odwrotnością klasy $[Y]$.

Niech $\phi(G)$ oznacza zbiór takich domkniętych podgrup H grupy G , że grupa Weyla WH jest skończona. Wówczas pierścień $\mathcal{A}(G)$ addytywnie jest wolną grupą abelową na klasach $[G/H]$ zależnych wyłącznie od klasy sprzężoności $H \in \phi(G)$.

1.1.7 Stopień współmienniczy

Skończenie wymiarowy stopień \deg_G , zdefiniowany dla odwzorowań współmienniczych względem działania zwartej grupy Liego G , został wprowadzony w pracy [38] jako niezmiennik dopuszczalnych homotopii współmienniczych, który przyjmuje wartości w pierścieniu Burnside'a $\mathcal{A}(G)$. Następnie w pracach [7, 8] został on przedefiniowany w języku odwzorowań lokalnych i otopii. Autorzy wspomnianych prac udowodnili następujące własności stopnia $\deg_G: \mathcal{C}_G(V) \rightarrow \mathcal{A}(G)$.

Addytywność. Jeżeli $f, f' \in \mathcal{C}_G(V)$ oraz $D_f \cap D_{f'} = \emptyset$, to

$$\deg_G^{\vee}(f \sqcup f') = \deg_G f + \deg_G f'.$$

Otopijna niezmienniczość. Niech $f, f' \in \mathcal{C}_G(V)$. Jeżeli f i f' są otopijne, to

$$\deg_G f = \deg_G f'.$$

Wykrywanie zer. Jeżeli $\deg_G f \neq 0$, to $f(x) = 0$ dla pewnego $x \in D_f$.

Normalizacja. Jeżeli $f(y + v) = v$ dla każdego $y \in Gx$ oraz $|v| < \epsilon$, to $f^{-1}(0) = Gx$ oraz $\deg_G f = [G/G_x]$.

Uwaga 1.4. Warto przypomnieć, że stopień współmienniczy danego odwzorowania f , jako element pierścienia Burnside'a, składa się z wielu współczynników. Wykazanie, że chociaż jeden z nich jest różny od zera wystarczy do pokazania, że f posiada miejsce zerowe. Z kolei szczegółowa analiza wartości poszczególnych współczynników pozwala na wyciąganie wniosków nie tylko o istnieniu orbit miejsc zerowych, ale również o ich typach orbitowych.

1.2 Klasy otopeni i wiązki wektorowe

W tym podrozdziale przytaczamy ważne wyniki dotyczące klas otopeni lokalnych odwzorowań współmiennicznych, a także elementy teorii wiązek wektorowych, które wykorzystamy przy dowodzie wzoru produktowego.

1.2.1 Lokalne przekroje wiązki wektorowej

Niech M będzie rozmaitością klasy C^1 bez brzegu oraz niech $\dim M > 0$. Załóżmy, że $p: E \rightarrow M$ jest wiązką wektorową. Będziemy utożsamiać M z zerowym przekrojem E . *Lokalnym przekrojem* wiązki $p: E \rightarrow M$ nazywamy funkcją ciągłą $s: U \rightarrow E$, gdzie U jest zbiorem otwartym w M , $s^{-1}(M)$ jest zwarty oraz $p \circ s = \text{Id}_U$.

1.2.2 Indeks przecięcia

Założmy, że $\text{rank } E = \dim M$, a E jest orientowalna jako rozmaitość. Przez $I(s)$ będziemy oznaczać zorientowany indeks przecięcia dla lokalnego przekroju s (opisany szczegółowo między innymi w [42]), będący liczbą całkowitą. Indeks przecięcia jest niezmiennikiem otopeni, tj. jeśli dwa lokalne przekroje są otopenne, to posiadają taki sam indeks przecięcia. Wprowadzamy oznaczenia:

- $\Gamma(M, E)$ - zbiór wszystkich lokalnych przekrojów wiązki E nad rozmaitością M ,
- $\Gamma[M, E]$ - zbiór klas otopeni lokalnych przekrojów wiązki E nad rozmaitością M .

To pozwala nam sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.5 ([7, Thm 2.2]). *Jeżeli M jest spójna, to indeks przecięcia $I: \Gamma[M, E] \rightarrow \mathbb{Z}$ jest bijekcją.*

Co więcej, w każdej klasie otopeni można skonstruować szczególny rodzaj lokalnego przekroju.

Twierdzenie 1.6 ([9, Cor A.2]). *Niech $k \in \mathbb{Z}$. Dla dowolnego zbioru Q składającego się z $|k|$ różnych punktów z M i dowolnego zbioru $|k|$ rozłącznych kul otwartych wokół tych punktów istnieje lokalny przekrój s określony na sumie tych kul, taki że $s^{-1}(M) = Q$ oraz $I(s) = k$.*

1.2.3 Odwzorowania współmiennicze i lokalne przekroje

Niech V będzie rzeczywistą, skończenie wymiarową, ortogonalną reprezentacją zwar-
tej grupy Liego G . Typy orbitowe pojawiające się w V indeksujemy liczbami naturalnymi $1, 2, \dots, m$, w sposób nawiązujący do częściowego porządku na $\text{Iso}(V)$, to znaczy

$$(H_i) \geq (H_j) \text{ w porządku } \text{Iso}(V) \Rightarrow i \leq j.$$

W szczególności $H_1 = G$. Oznaczamy $M_i = V_{H_i} / WH_i$ oraz $E_i = (V_{H_i} \times V^{H_i}) / WH_i$. Dla wiązki wektorowej $p_i : E_i \rightarrow M_i$ zachodzi $\text{rank } E_i = \dim M_i$, a E_i jest orientowalna jako rozmaitość. Co więcej, wiązka $E_i \rightarrow M_i$ jest naturalnie izomorficzna z wiązką styczną $TM_i \rightarrow M_i$.

Zbiór lokalnych przekrojów wiązki p_i oznaczamy przez $\Gamma(M_i, E_i)$, a zbiór klas otopii takich przekrojów przez $\Gamma[M_i, E_i]$. Będziemy również wykorzystywać funkcję

$$\Theta_i : \mathcal{C}_{WH_i}(V_{H_i}, V^{H_i}) \rightarrow \Gamma(M_i, E_i)$$

określoną wzorem $\Theta_i(f)([x]) = [(x, f(x))]$ dla $x \in V_{H_i}$, a także funkcję

$$\Xi_i : \mathcal{C}_{WH_i}[V_{H_i}, V^{H_i}] \rightarrow \Gamma[M_i, E_i]$$

zadaną wzorem $\Xi_i([f]) = [\Theta_i(f)]$.

Grupa Weyla WH_i działa w sposób wolny na V_{H_i} , więc zarówno Θ_i , jak i Ξ_i są bi-
jeksjami (szczegóły można znaleźć w [7, Thm 4.1]).

1.2.4 Rozkład zbioru klas otopii

Przypominamy dwie ważne własności dotyczące rozkładu zbioru klas otopii $\mathcal{C}_G[V]$.

Twierdzenie 1.7 ([6, Thm 5.4]). *Niech Ω będzie otwartym i niezmienniczym podzbiorem V , a H reprezentantem maksymalnego typu orbitowego w $\text{Iso}(\Omega)$. Istnieje naturalna bi-
jeksja*

$$\mathcal{C}_G[\Omega, V] \approx \mathcal{C}_{WH}[\Omega_H, V^H] \times \mathcal{C}_G[\Omega \setminus \Omega_{(H)}, V]. \quad (1.1)$$

Intuicyjnie wydawałoby się, że aby zadać wzór powyższej bijekcji, wystarczy użyć klas otopeni odpowiednich obcięć, to znaczy

$$[f] \mapsto \left([f \upharpoonright_{D_f \cap \Omega_H}], [f \upharpoonright_{D_f \setminus \Omega_{(H)}}] \right).$$

Niestety w ogólności nieprawdą jest, że $f \upharpoonright_{D_f \setminus \Omega_{(H)}} \in \mathcal{C}_G(\Omega \setminus \Omega_{(H)}, V)$. To wymusza, aby najpierw zaburzyć odwzorowanie f wewnątrz jego klasy otopeni i w ten sposób zagwarantować, że obcięcie tego zaburzenia do zbioru $D_f \setminus \Omega_{(H)}$ jest elementem zbioru $\mathcal{C}_G(\Omega \setminus \Omega_{(H)}, V)$. Pełna procedura została opisana przez Piotra Bartłomiejczyka w [6, Sec. 5], a zaproponowane tam zaburzenie nie zmienia wartości odwzorowania f na zbiorze $\Omega_{(H)}$.

Zaczynając od $\Omega = V$ oraz $H = G$ i wykorzystując bijekcję (1.1), można indukcyjnie wyodrębnić kolejne typy orbitowe (patrz Rysunek 1.1). Natychmiast prowadzi do kolejnego wyniku opisanego w tej samej pracy.

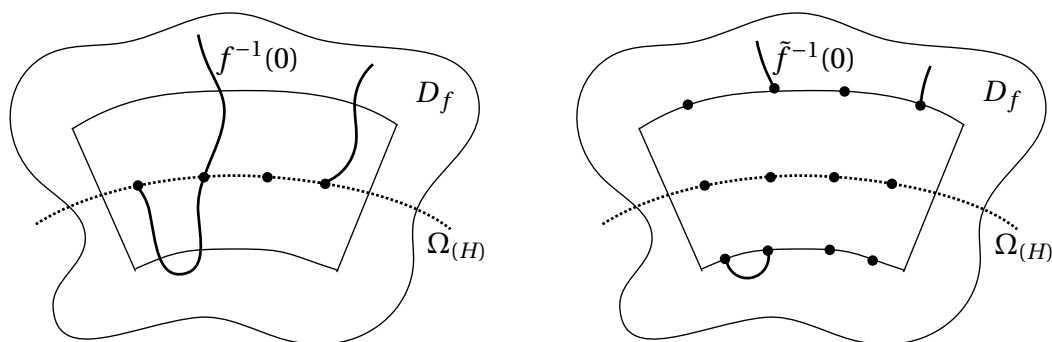
Wniosek 1.8 ([6, Thm 6.1]). *Istnieje naturalna bijekcja*

$$\Psi: \mathcal{C}_G[V] \rightarrow \prod_{i=1}^m \mathcal{C}_{WH_i}[V_{H_i}, V^{H_i}]. \quad (1.2)$$

Uwaga 1.9. Wyjaśnimy zamysł takiego rozkładu. Załóżmy, że $f \in \mathcal{C}_G(V)$. Jeżeli $f = \sqcup_{i=1}^m (f_i \times \text{Id}_{B_i})$, gdzie $f_i \in \mathcal{C}_{WH_i}(V_{H_i}, V^{H_i})$, a B_i są małymi kulami otwartymi wokół 0 w $(V^{H_i})^\perp$, to pożądaný rozkład można zrealizować za pomocą funkcji

$$[f] \mapsto ([f_1], [f_2], \dots, [f_m]).$$

Jeżeli zaś odwzorowanie f nie spełnia tych założeń, można je przekształcić do powyższej postaci poprzez serię zaburzeń wewnątrz jego klasy otopeni powtarzanych indukcyjnie po każdym typie orbitowym i opisanych szczegółowo w [6, Sec. 5].



Rysunek 1.1: Procedura oddzielania zer danego typu orbitowego (H). Po lewej: miejsca zerowe wyjściowego odwzorowania f . Po prawej: oddzielone zera po zaburzeniu odwzorowania f do \tilde{f} .

Dla $k = 1, 2, \dots, m$ przez

$$\pi_k: \prod_{i=1}^m \mathcal{C}_{WH_i} [V_{H_i}, V^{H_i}] \rightarrow \mathcal{C}_{WH_k} [V_{H_k}, V^{H_k}]$$

będziemy oznaczać naturalne rzutowanie.

Niech $\{M_{ij}\}_j$ oznacza zbiór składowych spójności rozmaitości M_i , a $n(i)$ liczbę tych składowych. Może ona być skończona lub przeliczalna. Zauważmy, że na mocy Twierdzenia 1.5 funkcja

$$I_i: \Gamma[M_i, E_i] \rightarrow \sum_{j=1}^{n(i)} \mathbb{Z},$$

zdefiniowana wzorem $I_i([s]) = \{I([s \upharpoonright_{M_{ij}}])\}_{j=1}^{n(i)}$, jest bijekcją.

To pozwala nam zdefiniować funkcję

$$\Phi: \mathcal{C}_G(V) \rightarrow \prod_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^{n(i)} \mathbb{Z} \right)$$

potrzebną w dalszej części pracy. Zadajemy ją wzorem

$$\Phi(f) := \{(I_i \circ \Xi_i \circ \pi_i \circ \Psi)([f])\}_{i=1}^m.$$

Twierdzenie 1.10 ([7, Thm 5.2]). *Funkcja Φ posiada następujące własności*

- $\Phi(\mathcal{C}_G(V)) = \begin{cases} \prod_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^{n(i)} \mathbb{Z} \right) & \text{jeśli } \dim V^G > 0, \\ \{0, 1\} \times \prod_{i=2}^m \left(\sum_{j=1}^{n(i)} \mathbb{Z} \right) & \text{jeśli } \dim V^G = 0, \end{cases}$
- jeżeli dane $f \in \mathcal{C}_G(V)$ jest postaci opisaney w Uwadze 1.9, to $\phi(f) = \{c_{ij}\}_{i,j}$, gdzie liczba całkowita c_{ij} jest równa indeksowi przecięcia przekroju $\theta_i(f_i)$ obciętego do M_{ij} ,
- funkcja indukowana przez Φ na $\mathcal{C}_G[V]$, którą będziemy oznaczać tą samą literą, jest iniekcją.

Rozdział 2

Własność produktowa przy działaniu grupy skończonej

Własność produktowa jest jedną z podstawowych własności stopnia topologicznego. Przypominamy, że odwzorowanie z otwartego podzbioru \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^n nazywamy lokalnym, jeżeli zbiór jego miejsc zerowych jest zwarty. Dla takich odwzorowań klasyczny stopień Brouwera (oznaczany \deg) jest dobrze zdefiniowany i posiada własność produktową, opisaną poniżej.

Własność produktowa ([19, Prop. 8.7]). Niech $f: D_f \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ oraz $\tilde{f}: D_{\tilde{f}} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ będą odwzorowaniami lokalnymi. Wtedy odwzorowanie $f \times \tilde{f}: D_f \times D_{\tilde{f}} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ również jest lokalne oraz zachodzi wzór

$$\deg(f \times \tilde{f}) = \deg f \cdot \deg \tilde{f}.$$

Głównym celem tego rozdziału jest przedstawienie krótkiego dowodu współmienniczej wersji wzoru produktowego, dla współmiennicznych odwzorowań lokalnych w przypadku działania grupy skończonej. Dla takich odwzorowań otrzymujemy analogiczny wzór

$$\deg_G(f \times \tilde{f}) = \deg_G f \cdot \deg_G \tilde{f},$$

jednak ponieważ wartości stopnia współmienniczego \deg_G są elementami pierścienia Burnside'a grupy G , to właśnie w nim przeprowadzane jest mnożenie po prawej stronie równości. Warto nadmienić, że w pracy [38] autorzy udowodnili współmienniczy wzór produktowy w dużo ogólniejszym przypadku zwartej, być może nieskończonej grupy Liego. Wspomniany dowód jest jednak miejscami dość szkicowy i skrótowy. Postanowiliśmy przeprowadzić nowy dowód, który choć dotyczy węższego przypadku działania grupy skończonej, jest bardziej czytelny i kompletny.

2.1 Pierścień Burnside'a grupy skończonej

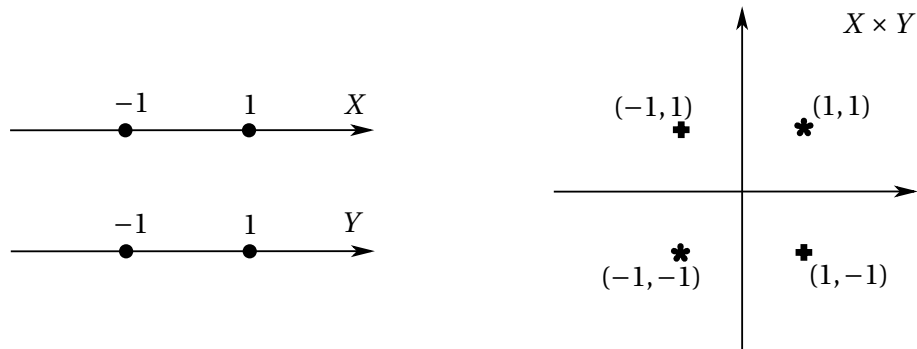
Przy założeniu, że G jest grupą skończoną, pierścień Burnside'a przybiera uproszczoną formę. Niech $\mathcal{A}^+(G)$ będzie zbiorem klas izomorfizmu skończonych G -zbiorów. Wówczas suma rozłączna skończonych G -zbiorów indukuje dodawanie na $\mathcal{A}^+(G)$, a iloczyn kartezyjański z działaniem przekątniowym indukuje mnożenie, tzn.

$$[X] + [Y] = [X \sqcup Y], \quad [X] \cdot [Y] = [X \times Y],$$

gdzie $[X], [Y]$ są klasami izomorfizmu skończonych G -zbiorów. Uzyskana w ten sposób struktura to przemienny półpierścień z jedyneką.

Ponieważ każdy skończony G -zbiór jest rozłączną sumą swoich orbit, każdy element półpierścienia $\mathcal{A}^+(G)$ można jednoznacznie przedstawić w postaci $\sum d_{(H)} [G/H]$, gdzie każdy współczynnik $d_{(H)}$ jest nieujemną liczbą całkowitą oraz $[G/H]$ jest klasą izomorfizmu zbioru G/H , która zależy tylko od klasy sprzężoności H . Problem rozkładu $G/H \times G/K$ na orbity sprawia, że mnożenie w $\mathcal{A}^+(G)$ jest nietrywialne. W szczególności zauważmy, że produkt orbit nie musi być pojedynczą orbitą (patrz Rysunek 2.1).

Pierścień Grothendiecka utworzony z $\mathcal{A}^+(G)$ jest oznaczany przez $\mathcal{A}(G)$ i nazywany *pierścieniem Burnside'a* skończonej grupy G . Addytywnie jest to wolna grupa abelowa generowana przez klasy izomorfizmu $[G/H]$. $\mathcal{A}(G)$ jest przemiennym pierścieniem, którego jedyneką jest $[G/G]$.



Rysunek 2.1: Przyjmijmy $X = Y = \mathbb{R}$ jako reprezentacje grupy $\mathbb{Z}_2 = \{\gamma, 1\}$ z działaniem danym wzorem $\gamma(x) = -x$. W tym przypadku produkt dwóch orbit dwuelementowych rozkłada się na dwie odrębne orbity dwuelementowe.

2.2 Główny wynik

Założmy, że

- G jest grupą skończoną,
- V i W są rzeczywistymi, skończone wymiarowymi reprezentacjami ortogonalnymi grupy G .

Przypominamy, że $\mathcal{C}_G(V)$ oznacza przestrzeń lokalnych odwzorowań współzmienniczych w V .

Wzór Produktowy. Jeżeli $f \in \mathcal{C}_G(V)$ i $\tilde{f} \in \mathcal{C}_G(W)$, to $f \times \tilde{f} \in \mathcal{C}_G(V \oplus W)$ oraz zachodzi następujący wzór:

$$\deg_G(f \times \tilde{f}) = \deg_G(f) \cdot \deg_G \tilde{f},$$

gdzie „ \cdot ” oznacza mnożenie w pierścieniu Burnside’a $\mathcal{A}(G)$.

2.3 Przykład

Zilustrujemy działanie Wzoru Produktowego na przykładzie iloczynu kartezjańskiego dwóch odwzorowań współzmienniczych. W tym celu rozważmy dwie reprezentacje grupy $\mathbb{Z}_2 = \{\gamma, 1\}$:

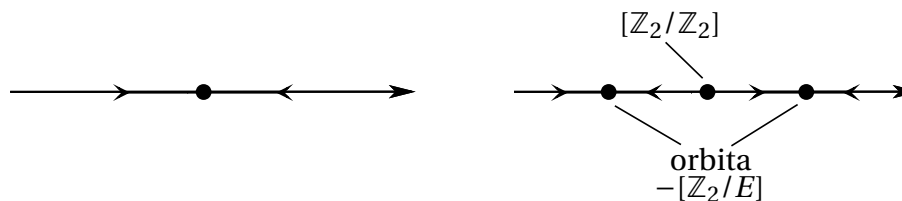
- a) $V = \mathbb{R}$ z działaniem $\gamma(x) = -x$,
- b) $W = \mathbb{R}^2$ z działaniem $\gamma(y, z) = (-y, z)$

oraz odwzorowania

- a) $f: V \rightarrow V$ dane wzorem $f(x) = -x$,
- b) $\tilde{f}: W \rightarrow W$ dane wzorem $\tilde{f}(y, z) = (-y, -z)$.

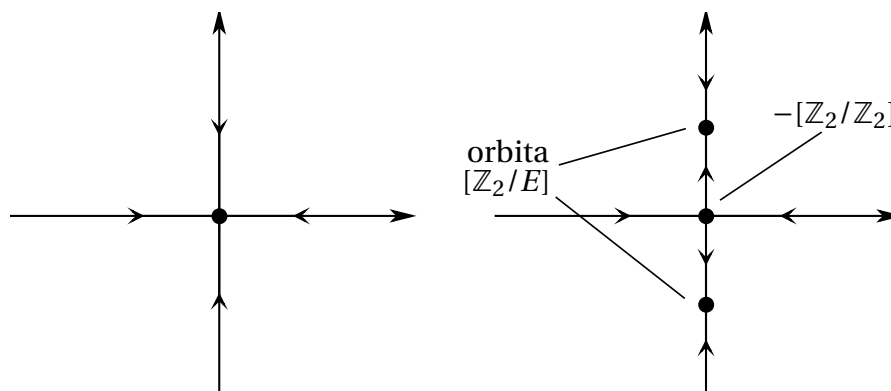
Oba te odwzorowania są \mathbb{Z}_2 -współzmiennicze, a ich stopnie współzmiennicze wynoszą:

a) $\deg_{\mathbb{Z}_2} f = [\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2] - [\mathbb{Z}_2/E],$



Rysunek 2.2: Po lewej: funkcja f jako pole wektorowe. Po prawej: jej zaburzenie do identyczności w kierunku normalnym.

b) $\deg_{\mathbb{Z}_2} \tilde{f} = -[\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2] + [\mathbb{Z}_2/E].$



Rysunek 2.3: Funkcja \tilde{f} jako pole wektorowe (po lewej) oraz jej zaburzenie do postaci umożliwiającej bezpośrednie wyznaczenie stopnia (po prawej).

Przestrzeń V stanowi rozłączną sumę dwóch zbiorów $V_{\mathbb{Z}_2} = \{0\}$ oraz $V_E = V \setminus \{0\}$. Ponieważ odwzorowanie f nie jest identycznością w kierunku normalnym do $V_{\mathbb{Z}_2}$, należy je zaburzyć za pomocą homotopii do odwzorowania o dwóch dodatkowych zerach o typie orbitowym E (patrz Rysunek 2.2), co odpowiada elementowi $[\mathbb{Z}_2/E] \in \mathcal{A}(\mathbb{Z}_2)$. Zaburzona funkcja jest już identycznością w kierunku normalnym względem $V_{\mathbb{Z}_2}$, a także względem V_E , gdzie znajduje się nowa orbita zer (kierunek normalny jest w tym wypadku trywialny). To pozwala na bezpośrednie wyliczenie stopnia i uzyskanie zaproponowanego powyżej wzoru.

Podobną procedurę przeprowadzamy dla przestrzeni W i odwzorowania \tilde{f} (patrz Rysunek 2.3).

Sprawdzimy prawdziwość wzoru

$$\deg_{\mathbb{Z}_2}(f \times \tilde{f}) = \deg_{\mathbb{Z}_2} f \cdot \deg_{\mathbb{Z}_2} \tilde{f}$$

dla tych przykładowych odwzorowań. Najpierw rozpiszmy prawą stronę tej równości.

$$\begin{aligned} P &= \deg_{\mathbb{Z}_2} f \cdot \deg_{\mathbb{Z}_2} \tilde{f} = ([\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2] - [\mathbb{Z}_2/E]) \cdot (-[\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2] + [\mathbb{Z}_2/E]) = \\ &= 2 \cdot [\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2] \cdot [\mathbb{Z}_2/E] - [\mathbb{Z}_2/E] \cdot [\mathbb{Z}_2/E] - [\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2] \cdot [\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2] = \\ &= 2[\mathbb{Z}_2/E] - 2[\mathbb{Z}_2/E] - [\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2] = -[\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2] = -\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_2}. \end{aligned}$$

Teraz określimy wartość lewej strony równości poprzez bezpośrednie wyliczenie stopnia odwzorowania $f \times \tilde{f}: V \times W \rightarrow V \times W$, danego oczywiście wzorem

$$(f \times \tilde{f})(x, y, z) = (-x, -y, -z).$$

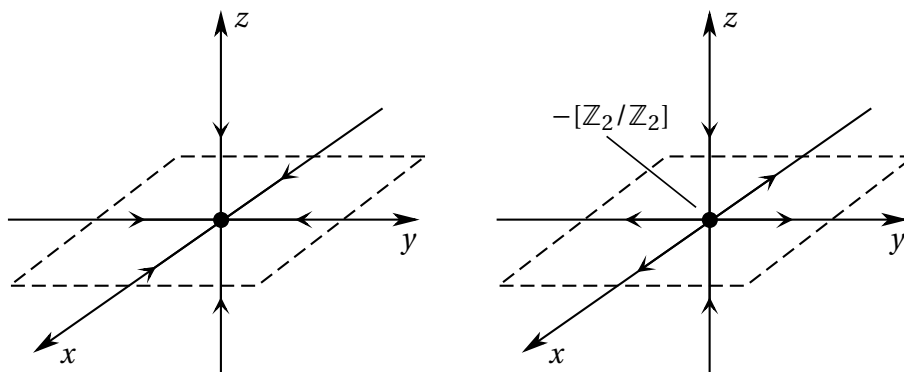
Odwzorowanie to jest homotopijne z funkcją $F(x, y, z) = (x, y, -z)$ za pośrednictwem homotopii współmienniczej ze zwartym zbiorem zer, zadanej wzorem:

$$H((x, y, z), t) = (-x \cos(\pi t) + y \sin(\pi t), -x \sin(\pi t) - y \cos(\pi t), -z).$$

Z tego wynika, że

$$\deg_{\mathbb{Z}_2} (f \times \tilde{f}) = \deg_{\mathbb{Z}_2} F = \deg(-\text{Id}_{\mathbb{R}}) \cdot [\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2] = -[\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2] = -\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_2}.$$

Przy wyliczeniu powyższego stopnia ponownie wykorzystaliśmy własność homotopijnej niezmienniczości (pierwsza równość) oraz uogólnioną własność normalizacji (druga równość).



Rysunek 2.4: Zauważmy, że $H(\cdot, 0) = f \times \tilde{f}$ oraz $H(\cdot, 1) = F$. Parametr t odpowiada za obrót wartości odwzorowania wokół osi Oz , co odpowiada obróceniu strzałek pola wektorowego w płaszczyźnie Oxy . Łączny obrót o kąt π powoduje uzyskanie przeciwnego zwrotu strzałek, co widać na rysunku.

2.4 Odwzorowania standardowe i polistandardowe

W tym podrozdziale wprowadzamy pojęcie odwzorowań standardowych i polistandardowych oraz badamy ich podstawowe własności. Tego typu odwzorowania grają ważną rolę w dowodzie Wzoru Produktowego, który przeprowadzony zostanie w kolejnym podrozdziale. Idea tych odwzorowań nawiązuje do odwzorowań normalnych, wykorzystywanych między innymi w pracach [7, 8, 25, 38]. Zaczynamy od przypomnienia definicji ϵ -normalnego otoczenia. Załóżmy, że:

- Y jest podprzestrzenią liniową $V = \mathbb{R}^n$,
- U jest otwartym podzbiorem Y .

Niech Y^\perp oznacza ortogonalne dopełnienie przestrzeni Y w \mathbb{R}^n .

Definicja 2.1. Niech $\epsilon > 0$ i $Y_\epsilon^\perp = \{v \in Y^\perp \mid |v| < \epsilon\}$. Zbiór $U^\epsilon = \{x + v \mid x \in U, v \in Y_\epsilon^\perp\}$ będziemy nazywać ϵ -normalnym otoczeniem zbioru U .

Powyższa definicja pozwala nam wprowadzić pojęcie odwzorowań standardowych i polistandardowych, istotnych w dalszej części rozdziału. Odwzorowanie $f \in \mathcal{C}_G(V)$ będziemy nazywać standardowym, jeżeli

- $f^{-1}(0) = Gx_0$ dla pewnego punktu $x_0 \in D_f$,
- istnieje otwarty podzbiór U zbioru V_H , gdzie $H = G_{x_0}$, a także takie $\epsilon > 0$, że:
 - $f^{-1}(0) \cap U = \{x_0\}$,
 - $U^\epsilon \subset D_f$,
 - $f(x + v) = f(x) + v$ dla każdych $x \in U$, $v \in (V^H)^\perp$, $|v| < \epsilon$.

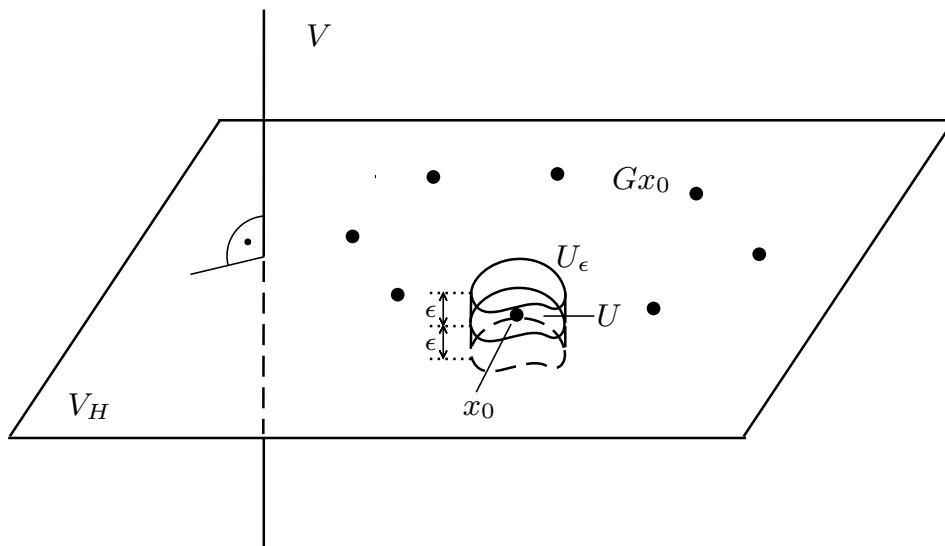
O takiej funkcji f będziemy również mówić, że jest „standardowa ze względu na x_0 , U oraz ϵ ” (patrz Rysunek 2.5).

Odwzorowanie $f \in \mathcal{C}_G(V)$ nazywamy m -standardowym, jeżeli istnieją odwzorowania standardowe f_1, f_2, \dots, f_m o rozłącznych dziedzinach, takie że

$$f^{-1}(0) \subset \sqcup_{i=1}^m D_{f_i} \subset D_f.$$

Odwzorowanie, które jest m -standardowe dla pewnego m , będziemy ogólniej nazywać polistandardowym. Z kolei skończoną sumę rozłączną odwzorowań standardowych nazwiemy ściśle polistandardowym. Z Uwagi 1.3 bezpośrednio wynika, że każde

odwzorowanie polistandardowe jest otopijne z pewnym odwzorowaniem ściśle polistandardowym.



Rysunek 2.5: Kluczowe elementy definicji odwzorowania standardowego: miejsce zerowe x_0 , zbiór U oraz jego ϵ -otwarte otoczenie U^ϵ .

W dalszej części będziemy potrzebować notacji, która powiąże klasyczny stopień topologiczny ze stopniem współmienniczym. Niech f będzie odwzorowaniem standardowym ze względu na x , U i ϵ oraz niech $\alpha = Gx$. Rozpatrujemy odwzorowanie $f_x : U \subset V_H \rightarrow V^H$ dane wzorem $f_x = f|_U$. Niech $d_x = \deg(f_x, U)$.

Stwierdzenie 2.2. Dla każdego $g \in G$ spełniona jest równość $d_x = d_{gx}$.

Dowód. Niech $g \in G$ oraz $K = G_{gx}$. Wówczas $V^K = gV^H$. Rozpatrzmy odwzorowanie $f_{gx} : gU \subset V^K \rightarrow V^K$, zadane wzorem $f_{gx}(y) = g f_x(g^{-1}y)$. Ponieważ $g : V^H \rightarrow V^K$ jest izomorfizmem przestrzeni liniowych,

$$d_{gx} = \deg(f_{gx}, gU) = \deg(f_x, U) = d_x. \quad \square$$

Zdefiniujmy $d_\alpha = d_y$, gdzie y jest dowolnym elementem orbity α . Na mocy Stwierdzenia 2.2, liczba całkowita d_α jest dobrze określona. Główną zaletą odwzorowań standardowych i polistandardowych jest możliwość natychmiastowego wyznaczenia wartości ich stopnia współmienniczego \deg_G , jeśli tylko znamy wartość d_α . Dla odwzorowania standardowego f oraz $\alpha = Gx = f^{-1}(0)$, otrzymujemy

$$\deg_G f = d_\alpha[G/G_x] = d_\alpha[\alpha].$$

Ogólniej, niech f będzie odwzorowaniem m -standardowym i niech $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ oznacza zbiór orbit miejsc zerowych odwzorowania f . Wtedy

$$\deg_G f = \sum_{i=1}^m d_{\alpha_i}[\alpha_i].$$

2.5 Dowód wzoru produktowego dla grupy skończonej

Aby udowodnić Wzór Produktowy, potrzebujemy dwóch lematów.

Lemat 2.3. Niech $f \in \mathcal{C}_G(V)$ oraz $\tilde{f} \in \mathcal{C}_G(W)$ będą odwzorowaniami standardowymi, dla których $\alpha = f^{-1}(0)$, $\beta = \tilde{f}^{-1}(0)$. Wówczas $f \times \tilde{f}$ jest polistandardowe, a dla każdej orbity $\gamma \subset \alpha \times \beta$ zachodzi

$$d_\gamma = d_\alpha \cdot d_\beta.$$

Co więcej,

$$\deg_G(f \times \tilde{f}) = \deg_G f \cdot \deg_G \tilde{f}.$$

Dowód. Najpierw pokażemy, że odwzorowanie $f \times \tilde{f}$ jest polistandardowe. Załóżmy, że f jest standardowe ze względu na x_0 , U i \tilde{e} , zaś \tilde{f} jest standardowe ze względu na \tilde{x}_0 , \tilde{U} i \tilde{e} . Niech $H = G_{x_0}$, a $K = G_{\tilde{x}_0}$. Zauważmy, że $(f \times \tilde{f})^{-1}(0) = Gx_0 \times G\tilde{x}_0$ jest skończoną sumą orbit oraz $G_{(x_0, \tilde{x}_0)} = H \cap K$. Zbiór $U^\epsilon \times \tilde{U}^{\tilde{\epsilon}}$ jest otwarty w $V \oplus W$ oraz

$$(x_0, \tilde{x}_0) \in V_H \times W_K \subset (V \oplus W)_{H \cap K},$$

więc istnieje taki otwarty podzbiór $S \subset (V \oplus W)_{H \cap K}$ wraz z $\epsilon > 0$, że $S^\epsilon \subset U^\epsilon \times \tilde{U}^{\tilde{\epsilon}}$ oraz $(f \times \tilde{f})^{-1}(0) \cap S = \{(x_0, \tilde{x}_0)\}$.

Teraz pokażemy, że $(f + \tilde{f})(s + t) = (f + \tilde{f})(s) + t$ dla $s \in S$, $t \in (V \oplus W)_{H \cap K}^\perp$, $|t| < \epsilon$. Ponieważ $S \subset U^\epsilon \times \tilde{U}^{\tilde{\epsilon}}$, element s można jednoznacznie zapisać jako $(x, \tilde{x}) + (v, \tilde{v})$, gdzie $(x, \tilde{x}) \in U \times \tilde{U}$ oraz $(v, \tilde{v}) \in (V^H)^\perp \oplus (W^K)^\perp$. Co więcej, z zawierania

$$(V \oplus W)^{H \cap K}{}^\perp \subset (V^H)^\perp \oplus (W^K)^\perp$$

wynika, że t można przedstawić w postaci (w, \tilde{w}) , dla pewnych jednoznacznie określonych $w \in (V^H)^\perp$ oraz $\tilde{w} \in (W^K)^\perp$. Stąd

$$\begin{aligned} (f \times \tilde{f})(s + t) &= (f \times \tilde{f})(x + v + w, \tilde{x} + \tilde{v} + \tilde{w}) \\ &= (f(x + v + w), \tilde{f}(\tilde{x} + \tilde{v} + \tilde{w})) = (f(x) + v + w, \tilde{f}(\tilde{x}) + \tilde{v} + \tilde{w}) \\ &= (f(x + v) + w, \tilde{f}(\tilde{x} + \tilde{v}) + \tilde{w}) = (f \times \tilde{f})(s) + t, \end{aligned}$$

co dowodzi, że $f \times \tilde{f}$ jest polistandardowe.

W kolejnym kroku wykazujemy równość $d_\gamma = d_\alpha \cdot d_\beta$. Niech $(x_0, \tilde{x}_0) \in \gamma \subset \alpha \times \beta$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} d_\alpha &= d_{x_0} = \deg(f_{x_0}, U) \stackrel{1}{=} \deg(f, U^\epsilon), \\ d_\beta &= d_{\tilde{x}_0} = \deg(\tilde{f}_{\tilde{x}_0}, \tilde{U}) \stackrel{1}{=} \deg(\tilde{f}, \tilde{U}^{\epsilon'}). \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} d_\gamma &= d_{(x_0, \tilde{x}_0)} = \deg((f \times \tilde{f})_{(x_0, \tilde{x}_0)}, S) \stackrel{1}{=} \deg(f \times \tilde{f}, S^\epsilon) \\ &\stackrel{2}{=} \deg(f \times \tilde{f}, U^\epsilon \times \tilde{U}^{\epsilon'}) \stackrel{1}{=} \deg(f, U^\epsilon) \cdot \deg(\tilde{f}, \tilde{U}^{\epsilon'}) = d_\alpha \cdot d_\beta. \end{aligned}$$

W powyższych przekształceniach wykorzystaliśmy dwie własności klasycznego stopnia topologicznego: własność produktową (1) oraz własność obcinania wokół miejsc zerowych (2).

W końcu dowodzimy prawdziwości wzoru produktowego dla odwzorowań standardowych. Tak jak pokazaliśmy, $f \times \tilde{f}$ jest m -standardowe dla pewnego m . Przedstawiamy $\alpha \times \beta$ jako sumę m rozłącznych orbit $\bigsqcup_{i=1}^m \gamma_i$. Ponieważ $d_{\gamma_i} = d_\alpha \cdot d_\beta$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, m$, ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{aligned} \deg_G(f \times \tilde{f}) &= \sum_{i=1}^m d_{\gamma_i}[\gamma_i] = \sum_{i=1}^m d_\alpha d_\beta[\gamma_i] = d_\alpha d_\beta \sum_{i=1}^m [\gamma_i] \\ &= d_\alpha d_\beta[\alpha \times \beta] = d_\alpha[\alpha] \cdot d_\beta[\beta] = \deg_G f \cdot \deg_G \tilde{f}. \end{aligned} \quad \square$$

Oznaczenia z kolejnego lematu pochodzą z podrozdziału 1.2.

Lemat 2.4. *Dla dowolnego układu $\{c_{ij}\} \in \Phi(\mathcal{C}_G(V))$ istnieje ściśle polistandardowe odwzorowanie f , takie że $\Phi(f) = \{c_{ij}\}$.*

Dowód. Musimy rozważyć dwa przypadki.

PRZYPADK 1: $\dim V^G > 0$. Przy tym założeniu $\dim M_i > 0$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, m$. Ustalmy $\{c_{ij}\} \in \Phi(\mathcal{C}_G(V))$, gdzie $c_{ij} \in \mathbb{Z}$. Na składowej M_{ij} wybieramy $|c_{ij}|$ punktów wraz z ich rozłącznymi kulistymi otoczeniami. Przez P_{ij} będziemy oznaczać zbiór tych punktów, a przez F_{ij} sumę mnogościową ich otoczeń. Na podstawie Wniosku 2.7 z Podrozdziału 2.6, istnieje lokalny przekrój $s_{ij}: F_{ij} \subset M_{ij} \rightarrow E_i$, taki że

$$s_{ij}^{-1}(M_{ij}) = P_{ij} \quad \text{oraz} \quad I(s_{ij}) = c_{ij}.$$

Następnie definiujemy lokalny przekrój $s_i: F_i \subset M_i \rightarrow E_i$ jako rozłączną sumę $s_i = \sqcup_{j=1}^{n(i)} s_{ij}$. Zauważmy, że zbiór $\cup_{i,j} P_{ij}$ jest skończony, ponieważ jedynie skończona ilość wyrazów c_{ij} jest niezerowa. Oznaczamy $f_i = \Theta_i^{-1}(s_i)$. Z definicji Θ_i wynika, że $f_i \in \mathcal{C}_{WH_i}(V_{H_i}, V^{H_i})$, a konstrukcja s_i zapewnia, że dziedzina D_{f_i} jest sumą rozłącznych kul otaczających punkty ze zbioru $f_i^{-1}(0)$. Z tego wynika, że zbiór $D := \cup_{i=1}^m D_{f_i}$ jest sumą skończonej ilości rozłącznych kul R_k , takich że każda kula zawiera dokładnie jedno miejsce zerowe pewnej funkcji f_i . Stąd możemy zapisać $D = \sqcup_k R_k$. Zauważmy, że dla odpowiednio małego $\epsilon > 0$, zbiory R_k^ϵ są rozłączne. Wtedy każdy punkt należący do $\sqcup_k R_k^\epsilon$ można jednoznacznie przedstawić w postaci $gx + gv$, gdzie $x \in D_{f_i}$, $v \in (V^{H_i})^\perp$, $|v| < \epsilon$. Zatem możemy zdefiniować odwzorowanie $f: D_f := \sqcup_k R_k^\epsilon \rightarrow V$ za pomocą wzoru

$$f(gx + gv) = g f_i(x) + gv$$

dla wszystkich $g \in G$, $x \in D_{f_i}$, $v \in (V^{H_i})^\perp$ oraz $|v| < \epsilon$. Nasza konstrukcja gwarantuje, że

- $f \in \mathcal{C}_G(V)$,
- f jest ściśle polistandardowe,
- $\Phi(f) = \{c_{ij}\}$.

PRZYPADEK 2: $\dim V^G = 0$. W tej sytuacji, $M_1 = \{0\}$ oraz $\dim M_i > 0$ dla $i > 1$. Analogicznie do poprzedniego przypadku definiujemy $f: D_f \rightarrow V$, jednak tym razem przy konstrukcji f bierzemy pod uwagę jedynie M_i o numerach $i > 1$. Wybierając odpowiednio małe kuliste otoczenia możemy zagwarantować, że $0 \notin \text{cl}(D_f)$. Zatem można znaleźć takie $\delta > 0$, że $B(0, \delta) \cap D_f = \emptyset$, gdzie $B(0, \delta)$ oznacza otwartą kulę w V o środku w początku układu współrzędnych i promieniu δ . Oznaczmy

$$f_\delta = \begin{cases} f & \text{jeśli } c_{11} = 0, \\ f \sqcup \text{Id} \upharpoonright_{B(0, \delta)} & \text{jeśli } c_{11} = 1. \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że $\Phi(f_\delta) = \{c_{ij}\}$. □

Wniosek 2.5. *W każdej klasie otopii zawartej w $\mathcal{C}_G(V)$ istnieje odwzorowanie ściśle polistandardowe.*

Dowód. Przypominamy, że $\Phi: \mathcal{C}_G[V, V] \rightarrow \prod(\sum \mathbb{Z})$ jest iniekcją. Niech $[f] \in \mathcal{C}_G[V]$. Na mocy Lematu 2.4 istnieje odwzorowanie polistandardowe $f_\delta \in \mathcal{C}_G(V)$, dla którego $\Phi([f_\delta]) = \Phi([f])$. Z różnowartościowości Φ wynika, że $f_\delta \in [f]$. □

Wzór Produktowy jest konsekwencją Lematu 2.3 oraz Wniosku 2.5.

Dowód Wzoru Produktowego. Przynależność $f \times \tilde{f} \in \mathcal{C}_G(V \oplus W)$ jest oczywista. Z Wniosku 2.5 wynika, że f i \tilde{f} są otopijne odpowiednio z odwzorowaniami ściśle polistandardowymi $\sqcup_k f_k$ i $\sqcup_l \tilde{f}_l$, gdzie f_k i \tilde{f}_l są standardowe. W rezultacie, $f \times \tilde{f}$ jest otopijne z odwzorowaniem $\sqcup_k f_k \times \sqcup_l \tilde{f}_l = \sqcup_{k,l}(f_k \times \tilde{f}_l)$.

Wykorzystując (1) otopijną niezmienniczość stopnia, (2) jego addytywność oraz (3) Lemat 2.3, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \deg_G(f \times \tilde{f}) &\stackrel{1}{=} \deg_G \sqcup_{k,l}(f_k \times \tilde{f}_l) \stackrel{2}{=} \sum_{k,l} \deg_G(f_k \times \tilde{f}_l) \\ &\stackrel{3}{=} \sum_{k,l} \deg_G f_k \cdot \deg_G \tilde{f}_l = \left(\sum_k \deg_G f_k \right) \cdot \left(\sum_l \deg_G \tilde{f}_l \right) \\ &\stackrel{2}{=} \left(\deg_G \sqcup_k f_k \right) \cdot \left(\deg_G \sqcup_l \tilde{f}_l \right) \stackrel{1}{=} \deg_G f \cdot \deg_G \tilde{f}. \end{aligned}$$

To kończy dowód. □

2.6 Dodatek

Załóżmy, że $p : E \rightarrow M$ jest wiązką wektorową nad rozmaitością M , taką że $\dim M > 0$, $\text{rank } E = \dim M$, a E jest orientowalna jako rozmaitość.

Lemat 2.6. *Dla dowolnego punktu $q \in M$, kulistego otoczenia D tego punktu oraz dla $\alpha \in \{-1, 1\}$ istnieje lokalny przekrój $s : D \subset M \rightarrow E$, taki że $s^{-1}(M) = \{q\}$ oraz $I(s) = \alpha$.*

Dowód. Niech $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$ oraz $TB = B \times \mathbb{R}^n$. Rozważmy lokalny przekrój $s_A : B \rightarrow TB$ dany wzorem $s_A(x) = (x, Ax)$, gdzie operator A jest liniowy i $\det A = \alpha$. Wówczas $I(s_A) = \alpha$.

Zauważmy, że TD można utożsamić z $E|_D$. Weźmy dyfeomorfizm $\varphi : B \rightarrow D$, taki że $\varphi(0) = q$. Indukuje on odwzorowanie styczne $T\varphi : TB \rightarrow TD$. To pozwala nam zdefiniować lokalny przekrój $s : D \rightarrow E$ za pomocą wzoru $s(x) = T\varphi(s_A(\varphi^{-1}(x)))$. Łatwo zauważyć, że $s^{-1}(M) = q$ oraz $I(s) = I(s_A) = \alpha$. □

Natychmiastową konsekwencją powyższego Lematu jest następujące stwierdzenie.

Wniosek 2.7. *Niech $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ oraz niech zbiór Q składa się z $|l|$ różnych punktów rozmaitości M . Wówczas dla dowolnego zbioru rozłącznych kulistych otoczeń tych punktów istnieje lokalny przekrój s zdefiniowany na tych otoczeniach, taki że $s^{-1}(M) = Q$ oraz $I(s) = l$.*

Rozdział 3

Własność produktowa przy działaniu grupy abelowej

W tym podrozdziale zajmiemy się drugim przypadkiem, dla którego udowodnimy własność produktową stopnia współmienniczego. Tym razem zakładamy, że G jest zwartą abelową grupą Liego (niekoniecznie skończoną).

Choć prezentowany dowód nie opiera się bezpośrednio na strukturze grupy G , zaznajmijmy od przypomnienia następującej charakteryzacji.

Stwierdzenie 3.1. *Grupa G jest zwartą abelową grupą Liego wtedy i tylko wtedy, gdy jest izomorficzna z grupą $F \times \mathbb{T}^n$, gdzie F jest skończoną grupą abelową, a \mathbb{T}^n jest produktem n okręgów (czyli n -wymiarowym torusem).*

Podobnie jak w poprzednim rozdziale, będziemy wykorzystywać oznaczenia z Definicji 1.2, pojawią się jednak pewne uproszczenia wynikające z abelowości G . Każda klasa sprzężoności (H) w tym przypadku składa się z pojedynczego elementu, tj. grupy H , a stąd:

- zbiory X_H oraz $X_{(H)}$ są tożsame,
- typy orbitowe będziemy oznaczać po prostu przez H zamiast (H) .

3.1 Pierścień Burnside'a zwartej abelowej grupy Liego

Przy założeniu, że zwarta grupa Liego G jest również grupą abelową, dostajemy $WH = G/H$ dla każdego $H \in \phi(G)$. Zatem z definicji $\phi(G)$, warstwa G/H jest skończona i może być traktowana zarówno jako trywialny (0-wymiarowy) G -kompleks, jak i G -zbiór. To

znacznie upraszcza strukturę pierścienia Burnside'a $\mathcal{A}(G)$ względem przypadku ogólnego. Ponieważ mnożenie w $\mathcal{A}(G)$ jest zgodne z iloczynem kartezyjskim, obliczanie $[G/H] \cdot [G/K]$ jest równoważne z rozkładem skończonego G -zbioru $G/H \times G/K$ na orbity. Podobnie, dodawanie można wyrazić jako rozłączną sumę skończonych G -zbiorów.

3.2 Główny wynik

Niech V i W będą rzeczywistymi, skończone wymiarowymi reprezentacjami zwartej abelowej grupy Liego G . Przez $\mathcal{C}_G(V)$ oznaczamy przestrzeń lokalnych odwzorowań współzmienniczych w V .

Wzór Produktowy. Niech $f \in \mathcal{C}_G(V)$ i $\tilde{f} \in \mathcal{C}_G(W)$. Wówczas $f \times \tilde{f} \in \mathcal{C}_G(V \times W)$ oraz

$$\deg_G(f \times \tilde{f}) = \deg_G f \cdot \deg_G \tilde{f}.$$

Mnożenie po prawej stronie ma miejsce w pierścieniu Burnside'a $\mathcal{A}(G)$.

Idea dowodu. Dowód ponownie opiera się na pojęciu odwzorowań polistandardowych. Jest to specjalny rodzaj lokalnych odwzorowań współzmienniczych, zdefiniowanych w Podrozdziale 3.3 na potrzeby przypadku zwartej abelowej grupy Liego. W Podrozdziale 3.4 pokazujemy, że produkt dwóch takich odwzorowań również jest polistandardowy oraz że Wzór Produktowy zachodzi w tej sytuacji. Następnie pokazujemy, że odwzorowania polistandardowe występują w każdej klasie otopii z $\mathcal{C}_G(V)$. Stopień \deg_G jest niezmiennikiem otopii, więc to kończy dowód.

3.3 Odwzorowania standardowe i polistandardowe

W [9] zostały wprowadziliśmy odwzorowania standardowe i polistandardowe w kontekście działania grupy skończonej. Zwarte abelowe grupy Liego niekoniecznie są skończone, więc w celu zastosowania tych pojęć w naszym dowodzie, należy odpowiednio dostosować ich definicję. Zaczynamy od następującej obserwacji.

Uwaga 3.2. Załóżmy, że H jest domkniętą podgrupą G . Niech α będzie orbitą typu H . Wówczas α jest izomorficzna z grupą G/H . Co więcej, ze względu na przemienność grupy G , zachodzi równość $WH = G/H$. Stąd następujące zdania są równoważne:

- G/H jest grupą skończoną,
- $H \in \phi(G)$, więc $[G/H]$ jest jednym z generatorów $\mathcal{A}(G)$,

- α jest skończona (składa się ze skończonej liczby punktów).

Poniższa konstrukcja odwzorowań standardowych i polistandardowych gwarantuje, że przeciwobraz zera względem takich odwzorowań składa się wyłącznie z tego rodzaju orbit. Przypominamy, że U^ϵ oznacza ϵ -normalne otoczenie zbioru U (patrz Definicja 2.1).

Definicja 3.3. Odwzorowanie $f \in \mathcal{C}_G(V)$ będziemy nazywać standardowym, jeżeli:

- $f^{-1}(0) = \alpha$ jest skończoną orbitą typu H ,
- istnieje otwarty niezmienniczy podzbiór U zbioru V_H oraz $\epsilon > 0$, takie że:
 - $\alpha \subset U$ i $U^\epsilon \subset D_f$,
 - $f(x + v) = f(x) + v$ dla $x \in U$, $v \in (V^H)_\epsilon^\perp$.

Czasem będziemy mówić o takim f , że jest (α, U, ϵ) -standardowe.

Uwaga 3.4. Łatwo zauważyć, że dane odwzorowanie (α, U, ϵ) -standardowe jest także (α, U, ϵ_1) -standardowe dla każdego $0 < \epsilon_1 < \epsilon$.

Definicja 3.5. Niech $m \in \mathbb{N}_+$. Odwzorowanie $f \in \mathcal{C}_G(V)$ jest m -standardowe, jeżeli istnieją odwzorowania standardowe f_1, f_2, \dots, f_m o rozłącznych dziedzinach, takie że

$$f^{-1}(0) \subset \bigsqcup_{k=1}^m D_{f_k} \subset D_f \text{ oraz } f \upharpoonright_{D_{f_i}} = f_i$$

dla każdego $1 \leq i \leq m$. W przypadkach, gdy wartość m będzie nieistotna w naszych rozważaniach, powiemy, że takie f jest polistandardowe. Jeżeli sama dziedzina D_f jest rozłączną sumą D_{f_i} , to f będziemy nazywać odwzorowaniem ściśle polistandardowym.

Uwaga 3.6. Na mocy Uwagi 1.3, jeżeli dane odwzorowanie jest polistandardowe, jest ono otopijne z pewnym odwzorowaniem ściśle polistandardowym.

Uwaga 3.7. Rozłączna suma odwzorowań polistandardowych również jest polistandardowa.

Uwaga 3.8. Niech f będzie odwzorowaniem (α, U, ϵ) -standardowym, gdzie $\alpha \subset V_H$. Dla każdego $x \in \alpha$ możemy wybrać takie otwarte otoczenie $U_x \subset U$, że $\text{cl}(U_x) \cap \alpha = x$ oraz $U_{gx} = gU_x$ dla każdego $g \in G$. Niech odwzorowanie $f_x : U_x \subset V_H \rightarrow V^H$ będzie zadane przez obcięcie $f_x = f \upharpoonright_{U_x}$. Wprowadzamy oznaczenie $d_x = \deg(f_x, U_x)$, gdzie \deg to klasyczny stopień Brouwera.

Stwierdzenie 3.9. Równość $d_x = d_{g_x}$ zachodzi dla każdego $g \in G$.

Dowód. Grupa G jest abelowa, więc otrzymujemy $G_{g_x} = H$. Ze współmienniczości odwzorowania f wynika, że $f_{g_x}(y) = g f_x(g^{-1}y)$. Ponieważ odwzorowanie $g : V^H \rightarrow V^H$ jest automorfizmem przestrzeni liniowej, dostajemy

$$d_{g_x} = \deg(f_{g_x}, U_{g_x}) = \deg(f_{g_x}, gU_x) = \deg(f_x, U_x) = d_x. \quad \square$$

Powyższe stwierdzenie gwarantuje, że liczba całkowita d_α , dana wzorem $d_\alpha = d_x$ dla dowolnego $x \in \alpha$, jest dobrze określona. Korzystając z tej notacji, możemy wyrazić główną zaletę odwzorowań standardowych i polistandardowych.

Stwierdzenie 3.10. Znając wartość d_α , można natychmiast obliczyć stopień współmienniczy odwzorowania standardowego f :

$$\deg_G f = d_\alpha[\alpha] = d_\alpha[G/H].$$

Podobnie, jeżeli f jest m -standardowe i $f^{-1}(0)$ składa się z orbit $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, zachodzi wzór:

$$\deg_G f = \sum_{i=1}^m d_{\alpha_i}[\alpha_i].$$

3.4 Dowód wzoru produktowego dla grupy abelowej

Zaczynamy od następującego lematu.

Lemat 3.11. Niech $f \in \mathcal{C}_G(V)$ oraz $\tilde{f} \in \mathcal{C}_G(W)$ będą odwzorowaniami standardowymi, dla których $f^{-1}(0) = \alpha$ i $\tilde{f}^{-1}(0) = \beta$. Wówczas:

- $f \times \tilde{f}$ jest polistandardowe,
- dla każdej orbity $\gamma \in \alpha \times \beta$ mamy $d_\gamma = d_\alpha \cdot d_\beta$,
- $\deg_G(f \times \tilde{f}) = \deg_G f \cdot \deg_G \tilde{f}$.

Dowód. Załóżmy, że α i β są odpowiednio typu H i K , gdzie f jest (α, U, ϵ) -standardowe, a \tilde{f} jest $(\beta, \tilde{U}, \epsilon)$ -standardowe (Uwaga 3.4 umożliwia wybranie wspólnego ϵ).

Zaczynamy od pokazania, że $f \times \tilde{f}$ jest polistandardowe. Zauważmy, że $(f \times \tilde{f})^{-1}(0) = \alpha \times \beta$ jest skończoną sumą orbit $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ typu $H \cap K$. Ponadto, zbiór $U^\epsilon \times \tilde{U}^\epsilon$ jest otwartym podzbiorem $V \times W$ oraz

$$\alpha \times \beta \subset V_H \times W_K \subset (V \times W)_{H \cap K}.$$

Isnieje zatem taki otwarty zbiór niezmienniczy $S \subset (V \times W)_{H \cap K}$ oraz $\delta > 0$, że

$$\alpha \times \beta \subset S \subset S^\delta \subset U^\epsilon \times \tilde{U}^\epsilon.$$

Niech $s \in S$ i $t \in ((V \times W)^{H \cap K})^\perp_\epsilon$. Pokażemy, że

$$(f \times \tilde{f})(s + t) = (f \times \tilde{f})(s) + t.$$

Ponieważ $S \subset S^\delta \subset U^\epsilon \times \tilde{U}^\epsilon$, s można jednoznacznie przedstawić w postaci $(x, \tilde{x}) + (v, \tilde{v})$, gdzie $(x, \tilde{x}) \in U \times \tilde{U}$ oraz $(v, \tilde{v}) \in (V^H)^\perp \times (W^K)^\perp$. Podobnie, $((V \times W)^{H \cap K})^\perp$ zawiera się w $(V^H)^\perp \times (W^K)^\perp$, zatem t można zapisać jednoznacznie jako (w, \tilde{w}) , gdzie $w \in (V^H)^\perp$ oraz $\tilde{w} \in (W^K)^\perp$. Stąd

$$\begin{aligned} (f \times \tilde{f})(s + t) &= (f \times \tilde{f})(x + v + w, \tilde{x} + \tilde{v} + \tilde{w}) \\ &= (f(x + v + w), \tilde{f}(\tilde{x} + \tilde{v} + \tilde{w})) = (f(x) + v + w, \tilde{f}(\tilde{x}) + \tilde{v} + \tilde{w}) \\ &= (f(x + v) + w, \tilde{f}(\tilde{x} + \tilde{v}) + \tilde{w}) = (f \times \tilde{f})(s) + t. \end{aligned}$$

Wreszcie, istnieją rozłączne otwarte zbiory niezmiennicze $S_1, \dots, S_m \subset S$, takie że $\gamma_i \subset S_i$ dla każdego $1 \leq i \leq m$. Stąd $(f \times \tilde{f})|_{S_i}$ są odwzorowaniami standardowymi, czyli samo $f \times \tilde{f}$ jest m -standardowe.

Teraz udowodnimy prawdziwość wzoru $d_\gamma = d_\alpha \cdot d_\beta$ dla dowolnej orbity $\gamma \subset \alpha \times \beta$. Niech $(a, b) \in \gamma$. Wykorzystamy oznaczenia z Uwagi 3.8 oraz dwie dobrze znane własności stopnia Brouwera: (1) wzór produktowy oraz (2) własność obcinania wokół zer.

Zauważmy, że $f|_{U_a^\epsilon} = f_a \times \text{Id}_{(V^H)^\perp}$. Stąd

$$\begin{aligned} d_\alpha &= d_a = \deg(f_a, U_a) \stackrel{1}{=} \deg(f, U_a^\epsilon), \\ d_\beta &= d_b = \deg(\tilde{f}_b, \tilde{U}_b) \stackrel{1}{=} \deg(\tilde{f}, \tilde{U}_b^\epsilon). \end{aligned}$$

Wybieramy otwarty podzbiór $S_{(a,b)} \subset S$ i $0 < \delta_1 \leq \delta$, takie że $(a, b) \in S_{(a,b)}$ oraz $S_{(a,b)}^{\delta_1} \subset U_a^\epsilon \times U_b^\epsilon$. Stąd dostajemy

$$\begin{aligned} d_\gamma &= d_{(a,b)} = \deg((f \times \tilde{f})_{(a,b)}, S_{(a,b)}) \stackrel{1}{=} \deg((f \times \tilde{f}), S_{(a,b)}^{\delta_1}) \\ &\stackrel{2}{=} \deg(f \times \tilde{f}, U_a^\epsilon \times \tilde{U}_b^\epsilon) \stackrel{1}{=} \deg(f, U_a^\epsilon) \cdot \deg(\tilde{f}, \tilde{U}_b^\epsilon) = d_\alpha \cdot d_\beta. \end{aligned}$$

W ostatnim kroku dowodu pokazujemy wzór produktowy dla odwzorowań standardowych. Pokazaliśmy już, że $f \times \tilde{f}$ jest m -standardowe oraz $\alpha \times \beta$ składa się z m rozłącznych orbit $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, gdzie $d_{\gamma_i} = d_\alpha \cdot d_\beta$ dla każdego $1 \leq i \leq m$. Zatem

$$\begin{aligned} \deg_G(f \times \tilde{f}) &\stackrel{3}{=} \sum_{i=1}^m d_{\gamma_i}[\gamma_i] = \sum_{i=1}^m d_\alpha d_\beta[\gamma_i] = d_\alpha d_\beta \sum_{i=1}^m [\gamma_i] \\ &\stackrel{4}{=} d_\alpha d_\beta[\alpha \times \beta] \stackrel{4}{=} d_\alpha[\alpha] \cdot d_\beta[\beta] \stackrel{3}{=} \deg_G f \cdot \deg_G \tilde{f}. \end{aligned}$$

(3) oznacza, że wykorzystaliśmy wzór na stopień odwzorowań standardowych i polistandardowych ze Stwierdzenia 3.10. Przez (4) odnosimy się do faktu, że dodawanie i mnożenie w pierścieniu Burnside'a $\mathcal{A}(G)$ są zgodne odpowiednio z sumą rozłączną i iloczynem kartezjańskim (odsyłamy do Podrozdziału 3.1). \square

Lemat 3.12. *Niech $f \in \mathcal{C}_G(V)$ i $\tilde{f} \in \mathcal{C}_G(W)$ będą odwzorowaniami ściśle polistandardowymi. Wtedy $f \times \tilde{f}$ jest polistandardowe oraz $\deg_G(f \times \tilde{f}) = \deg_G f \cdot \deg_G \tilde{f}$.*

Dowód. Załóżmy, że $f = \sqcup_k f_k$ i $\tilde{f} = \sqcup_l \tilde{f}_l$, gdzie f_k oraz \tilde{f}_l są standardowe. Z Lematu 3.11 wynika, że $f_k \times \tilde{f}_l$ jest polistandardowe dla każdego k, l . Zatem na mocy Uwagi 3.6 odwzorowanie $f \times \tilde{f} = \sqcup_{k,l} (f_k \times \tilde{f}_l)$ również jest polistandardowe.

Wykorzystując własność (1) otopijnej niezmienniczości, (2) addytywność stopnia oraz (3) Lemat 3.11, pokazujemy wzór produktowy:

$$\begin{aligned} \deg_G(f \times \tilde{f}) &\stackrel{1}{=} \deg_G \sqcup_{k,l} (f_k \times \tilde{f}_l) \stackrel{2}{=} \sum_{k,l} \deg_G(f_k \times \tilde{f}_l) \\ &\stackrel{3}{=} \sum_{k,l} \deg_G f_k \cdot \deg_G \tilde{f}_l = \left(\sum_k \deg_G f_k \right) \cdot \left(\sum_l \deg_G \tilde{f}_l \right) \\ &\stackrel{2}{=} \left(\deg_G \sqcup_k f_k \right) \cdot \left(\deg_G \sqcup_l \tilde{f}_l \right) \stackrel{1}{=} \deg_G f \cdot \deg_G \tilde{f}. \quad \square \end{aligned}$$

Lemat 3.13. *Każda klasa otopii w $\mathcal{C}_G(V)$ zawiera odwzorowanie polistandardowe.*

Zauważmy, że na mocy Twierdzenia 1.10 musimy jedynie pokazać, że dla dowolnego układu $\{c_{ij}\}_{i,j} \in \phi(\mathcal{C}_G(V))$ istnieje takie odwzorowanie ściśle polistandardowe f , że $\phi(f) = \{c_{ij}\}_{i,j}$.

Dowód. Zakładamy, że $\dim V_G > 0$ (w przypadku $\dim V_G = 0$ dowód jest analogiczny, z drobnymi technicznymi modyfikacjami opisanymi w Podrozdziale 3.5). Wybieramy ustalone $\{c_{ij}\}_{i,j} \in \phi(\mathcal{C}_G(V))$, gdzie każde $c_{ij} \in \mathbb{Z}$.

Na każdej składowej M_{ij} wybieramy $|c_{ij}|$ punktów wraz z rozłącznymi kulami otwartymi wokół nich. Przez P_{ij} będziemy oznaczać zbiór tych punktów, a przez F_{ij} sumę wspomnianych kul. Zauważmy, że zbiór $\cup_{i,j} P_{ij}$ jest skończony, ponieważ jedynie skończona ilość c_{ij} jest niezerowa.

E_{ij} oznacza składową E_i odpowiadającą M_{ij} . Na mocy Twierdzenia 1.6, istnieją takie lokalne przekroje $s_{ij} : F_{ij} \subset M_{ij} \rightarrow E_{ij}$, że

$$s_{ij}^{-1}(M_{ij}) = P_{ij} \text{ oraz } I(s_{ij}) = c_{ij}$$

dla każdego $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n(i)$. Zatem możemy zdefiniować lokalny przekrój $s_i : \sqcup_j F_{ij} \subset M_i \rightarrow E_i$ jako sumę rozłączną $s_i = \sqcup_j s_{ij}$. Oznaczmy $f_i = \theta_i^{-1}(s_i)$. Z definicji θ_i i z konstrukcji s_i wynika, że odwzorowanie f_i jest elementem $\mathcal{C}_{WH_i}(V_{H_i}, V^{H_i})$, a jego dziedziną D_{f_i} jest sumą rozłącznych kul otwartych wokół wszystkich punktów w $f_i^{-1}(0)$. W rezultacie, zbiór $\cup_{i=1}^m D_{f_i}$ jest skończoną sumą rozłączną otwartych kul R_k , z których każda zawiera jedno miejsce zerowe pewnej f_i . Zauważmy, że istnieje takie $\epsilon > 0$, że zbiory R_k^ϵ są parami rozłączne (mówiąc precyzyjniej, możemy zagwarantować to przez wybranie odpowiednio małych kul na każdej M_{ij} na początku konstrukcji).

Każdy punkt w $\sqcup_k R_k^\epsilon$ można jednoznacznie przedstawić w postaci $x + v$, gdzie $x \in D_{f_i}$ i $v \in (V^{H_i})_\epsilon^\perp$, więc możemy zdefiniować $f : D_f = \sqcup_k R_k^\epsilon \rightarrow V$ za pomocą wzoru

$$f(x + v) = f_i(x) + v$$

dla wszystkich $x \in D_{f_i}$, $v \in (V^{H_i})_\epsilon^\perp$ oraz $1 \leq i \leq m$. Nasza konstrukcja gwarantuje, że $f \in \mathcal{C}_G(V)$, f jest ściśle polistandardowe oraz $\phi(f) = \{c_{ij}\}_{i,j}$. \square

Wzór Produktowy wynika z Lematów 3.12 oraz 3.13.

Dowód wzoru produktowego. Ponieważ $f \in \mathcal{C}_G(V)$ i $\tilde{f} \in \mathcal{C}_G(W)$, przynależność $f \times \tilde{f}$ do $\mathcal{C}_G(V \times W)$ jest oczywista. Z Lematu 3.13, f i \tilde{f} są otopijne z pewnymi odwzorowaniami polistandardowymi, które oznaczymy odpowiednio f' i \tilde{f}' . Stąd, $f \times \tilde{f}$ jest otopijne z $f' \times \tilde{f}'$. Wykorzystując (1) własność otopijnej niezmienniczości stopnia współzmienniczego oraz (4) Lemat 3.12:

$$\deg_G(f \times \tilde{f}) \stackrel{1}{=} \deg_G(f' \times \tilde{f}') \stackrel{4}{=} \deg_G f' \cdot \deg_G \tilde{f}' \stackrel{1}{=} \deg_G f \cdot \deg_G \tilde{f}.$$

To kończy dowód. \square

3.5 Szczegóły techniczne

W tym podrozdziale krótko omówimy przypadek $\dim V_G = 0$.

3.5.1 Modyfikacja twierdzenia typu Hopfa

Niech $\dim V_G = 0$. Zauważmy, że $V_G = V^G$ jest liniową podprzestrzenią V , w związku z czym $V_G = \{0\}$. Ponieważ zarówno M_1 , jak i E_1 składają się z pojedynczego punktu, są jedynie dwie możliwe wartości indeksu przecięcia dla $s \in \Gamma(M_1, E_1)$. Indeks przyjmuje

wartość 0, gdy s jest pustym przekrojem oraz 1 w przeciwnym wypadku. Dla każdego $i > 1$ mamy już $\dim M_i > 0$.

Zatem wersja Twierdzenia 1.10 dla $\dim V_G = 0$ różni się jedynie przeciwdziedzina ϕ , która w tym przypadku jest równa $\{0, 1\} \times \prod_{i=2}^m \sum_{j=1}^{n(i)} \mathbb{Z}$.

3.5.2 Uzupelnienie dowodu Lematu 3.13

Założmy, że $\dim V_G = 0$ i ustalmy $\{c_{ij}\}_{i,j} \in \phi(\mathcal{C}_G(V))$. Odwzorowanie $f : D_f \rightarrow V$ definiujemy podobnie jak dla $\dim V_G = 0$, z dwiema drobnymi zmianami:

- bierzemy pod uwagę M_i tylko dla $i > 1$,
- wybieramy kule otwarte o odpowiednio małych promieniach, tak aby spełniony był warunek $0 \notin \text{cl}(D_f)$.

Niech B będzie kulą otwartą wokół 0 w V , taką że $D_f \cap B = \emptyset$. Określmy odwzorowanie

$$f_0 = \begin{cases} f & \text{dla } c_{11} = 0, \\ f \sqcup \text{Id}_B & \text{dla } c_{11} = 1. \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że f_0 jest ściśle polistandardowe oraz $\phi(f_0) = \{c_{ij}\}_{i,j}$.

Rozdział 4

Nowy wariant stopnia współzmienniczego w przestrzeni Hilberta

4.1 Podstawowe definicje

Rozpoczynamy od przybliżenia najważniejszych pojęć, które wykorzystamy w dalszej części rozdziału do konstrukcji nowego nieskończenie wymiarowego wariantu współzmienniczego stopnia gradientowego.

4.1.1 Nieograniczone operatory samosprężone w przestrzeni Hilberta

Ten podrozdział jest oparty na książce Schmüdgena [77]. Niech E będzie rzeczywistą, ośrodkową przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle \cdot | \cdot \rangle$ i niech $A: D(A) \subset E \rightarrow E$ będzie takim liniowym operatorem (niekoniecznie ograniczonym), że jego dziedzina $D(A)$ jest gęsta w E . Przyjmijmy

$$D(A^*) = \{y \in E \mid \exists u \in E \forall x \in D(A) \langle Ax \mid y \rangle = \langle x \mid u \rangle\}.$$

Ponieważ $D(A)$ jest gęsta w E , wektor $u \in E$ jest jednoznacznie wyznaczony przez y . Zatem przyjmując $A^*y = u$, otrzymujemy dobrze określony liniowy operator A^* działający z $D(A^*)$ do E , nazywany operatorem *sprężonym* do A . Mówimy, że A jest *samosprężony*, jeżeli $A = A^*$. Twierdzenie Hellingera-Toeplitza mówi, że jeżeli A jest samosprężony oraz $D(A) = E$, to A jest ograniczony.

Łatwo zauważyć, że

$$\langle x \mid y \rangle_1 = \langle x \mid y \rangle + \langle Ax \mid Ay \rangle$$

określa iloczyn skalarny na dziedzinie $D(A)$. Z tym iloczynem skalarnym $D(A)$ staje się przestrzenią Hilberta, którą będziemy oznaczać przez E_1 . W ten sposób $D(A)$ i E_1 są identyczne jako zbiory, jednak są wyposażone w różne iloczyny skalarne. Zauważmy, że A potraktowany jako operator z E_1 do E jest już ograniczony.

Mówimy, że samosprężony operator A ma *czysto dyskretne widmo*, jeżeli składa się ono jedynie z izolowanych wartości własnych o skończonych krotnościach. W [77] można znaleźć następującą charakteryzację operatorów o widmie czysto dyskretnym.

Twierdzenie 4.1. [77, Prop 5.12] *Jeżeli E jest nieskończenie wymiarową przestrzenią Hilberta, to następujące warunki są równoważne:*

1. *A posiada czysto dyskretne widmo.*
2. *Istnieje taki ciąg liczb rzeczywistych $\{\lambda_n\}$ i baza ortonormalna $\{b_n\}$, że $\lim |\lambda_n| = \infty$ oraz $Ab_n = \lambda_n b_n$ dla $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Zanurzenie $\iota: E_1 \rightarrow E$ jest zwarte.*

4.1.2 Gradient hilbertowski

Niech $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta oraz niech E^* oznacza przestrzeń ciągłych funkcjonałów liniowych z E do \mathbb{R} . Twierdzenie Riesz o reprezentacji mówi, że odwzorowanie $F: E \rightarrow E^*$ dane wzorem

$$F(x)(y) = \langle y | x \rangle$$

jest izometrycznym izomorfizmem. Niech U będzie niepustym otwartym podzbiorem przestrzeni E i niech $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ będzie różniczkowalne z pochodną $\varphi': U \rightarrow E^*$. *Gradientem* funkcjonału φ nazywamy funkcję $\nabla\varphi: U \rightarrow E$ daną wzorem

$$\nabla\varphi = F^{-1} \circ \varphi'.$$

Zatem dla $x \in U$ wyrażenie $\nabla\varphi(x)$ jest jednoznacznie wyznaczonym elementem przestrzeni E , spełniającym warunek

$$\langle \nabla\varphi(x) | y \rangle = \varphi'(x)(y).$$

Ze względu na ciągłość $F^{-1}: E^* \rightarrow E$ otrzymujemy dodatkowo następującą zależność: jeżeli φ jest elementem $C^1(U, \mathbb{R})$, to $\nabla\varphi$ należy do $C(U, E)$ jako złożenie funkcji ciągłych.

Przykład 4.2. Niech T będzie ograniczonym operatorem samosprężonym na E . Definiujemy $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \langle Tx | x \rangle, \quad x \in E.$$

Wtedy $\nabla\varphi = T$.

4.1.3 Odwzorowania lokalne w przestrzeni Hilberta

Niech

- E będzie rzeczywistą, hilbertowską, ortogonalną reprezentacją zwartej grupy Liego G ,
- $A: D(A) \subset E \rightarrow E$ będzie nieograniczonym operatorem samosprężonym z czyisto dyskretnym widmem,
- $D(A)$ będzie zbiorem niezmienniczym, a A odwzorowaniem współzmienniczym.

Definicja 4.3. Będziemy pisać $f \in \mathcal{G}_G(E)$, jeżeli

- $f: D_f \subset E_1 \rightarrow E$, gdzie D_f jest otwartym niezmienniczym podzbiorem E_1 ,
- $f(x) = Ax - \nabla\varphi(x)$, gdzie odwzorowanie $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^1 i niezmiennicze, tzn. $\varphi(gx) = \varphi(x)$,
- $f^{-1}(0)$ jest zwarty.

Elementy $\mathcal{G}_G(E)$ będą nazywane *odwzorowaniami lokalnymi*.

4.1.4 Otopie w przestrzeni Hilberta

Niech $I = [0, 1]$ z trywialnym działaniem grupy G . Odwzorowanie $h: \Lambda \subset I \times E_1 \rightarrow E$ będziemy nazywać *otopią*, jeżeli

- Λ jest otwartym podzbiorem niezmienniczym $I \times E_1$,
- $h(t, \cdot) \in \mathcal{G}_G(E)$ dla każdego $t \in I$,
- $h^{-1}(0)$ jest zwarty.

Dla danej otopii $h: \Lambda \subset I \times E_1 \rightarrow E$ możemy zdefiniować dla każdego $t \in I$:

- zbiory $\Lambda_t = \{x \in E_1 \mid (t, x) \in \Lambda\}$,

- odwzorowania $h_t: \Lambda_t \rightarrow E$, zadane wzorem $h_t(x) = h(t, x)$.

Jeżeli h jest otopią, mówimy, że odwzorowania h_0 i h_1 są *otopijne*. Relacja otopii jest relacją równoważności w $\mathcal{G}_G(E)$.

Zauważmy, że jeżeli f jest odwzorowaniem lokalnym, a U jest otwartym i niezmienniczym podzbiorem D_f takim, że $f^{-1}(0) \subset U$, to f oraz $f|_U$ są otopijne. Ta własność odwzorowań lokalnych nazywana jest *własnością obcięcia*. W szczególności zachodzi zależność, że jeżeli $f^{-1}(0) = \emptyset$, to f jest otopijne z odwzorowaniem pustym.

4.1.5 Pierścień Eulera-tom Diecka

Przytaczamy pojęcie pierścienia Eulera-tom Diecka w oparciu o [28]. Dla zwartej grupy Liego G niech $\mathfrak{U}(G)$ oznacza zbiór klas abstrakcji skończonych G -CW-kompleksów. Kompleksy X i Y należą do tej samej klasy, jeżeli zbiory ilorazowe X^H/WH i Y^H/WH mają taką samą charakterystykę Eulera dla wszystkich domkniętych podgrup H grupy G . Przypominamy, że X^H oznacza tutaj zbiór punktów stałych działania podgrupy H na kompleks X , tzn. $X^H := \{x \in X \mid hx = x \text{ dla każdego } h \in H\}$, a WH oznacza grupę Weyla dla H , tj. $WH = NH/H$. Dodawanie i mnożenie w $\mathfrak{U}(G)$ są indukowane odpowiednio przez sumę rozłączną i iloczyn kartezjański z diagonalnym G -działaniem, tzn.

$$[X] + [Y] = [X \sqcup Y], \quad [X] \cdot [Y] = [X \times Y],$$

gdzie nawiasy kwadratowe oznaczają klasy abstrakcji skończonych G -CW-kompleksów. W ten sposób $\mathfrak{U}(G)$ staje się przemiennym pierścieniem z jedynką, nazywanym *pierścieniem Eulera-tom Diecka* grupy G .

Addytywnie $\mathfrak{U}(G)$ jest wolną grupą abelową o elementach bazowych $[G/H]$, gdzie H jest domkniętą podgrupą G . W rezultacie każdy element $\mathfrak{U}(G)$ można przedstawić jednoznacznie jako skończoną sumę $\sum d_{(H)}[G/H]$, gdzie $d_{(H)}$ jest liczbą całkowitą, która zależy tylko od klasy sprzężoności grupy H . Jedynką pierścienia jest element $[G/G]$.

4.1.6 Skończenie wymiarowy współmienniczy stopień gradientowy

Załóżmy, że V jest rzeczywistą, skończenie wymiarową, ortogonalną reprezentacją zwartej grupy Liego G . Będziemy pisać $f \in \mathcal{G}_G(V)$, jeżeli f jest współmienniczym odwzorowaniem gradientowym z otwartego i niezmienniczego podzbioru V do V oraz $f^{-1}(0)$ jest zwarty. W artykułach [8, 12, 37, 76] ich autorzy zdefiniowali współmienniczy stopień gradientowy

$$\deg_G^\nabla: \mathcal{G}_G(V) \rightarrow \mathfrak{U}(G)$$

oraz udowodnili, że posiada on następujące własności: addytywność, otopijna niezmienniczość, wykrywanie zer oraz normalizacja. Własność produktowa, sformułowana poniżej, została udowodniona w [37] oraz [44].

Twierdzenie 4.4 (Własność produktowa). *Niech V oraz W będą rzeczywistymi, ortogonalnymi, skończenie wymiarowymi reprezentacjami zwartej grupy Liego G . Wtedy jeżeli $f \in \mathcal{G}_G(V)$ oraz $f' \in \mathcal{G}_G(W)$, to $f \times f' \in \mathcal{G}_G(V \oplus W)$ oraz*

$$\deg_G^\nabla(f \times f') = \deg_G^\nabla(f) \cdot \deg_G^\nabla(f') \text{ w pierścieniu } \mathfrak{L}(G).$$

W kolejnym podrozdziale skorzystamy z następującego wyniku, który można znaleźć w [43, Cor. 2.1].

Twierdzenie 4.5. *Niech V będzie rzeczywistą, skończenie wymiarową reprezentacją ortogonalną zwartej grupy Liego G . Jeżeli B jest współzmienniczym, samosprężonym izomorfizmem przestrzeni V , to $\deg_G^\nabla(B)$ jest odwracalnym elementem $\mathfrak{L}(G)$.*

Uwaga 4.6. Warto wspomnieć, że Twierdzenie 4.5 zachodzi nawet wtedy, gdy V jest trywialna. W takim przypadku $\deg_G^\nabla(B)$ jest równy jedynce $\mathfrak{L}(G)$.

4.2 Konstrukcja stopnia

W tym podrozdziale przedstawiamy konstrukcję stopnia Deg_G^∇ przy użyciu skończenie wymiarowych aproksymacji.

4.2.1 Skończenie wymiarowe aproksymacje

Zaczynamy od wprowadzenia następującej notacji:

- dla $\lambda \in \sigma(A)$, przez $V(\lambda)$ będziemy oznaczać odpowiadającą jej podprzestrzeń własną;
- dla $n \in \mathbb{N}$ będziemy pisać $V_n = \oplus_{|\lambda| \leq n} V(\lambda)$, $V^n = \oplus_{n-1 < |\lambda| \leq n} V(\lambda)$ oraz $A_n = A \upharpoonright_{V^n}$. Zauważmy, że wówczas $V_n = V_{n-1} \oplus V^n$;
- przez $P_n: E \rightarrow V_n$ będziemy oznaczać rzutowanie ortogonalne.

Załóżmy, że U jest otwartym, ograniczonym, niezmienniczym podzbiorem D_f , takim że

$$f^{-1}(0) \subset U \subset \text{cl}U \subset D_f.$$

Niech $U_n = U \cap V_n$. Zdefiniujmy odwzorowanie $f_n: U_n \rightarrow V_n$ za pomocą wzoru

$$f_n(x) = Ax - P_n F(x),$$

gdzie $F(x) = \nabla \varphi(x)$.

Poniższe dwa lematy są potrzebne do udowodnienia Lematu 4.9, który pełni kluczową rolę w definicji stopnia Deg_G^∇ .

Lemat 4.7. *Istnieje taki $\epsilon > 0$, że $|f(x)| \geq 2\epsilon$ dla każdego $x \in \partial U$.*

Dowód. Istnienie takiego ϵ wynika ze zwartości odwzorowania F oraz z tego, że ∂U jest domknięty i ograniczony. \square

Wprowadzamy odwzorowanie pomocnicze $\tilde{f}_n: D_f \rightarrow E$ dane wzorem

$$\tilde{f}_n(x) = Ax - P_n F(x).$$

Z definicji $\tilde{f}_n \upharpoonright_{U_n} = f_n$.

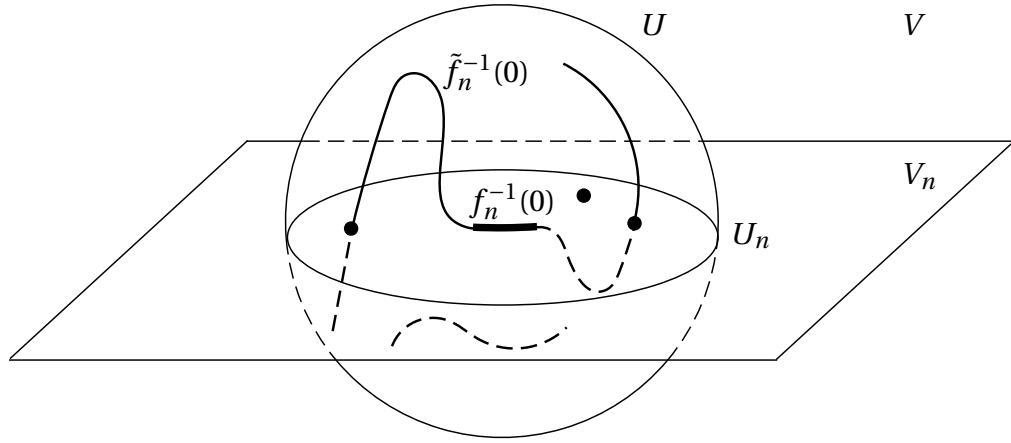
Lemat 4.8. *Istnieje takie N , że dla $n \geq N$ zachodzi*

1. $|f(x) - \tilde{f}_n(x)| < \epsilon$ dla $x \in \text{cl} U$,
2. $|\tilde{f}_n(x)| > \epsilon$ dla $x \in \partial U$.

Dowód. Ponieważ F jest zwarte, wartości F są bliskie wartościom $P_n F$, co daje (1). Z kolei (2) wynika z (1) oraz Lematu 4.7. \square

Lemat 4.9. *Dla $n \geq N$ zachodzi $f_n \in \mathcal{G}_G(V_n)$ i stąd stopień $\text{deg}_G^\nabla(f_n) \in \mathfrak{U}(G)$ jest dobrze określony.*

Dowód. Ponieważ f_n jest oczywiście odwzorowaniem gradientowym, pozostaje pokazać, że $f_n^{-1}(0)$ jest zwarty. Zauważmy, że \tilde{f}_n można traktować jako rozszerzenie f_n na $\text{cl} U_n$. Na mocy (2) z Lematu 4.8, \tilde{f}_n nie posiada miejsc zerowych w $\partial U_n \subset \partial U$ i stąd zbiór $f_n^{-1}(0) = \tilde{f}_n^{-1}(0) \cap U_n$ jest zwarty (patrz Rysunek 4.1). \square



Rysunek 4.1: Zbiór $f_n^{-1}(0)$ jest zwarty jako przekrój zbioru zwanego $\tilde{f}_n^{-1}(0)$ i domkniętego $\text{cl}U_n$.

4.2.2 Definicja stopnia

Zauważmy, że A_n jest współmienniczym, samosprężonym izomorfizmem dla $n \geq 1$. Na mocy Twierdzenia 4.5 elementy $a_n := \text{deg}_G^\nabla(A_n)$ są odwracalne w $\mathfrak{L}(G)$. Oznaczmy $m_n := a_1^{-1} \cdot a_2^{-1} \cdot \dots \cdot a_n^{-1}$.

Definicja 4.10. Definiujemy $\text{Deg}_G^\nabla: \mathcal{G}_G(E) \rightarrow \mathfrak{L}(G)$ za pomocą wzoru

$$\text{Deg}_G^\nabla(f) := m_n \cdot \text{deg}_G^\nabla(f_n)$$

dla $n \geq N$.

Alternatywna definicja stopnia Deg_G^∇ wykorzystuje pojęcie granicy prostej. Definicję 4.10 można postrzegać jako prosty, szczególny przypadek bardziej ogólnej konstrukcji nazywanej *granica prostą systemu prostego grup*. Mianowicie dla $i = 0, 1, \dots$ niech G_i oznacza grupę abelową, a $\alpha_i: G_i \rightarrow G_{i+1}$ homomorfizm grup. Przy takiej notacji otrzymujemy ciąg

$$G_0 \xrightarrow{\alpha_0} G_1 \xrightarrow{\alpha_1} G_2 \xrightarrow{\alpha_2} G_3 \rightarrow \dots$$

Niech $\tilde{G} := \coprod_{i=0}^\infty G_i$ oznacza sumę rozłączną, tzn.

$$\tilde{G} = \{(i, m) \mid i \in \mathbb{N}, m \in G_i\}.$$

Wprowadzamy w \tilde{G} relację równoważności. Dla $i > j$ będziemy pisać $(i, m) \sim (j, l)$, jeżeli

$$\alpha_{i-1} \circ \dots \circ \alpha_{j+1} \circ \alpha_j(l) = m.$$

Granica prosta grup jest zbiorem klas abstrakcji powyższej relacji, oznaczanym przez

$$\varinjlim G_i = \tilde{G} / \sim .$$

Niech $\varinjlim \mathfrak{U}(G)$ oznacza granicę prostą grup, gdzie

- $G_i = \mathfrak{U}(G)$ dla każdego i ,
- α_i jest mnożeniem przez element $a_i = \deg_G^\nabla(A_i, V^i) \in \mathfrak{U}(G)$.

Wykorzystując ten zapis, możemy alternatywnie zdefiniować nasz stopień jako funkcję $\text{Deg}_G^\nabla: \mathcal{G}_G(E) \rightarrow \varinjlim \mathfrak{U}(G) \approx \mathfrak{U}(G)$ daną wzorem

$$\text{Deg}_G^\nabla(f) := [(n, \deg_G^\nabla(f_n, U_n))]$$

dla odpowiednio dużych n .

4.3 Poprawność definicji stopnia

Musimy pokazać, że wartość zdefiniowanego stopnia nie zależy od wyboru n ani otoczenia U .

4.3.1 Niezależność od wyboru n

Do pokazania tej własności potrzebny będzie następujący lemat.

Lemat 4.11. *Dla odpowiednio dużych n odwzorowanie f_{n+1} jest otopijne z $f_n \times A_{n+1}$ w $\mathcal{G}_G(V_{n+1})$ i stąd*

$$\deg_G^\nabla(f_{n+1}) = \deg_G^\nabla(f_n \times A_{n+1}).$$

Dowód. Najpierw zauważmy, że istnieją zbiór otwarty $W \subset U$ oraz liczba naturalna N takie, że

- $f^{-1}(0) \subset W \subset U$,
- $P_n(\text{cl } W) \subset U_n$ dla każdego $n \geq N$.

Określmy odwzorowanie $h_{n+1}: I \times \text{cl } W_{n+1} \rightarrow V_{n+1}$ wzorem

$$h_{n+1}(t, x) = (1 - t)f_{n+1}(x) + t(f_n \times A_{n+1})(x).$$

Dobieramy odpowiednio dużą liczbę n . Można pokazać, że $h_{n+1}(t, x) \neq 0$ dla $t \in I$ oraz $x \in \partial W_{n+1}$. Wynika z tego, że $h_{n+1} \upharpoonright_{I \times W_{n+1}}$ jest skończenie wymiarową, współmienniczą, gradientową otopią między $f_{n+1} \upharpoonright_{W_{n+1}}$ a $f_n \times A_{n+1} \upharpoonright_{W_{n+1}}$ (w przeciwnym razie istniałby taki punkt $x_0 \in \partial W$, że $f(x_0) = 0$, co dałoby sprzeczność). Z drugiej strony, dzięki własności obcięcia f_{n+1} i $f_n \times A_{n+1}$ są otopijne ze swoimi obcięciami do W_{n+1} , co kończy dowód. \square

Na mocy Lematu 4.11 i Twierdzenia 4.4 można łatwo wywnioskować, że

$$\deg_G^\nabla(f_{n+1}) \stackrel{4.11}{=} \deg_G^\nabla(f_n \times A_{n+1}) \stackrel{4.4}{=} \deg_G^\nabla(f_n) \cdot \deg_G^\nabla(A_{n+1}) = a_{n+1} \cdot \deg_G^\nabla(f_n).$$

Stąd otrzymujemy

$$m_{n+1} \cdot \deg_G^\nabla(f_{n+1}) = m_{n+1} \cdot a_{n+1} \cdot \deg_G^\nabla(f_n) = m_n \cdot \deg_G^\nabla(f_n),$$

co pokazuje, że $\text{Deg}_G^\nabla(f)$ nie zależy od wyboru n , jeśli jest ono odpowiednio duże.

4.3.2 Niezależność od wyboru U

Na podstawie naszej definicji $\text{Deg}_G^\nabla(f) = \text{Deg}_G^\nabla(f \upharpoonright_U)$. Teraz pokażemy, że $\text{Deg}_G^\nabla(f)$ nie zależy od wyboru otoczenia U .

Lemat 4.12. *Niech W i U będą otwartymi zbiorami ograniczonymi, takimi że*

$$f^{-1}(0) \subset W \subset U \subset \text{cl}U \subset D_f.$$

Wtedy $\text{Deg}_G^\nabla(f \upharpoonright_W) = \text{Deg}_G^\nabla(f \upharpoonright_U)$.

Dowód. Zauważmy, że Lemat 4.7 pozostałby prawdziwy, gdybyśmy w jego treści zastąpili ∂U zbiorem $\text{cl}U \setminus W$. Zatem $|f(x)| \geq 2\epsilon$ dla $x \in \text{cl}U \setminus W$. Co więcej, na mocy Lematu 4.8 zachodzi nierówność $|f(x) - \tilde{f}_n(x)| < \epsilon$ dla $x \in \text{cl}U$. Stąd $\tilde{f}_n(x) \neq 0$ dla $x \in \text{cl}U \setminus W$. W rezultacie, $f_n(x) \neq 0$ dla $x \in \text{cl}U_n \setminus W_n$. Zatem

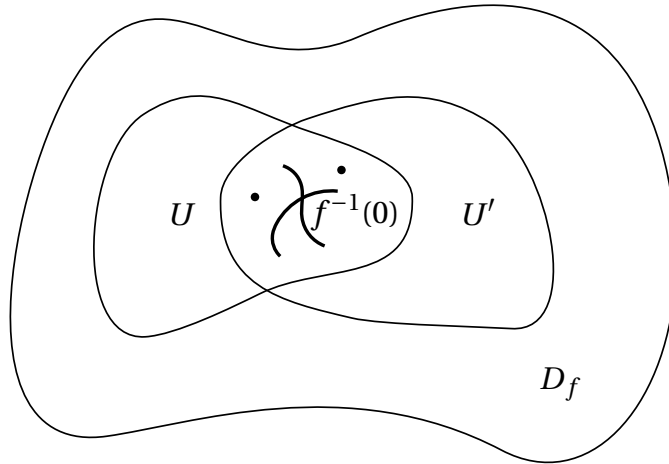
$$\text{Deg}_G^\nabla(f \upharpoonright_U) = m_n \cdot \deg_G^\nabla(f_n \upharpoonright_{U_n}) = m_n \cdot \deg_G^\nabla(f_n \upharpoonright_{W_n}) = \text{Deg}_G^\nabla(f \upharpoonright_W). \quad \square$$

Wniosek 4.13. *Niech U oraz U' będą otwartymi, ograniczonymi podzbiorem D_f , takimi że*

$$f^{-1}(0) \subset U \cap U' \subset \text{cl}(U \cup U') \subset D_f.$$

Wtedy $\text{Deg}_G^\nabla(f \upharpoonright_U) = \text{Deg}_G^\nabla(f \upharpoonright_{U \cap U'}) = \text{Deg}_G^\nabla(f \upharpoonright_{U'})$.

W ten sposób wykazaliśmy, że $\text{Deg}_G^\nabla(f)$ nie zależy od wyboru dopuszczalnego zbioru U (patrz Rysunek 4.2).



Rysunek 4.2: Wartość stopnia Deg_G^∇ dla odwzorowania f na zbiorze U jest taka sama, jak na zbiorze U' .

4.4 Własności stopnia

W tym podrozdziale udowodnimy, że nasz stopień $\text{Deg}_G^\nabla: \mathcal{G}_G(E) \rightarrow \mathfrak{L}(G)$ posiada własności analogiczne do dobrze znanych własności skończenie wymiarowego stopnia współzmienniczego deg_G^∇ .

Addytywność. Jeżeli $f, f' \in \mathcal{G}_G(E)$ oraz $D_f \cap D_{f'} = \emptyset$, to

$$\text{Deg}_G^\nabla(f \sqcup f') = \text{Deg}_G^\nabla(f) + \text{Deg}_G^\nabla(f').$$

Otopijna niezmienniczość. Niech $f, f' \in \mathcal{G}_G(E)$. Jeżeli f i f' są otopijne, to

$$\text{Deg}_G^\nabla(f) = \text{Deg}_G^\nabla(f').$$

Wykrywanie zer. Jeżeli $\text{Deg}_G^\nabla(f) \neq 0$, to $f(x) = 0$ dla pewnego $x \in D_f$.

Normalizacja.

$$\text{Deg}_G^\nabla(A + P_0) = [G/G] = 1_{\mathfrak{L}(G)},$$

gdzie $P_0: E_1 \rightarrow V_0 = \ker A$ jest rzutowaniem ortogonalnym.

Własność produktowa. Niech E i E' będą rzeczywistymi, hilbertowskimi reprezentacjami ortogonalnymi zwartej grupy Liego G . Jeżeli $f \in \mathcal{G}_G(E)$ i $f' \in \mathcal{G}_G(E')$, to $f \times f' \in \mathcal{G}_G(E \oplus E')$ oraz

$$\text{Deg}_G^\nabla(f \times f') = \text{Deg}_G^\nabla(f) \cdot \text{Deg}_G^\nabla(f'),$$

przy czym kropka oznacza tutaj mnożenie w $\mathfrak{L}(G)$.

Dowód.

Addytywność

Korzystając z addytywności stopnia \deg_G^∇ , natychmiast otrzymujemy

$$\begin{aligned} \text{Deg}_G^\nabla(f \sqcup f') &= m_n \cdot \text{deg}_G^\nabla(f_n \sqcup f'_n) = \\ &= m_n \cdot (\text{deg}_G^\nabla(f_n) + \text{deg}_G^\nabla(f'_n)) = \text{Deg}_G^\nabla(f) + \text{Deg}_G^\nabla(f'). \end{aligned}$$

Otopijna niezmienniczość

Niech odwzorowanie $h: \Lambda \subset I \times E_1 \rightarrow E$, dane wzorem $h(t, x) = Ax - F(t, x)$, będzie otopią. Wprowadzamy następującą notację:

$$\begin{aligned} \Lambda^t &= \{x \in E_1 \mid (t, x) \in \Lambda\}, & h^t: \Lambda^t &\rightarrow E, & h^t(x) &= h(t, x), \\ \Lambda_n &= \Lambda \cap (I \times V_n), & h_n: \Lambda_n &\rightarrow V_n, & h_n(t, x) &= Ax - P_n F(t, x), \\ \Lambda_n^t &= \Lambda^t \cap V_n, & h_n^t: \Lambda_n^t &\rightarrow V_n, & h_n^t(x) &= h_n(t, x). \end{aligned}$$

Podkreślamy, że na potrzeby tego podrozdziału parametr czasowy otopii t będzie zapisywany w indeksie górnym, a nie dolnym. Zapis $h^{-1}(0)$ nadal oznacza przeciwobraz zera i nie dochodzi tu do kolizji oznaczeń z odwzorowaniami h^t , gdyż $t \in I = [0, 1]$. Zgodnie z przyjętą notacją musimy pokazać, że $\text{Deg}_G^\nabla(h^0) = \text{Deg}_G^\nabla(h^1)$. Ponieważ $h^{-1}(0)$ jest zwarty, istnieje taki otwarty zbiór ograniczony $W \subset I \times E_1$, że

$$h^{-1}(0) \subset W \subset \text{cl } W \subset \Lambda.$$

Stąd dla $i = 0, 1$ otrzymujemy

$$(h^i)^{-1}(0) \subset W^i \subset \text{cl } W^i \subset \Lambda^i,$$

gdzie $W^i = \{x \in E_1 \mid (i, x) \in W\}$. Podobnie jak w Lemacie 4.7, istnieje taki $\epsilon > 0$, że $|h(z)| \geq 2\epsilon$ dla $z \in \partial W$. Z drugiej strony, analogicznie jak w Lemacie 4.8, istnieje takie N , że $|h(z) - \tilde{h}_n(z)| < \epsilon$ dla $z \in \text{cl } W$ oraz $n \geq N$, gdzie odwzorowanie $\tilde{h}_n: \Lambda \rightarrow E$ dane jest wzorem $\tilde{h}_n(t, x) = Ax - P_n F(t, x)$. Zatem $|h_n(z)| \geq \epsilon$ dla $z \in \partial W_n \subset \partial W$. Stąd wynika, że:

- $h_n \upharpoonright_{W_n}$ jest skończenie wymiarową, współzmienniczą, gradientową otopią,
- $\text{Deg}_G^\nabla(h^i) = m_n \cdot \text{deg}_G^\nabla(h_n^i \upharpoonright_{W_n^i})$.

Korzystając z otopijnej niezmienniczości deg_G^∇ , otrzymujemy ostatecznie

$$\text{Deg}_G^\nabla(h^0) = m_n \cdot \text{deg}_G^\nabla(h_n^0 \upharpoonright_{W_n^0}) = m_n \cdot \text{deg}_G^\nabla(h_n^1 \upharpoonright_{W_n^1}) = \text{Deg}_G^\nabla(h^1).$$

Wykrywanie zer

Jeżeli $f^{-1}(0) = \emptyset$, to f jest otworem z odwzorowaniem pustym. Zatem

$$\text{Deg}_G^\nabla(f) = \text{Deg}_G^\nabla(\emptyset) = 0.$$

Normalizacja

Zauważmy, że $A + P_0$ jest iniekcją oraz

$$\text{deg}_G^\nabla((A + P_0)_n) = \text{deg}_G^\nabla(\text{Id}|_{V_0}) \cdot \text{deg}_G^\nabla(A_1) \cdot \dots \cdot \text{deg}_G^\nabla(A_n) = m_n^{-1}$$

dla każdego $n \geq 1$. Stąd

$$\text{Deg}_G^\nabla(A + P_0) = m_n \cdot \text{deg}_G^\nabla((A + P_0)_n) = [G/G].$$

Własność produktowa

Niech $f(x) = Ax - F(x)$ i $f'(x) = A'x - F'(x)$. Zauważmy, że jeżeli $f_n \in \mathcal{G}_G(V_n)$ i $f'_n \in \mathcal{G}_G(V'_n)$, to na mocy Twierdzenia 4.4 $f_n \times f'_n \in \mathcal{G}_G(V_n \oplus V'_n)$ oraz

$$\text{deg}_G^\nabla(f_n \times f'_n) = \text{deg}_G^\nabla(f_n) \cdot \text{deg}_G^\nabla(f'_n).$$

Co więcej, dla odpowiednio dużych n

$$\text{Deg}_G^\nabla(f) = m_n \cdot \text{deg}_G^\nabla(f_n),$$

$$\text{Deg}_G^\nabla(f') = m'_n \cdot \text{deg}_G^\nabla(f'_n).$$

Ponieważ dla każdego $i \geq 1$

$$\text{deg}_G^\nabla((A \times A')_i) = \text{deg}_G^\nabla(A_i \times A'_i) = \text{deg}_G^\nabla(A_i) \cdot \text{deg}_G^\nabla(A'_i),$$

dostajemy

$$\begin{aligned} \text{Deg}_G^\nabla(f \times f') &= m_n \cdot m'_n \cdot \text{deg}_G^\nabla(f_n \times f'_n) = \\ &= m_n \cdot m'_n \cdot \text{deg}_G^\nabla(f_n) \cdot \text{deg}_G^\nabla(f'_n) = \text{Deg}_G^\nabla(f) \cdot \text{Deg}_G^\nabla(f'). \quad \square \end{aligned}$$

Rozdział 5

Schemat zastosowania nowego stopnia w układach hamiltonowskich

5.1 Wstęp historyczny

5.1.1 Sformułowanie problemu

Poszukiwanie rozwiązań okresowych oraz innych rodzajów orbit (homoklinicznych, heteroklinicznych itp.) w układach hamiltonowskich jest jednym z fundamentalnych problemów analizy nieliniowej. Klasyczne podejście opiera się na stosowaniu różnych wariantów zasady najmniejszego działania. Rozwiązania okresowe pojawiają się wówczas jako punkty krytyczne hamiltonowskiego funkcjonału działania, zdefiniowanego na odpowiedniej przestrzeni funkcji okresowych ([13, 61, 62]).

Ponieważ funkcjonał działania jest silnie nieokreślony (tzn. zbiór wartości własnych jego linearyzacji jest nieograniczony z dołu oraz z góry), nie jest możliwe stosowanie bezpośrednich metod rachunku wariacyjnego. Z tego powodu do celów badania istnienia i krotności rozwiązań okresowych układów hamiltonowskich rozwinięto bardziej wyrafinowane metody wariacyjne oraz topologiczne. Najważniejsze z nich to dualna zasada najmniejszego działania ([21, 22, 33, 34]), uogólnione wersje twierdzenia o przełęczy górskiej ([23, 35, 66–69]), metoda stopnia topologicznego, kategoria Lusternika-Sznirelmana ([58, 59, 83, 84]), teoria Morse'a ([1, 54–57, 63, 82]) oraz indeks Conleya ([46, 49, 50]).

Na początku lat dziewięćdziesiątych ukształtowała się nowa teoria, która okazała się wysoce skuteczna przy rozwiązywaniu wielu trudnych i złożonych problemów analizy nieliniowej. Mowa o teorii gradientowego stopnia współzmienniczego stworzonej i rozwiniętej przez Kazimierza Gębę i Sławomira Rybickiego ([8, 32, 37, 73]). Od po-

nad dwudziestu lat S. Rybicki oraz jego współpracownicy ([26, 43, 44, 74–76]) z dużym powodzeniem stosują zarówno skończenie, jak i nieskończenie wymiarowe wersje gradientowego stopnia współmienniczego przy badaniu różnego rodzaju równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych, w tym również układów hamiltonowskich.

Główną motywacją do zdefiniowania stopnia Deg_G^∇ w Rozdziale 4 były dwie następujące idee. Po pierwsze, rozwiązania okresowe układu hamiltonowskiego są punktami krytycznymi pewnego funkcjonału działania. Po drugie, gradientowa wersja stopnia współmienniczego jest w stanie wykrywać tego typu punkty krytyczne. Mówiąc ściślej, nasze podejście opiera się na następujących obserwacjach:

- a) rozwiązania okresowe układu hamiltonowskiego $\dot{z} = \mathcal{J}\nabla H(z)$ są miejscami zerowymi nieliniowego operatora $f(z) := -\mathcal{J}\dot{z} - \nabla H(z)$, zdefiniowanego w odpowiedniej przestrzeni Sobolewa funkcji okresowych,
- b) nieliniowy operator f jest z definicji współmienniczym, gradientowym zaburzeniem współmienniczego, nieograniczonego operatora samosprężonego z czysto dyskretnym widmem,
- c) w przypadku gdy zaburzenie f spełnia założenia z (b) oraz zbiór jego miejsc zerowych jest zwarty, nasz stopień $\text{Deg}_{S^1}^\nabla(f)$ o wartościach w pierścieniu Eulera-tom Diecka $\mathfrak{U}(S^1)$ jest dobrze określony,
- d) jeżeli $\text{Deg}_{S^1}^\nabla(f)$ jest różny od zera, to f posiada miejsce zerowe (jest to jedna z własności stopnia), a w konsekwencji istnieje rozwiązanie okresowe rozważanego równania $\dot{z} = \mathcal{J}\nabla H(z)$.

5.1.2 Historia problemu

Sformułowanie ogólnej teorii okresowych rozwiązań układów hamiltonowskich oraz stosowanie metod wariacyjnych w tej dziedzinie to jedno z wielkich matematycznych osiągnięć Poincarégo. W szczególności, na przełomie dziewiętnastego i dwudziestego wieku używał on zasady najmniejszego działania Jacobiego-Maupertuis przy badaniu zamkniętych orbit układów zachowawczych.

Następnie w pierwszej połowie dwudziestego wieku Birkhoff ([15–17]), Lusternik i Sznirelman, Morse i inni stosowali tę zasadę wraz z argumentami topologicznymi, aby znajdować geodezyjne i rozwiązania okresowe w różnego rodzaju szczególnych przypadkach. Ogólny postęp w kierunku szerszego, globalnego podejścia wariacyjnego

do poszukiwania rozwiązań okresowych układów hamiltonowskich w tamtym czasie był jednak dość niewielki.

Za wyjątek można uznać prace Seiferta [78, 79], który wykorzystując zasadę najmniejszego działania w wersji Jacobiego oraz metody geometrii różniczkowej, wykazał w 1948 roku istnienie nietrywialnego rozwiązania okresowego w klasycznym przypadku gdzie hamiltonian jest sumą dwóch wyrazów, odpowiadających energii kinetycznej i potencjalnej.

Ten wynik został uogólniony przez Weinsteina [88] 30 lat później. Stosując podobne metody, wykazał on, że jeżeli układ jest autonomiczny i pewna poziomica hamiltonianu ogranicza zwarty obszar wypukły, to istnieje orbita zamknięta będąca podzbiorem tej poziomicy.

Również pod koniec lat 70. Clarke i Ekeland sformułowali i rozwinęli dualną zasadę najmniejszego działania, zastępując działanie hamiltonowskie działaniem dualnym. Tak zwana dualność Clarke'a była jedną z prób przezwyciężenia trudności, które napotkał Birkhoff przy stosowaniu zasady najmniejszego działania do układów hamiltonowskich.

Innym wielkim przełomem był artykuł Rabinowitza [66] z roku 1978, w którym wykazał istnienie nietrywialnych rozwiązań okresowych układu hamiltonowskiego pierwszego rzędu, wykorzystując do tego celu nową metodę wariacyjną nazywaną twierdzeniem o przełęczy górskiej. Pierwszy z wyników przedstawionych w pracy Rabinowitza dotyczył istnienia rozwiązań okresowych na poziomicy hamiltonianu przy założeniu, że jest ona zbiorem gwiazdzistym. Drugi, przy dwóch założeniach brzegowych na hamiltonian (dla argumentów odpowiednio bliskich zera oraz dla tych odpowiednio odległych od zera), gwarantował istnienie nietrywialnych rozwiązań o dowolnym okresie dodatnim.

Praca Rabinowitza zainspirowała ogromną liczbę artykułów dotyczących metod wariacyjnych dla funkcjonałów silnie nieokreślonych oraz ich zastosowań do układów hamiltonowskich. Wiele ze stosowanych tam metod pozwala wykrywać nie tylko rozwiązania okresowe, lecz również orbity heterokliniczne oraz homokliniczne, a także badać złożoność układów dynamicznych ([2, 3, 30, 51, 85–87, 89]).

5.2 Wprowadzenie matematyczne

5.2.1 Słaba pochodna i absolutna ciągłość

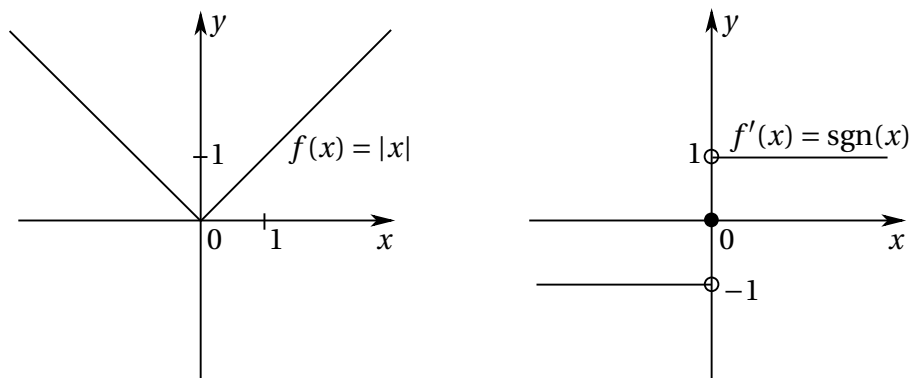
Definicja 5.1. Niech $u, v \in L^1([0, 2\pi], \mathbb{R}^m) =: L^1([0, 2\pi])$ oraz niech $k \in \mathbb{N}$. Mówimy, że v jest k -tą słabą pochodną funkcji u , jeśli

$$\int_0^{2\pi} u(x) \cdot \varphi^{(k)}(x) dx = (-1)^k \int_0^{2\pi} v(x) \cdot \varphi(x) dx$$

dla wszystkich takich $\varphi \in C^\infty([0, 2\pi], \mathbb{R}^m)$, że $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 0$.

Uwaga 5.2. Ponieważ funkcja u składa się z m współrzędnych funkcyjnych, tzn. $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x))$, powyższa równość całkowa stanowi faktycznie układ m równości. Funkcje φ z powyższej definicji nazywamy *próbny*.

Uwaga 5.3. Tak zdefiniowana słaba pochodna jest jednoznacznie wyznaczonym elementem przestrzeni $L^1([0, 2\pi])$. Stosujemy taką samą notację jak przy zwykłej pochodnej, to znaczy k -tą słabą pochodną oznaczamy $v = u^{(k)}$.



Rysunek 5.1: Mimo że funkcja $f(x) = |x|$ nie jest różniczkowalna w zerze, posiada ona słabą pochodną $f'(x) = \text{sgn}(x)$.

Uwaga 5.4. Zachodzą następujące związki między zwykłą a słabą pochodną:

- jeżeli funkcja $f^{(n)}$ jest zwykłą n -tą pochodną funkcji f , to jest ona również słabą n -tą pochodną tej funkcji,
- jeżeli $n \geq 2$ i dana funkcja f posiada n -tą słabą pochodną, to posiada zwykłe pochodne do rzędu $n - 1$ włącznie.

Przypomnijmy definicję funkcji absolutnie ciągłej.

Definicja 5.5. Jeżeli istnieje taka funkcja całkowalna v , że

$$u(x) = u(0) + \int_0^x v(y) dy$$

dla $x \in [0, 2\pi]$, to mówimy, że u jest *absolutnie ciągła* w tym przedziale. Piszemy wtedy $v = u'$, gdyż w istocie v jest słabą pochodną funkcji u .

Zbiór funkcji absolutnie ciągłych z przedziału $[0, 2\pi]$ do \mathbb{R}^m będziemy oznaczać $AC([0, 2\pi], \mathbb{R}^m)$.

5.2.2 Przestrzenie Sobolewa funkcji okresowych

W dalszych rozważaniach będziemy zajmować się funkcjami 2π -okresowymi z \mathbb{R} do \mathbb{R}^m . Z tego powodu zastępujemy dziedzinę $[0, 2\pi]$ okręgiem jednostkowym S^1 , co odpowiada ograniczeniu się do pojedynczych okresów pochodzących od takich funkcji.

Definicja 5.6. Niech $k \geq 0$ oraz $i \geq 1$. Przestrzeń

$$W^{k,p}(S^1, \mathbb{R}^m) := \{u \in L^p(S^1, \mathbb{R}^m) \mid \forall i \leq k \text{ } u^{(i)} \text{ istnieje oraz } u^{(i)} \in L^p(S^1, \mathbb{R}^m)\}$$

z normą

$$\|u\|_{W^{k,p}} := \left(\sum_{i \leq k} \|u^{(i)}\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

nazywamy przestrzenią Sobolewa.

Uwaga 5.7. Przestrzenie $W^{k,p}(S^1, \mathbb{R}^m)$ są przestrzeniami Banacha.

Definicja 5.8. Niech $k \geq 0$. Będziemy stosować oznaczenie

$$H^k(S^1, \mathbb{R}^m) := W^{k,2}(S^1, \mathbb{R}^m).$$

Taka przestrzeń jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle u, v \rangle_{H^k} := \sum_{i \leq k} \langle u^{(i)}, v^{(i)} \rangle_{L^2}.$$

Twierdzenie 5.9. Dla $k = 1$, zachodzą następujące związki pomiędzy przestrzeniami Sobolewa, a zbiorem funkcji absolutnie ciągłych:

$$W^{1,p}(S^1, \mathbb{R}^m) = \{f \in AC(S^1, \mathbb{R}^m) \mid f' \in L^p(S^1, \mathbb{R}^m)\},$$

$$W^{1,1}(S^1, \mathbb{R}^m) = AC(S^1, \mathbb{R}^m),$$

$$H^1(S^1, \mathbb{R}^m) = \{f \in AC(S^1, \mathbb{R}^m) \mid f' \in L^2(S^1, \mathbb{R}^m)\}.$$

Uwaga 5.10. Zauważmy, że w pierwszej i trzeciej równości nie musimy zakładać istnienia słabej pochodnej, ponieważ funkcje absolutnie ciągłe zawsze ją posiadają. Zakładamy tylko, że słaba pochodna jest elementem odpowiedniej przestrzeni. Dla $k > 1$ zachodzą bardziej skomplikowane zależności, ponieważ funkcje absolutnie ciągłe nie zawsze mają słabe pochodne wyższych rzędów.

Stwierdzenie 5.11. *Istnieje $c > 0$ takie, że jeśli $u \in W^{1,p}(S^1, \mathbb{R}^m)$, to*

$$\|u\|_\infty \leq c \|u\|_{W^{1,p}}.$$

Co więcej, jeśli $\int_0^{2\pi} u(t) dt = 0$, to

$$\|u\|_\infty \leq c \|u'\|_{L^p}.$$

Zachodzą również następujące zawierania

$$H^1(S^1, \mathbb{R}^m) \subset C(S^1, \mathbb{R}^m) \subset L^2(S^1, \mathbb{R}^m)$$

oraz szacowania

$$\|u\|_{L^2} \leq c \|u\|_\infty \leq C \|u\|_{H^1}$$

dla pewnych $c, C > 0$.

Stwierdzenie 5.12. *Włożenie $H^{k+1}(S^1, \mathbb{R}^m) \subset H^k(S^1, \mathbb{R}^m)$ jest zwarte. W szczególności tę własność ma włożenie $H^1(S^1, \mathbb{R}^m) \subset H^0(S^1, \mathbb{R}^m) = L^2(S^1, \mathbb{R}^m)$. Zależność ta jest konsekwencją twierdzenia Rellicha-Kondraszowa (patrz na przykład [53, Uw. 0.3.5]).*

5.3 Własności operatora $Az := -\mathcal{J}\dot{z}$

Niech $E_1 = H^1(S^1, \mathbb{R}^{2n})$, $E = L^2(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ oraz

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Uwaga 5.13. Przypomnijmy, że w E_1 iloczyn skalarny ma postać

$$\langle z | w \rangle_{E_1} := \int_0^{2\pi} (\langle \dot{z}(t) | \dot{w}(t) \rangle_{\mathbb{R}^{2n}} + \langle z(t) | w(t) \rangle_{\mathbb{R}^{2n}}) dt,$$

podczas gdy E posiada iloczyn skalarny

$$\langle z | w \rangle_E := \int_0^{2\pi} \langle z(t) | w(t) \rangle_{\mathbb{R}^{2n}} dt.$$

Rozważmy operator liniowy $A: E_1 \rightarrow E$ dany wzorem

$$Az := -\mathcal{J}z.$$

Uwaga 5.14. Macierz \mathcal{J} jest antysymetryczna, tj. dla $z, w \in \mathbb{R}^{2n}$ zachodzi wzór

$$\langle \mathcal{J}z | w \rangle_{\mathbb{R}^{2n}} = -\langle z | \mathcal{J}w \rangle_{\mathbb{R}^{2n}}.$$

W szczególności dla dowolnych elementów $z, w \in E$ (po utożsamieniu tych elementów z ich wybranymi funkcyjnymi reprezentantami) i każdego $\tau \in S^1$ prawdziwa jest równość

$$\langle \mathcal{J}z(\tau) | w(\tau) \rangle_{\mathbb{R}^{2n}} = -\langle z(\tau) | \mathcal{J}w(\tau) \rangle_{\mathbb{R}^{2n}}.$$

Całkując ją obustronnie po τ na zbiorze S^1 otrzymujemy

$$\langle \mathcal{J}z | w \rangle_E = -\langle z | \mathcal{J}w \rangle_E.$$

Twierdzenie 5.15. *Operator A jest nieograniczonym operatorem samosprężonym z czysto dyskretnym widmem.*

Dowód. Zaczynamy od pokazania nieograniczoności operatora A .

NIEOGRANICZONOŚĆ. Niech $\{e_1, e_2, \dots, e_{2n}\}$ będzie standardową bazą ortonormalną w \mathbb{R}^{2n} oraz niech $f_k(t) = \sin(kt) \cdot e_1$. Wtedy

$$Af_k = -k \cos(kt) \cdot e_{2n}.$$

Stąd

$$\|f_k\|_E = \left(\int_0^{2\pi} \sin^2(kt) dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi} \quad \text{oraz} \quad \|Af_k\|_E = k\sqrt{\pi}.$$

Gdyby operator A był ograniczony, to istniałoby $C \geq 0$ takie, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$

$$k\sqrt{\pi} = \|Af_k\|_E \leq C \cdot \|f_k\|_E = C\sqrt{\pi},$$

co prowadzi do sprzeczności.

SAMOSPRĘŻONOŚĆ. Na początek pokażemy, że operator $A: E_1 \rightarrow E$ jest symetryczny, tj. $\langle Az | w \rangle_E = \langle z | Aw \rangle_E$ dla każdego $z, w \in E_1$. Niech $z = (z', z'')$ i $w = (w', w'')$ oznaczają przedstawienia zgodne z rozkładem $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Mamy

$$L = \langle Az | w \rangle_E = \langle (z'', -z') | (w', w'') \rangle_E = \int_0^{2\pi} \langle z'' | w' \rangle_{\mathbb{R}^n} dx - \int_0^{2\pi} \langle z' | w'' \rangle_{\mathbb{R}^n} dx$$

oraz

$$P = \langle z | Aw \rangle_E = \langle (z', z'') | (\dot{w}'', -\dot{w}') \rangle_E = \int_0^{2\pi} \langle z' | \dot{w}'' \rangle_{\mathbb{R}^n} dx - \int_0^{2\pi} \langle z'' | \dot{w}' \rangle_{\mathbb{R}^n} dx.$$

Z okresowości z i w oraz ze wzoru na całkowanie przez części otrzymujemy $L = P$.
Zatem operator A jest symetryczny oraz $D(A^*) \supset E_1$.

Jeżeli $w \in D(A^*)$, to istnieje $u \in E$ takie, że

$$\langle w | -\mathcal{J}\dot{z} \rangle_E = \langle u | z \rangle_E$$

dla wszystkich $z \in E_1$. Ponieważ $C^\infty(S^1) \subset E_1$, przyjmując $z = \mathcal{J}\phi$ mamy

$$\langle w | -\mathcal{J}^2\dot{\phi} \rangle_E = \langle u | \mathcal{J}\phi \rangle_E.$$

Stąd i z Uwagi 5.14 otrzymujemy

$$\langle w | \dot{\phi} \rangle_E = \langle -\mathcal{J}u | \phi \rangle_E$$

dla wszystkich $\phi \in C^\infty(S^1)$, co oznacza, że $w \in E_1$ oraz $\dot{w} = -\mathcal{J}u$.

Zatem $D(A^*) \subset E$, czyli $D(A^*) = E_1 = D(A)$. To kończy dowód samosprężoności operatora A .

CZYSTO DYSKRETNE WIDMO. Zaczynamy od wprowadzenia następujących oznaczeń.

- $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ jest iloczynem skalarnym w E_1 o wzorze $\langle z | w \rangle_A = \langle z | w \rangle_E + \langle Az | Aw \rangle_E$,
- E_1 z tym iloczynem skalarnym jest przestrzenią Hilberta, którą oznaczamy E_A ,
- i_A oznacza włożenie $E_A \hookrightarrow E$.

Korzystając z obserwacji poczynionej w Uwadze 5.14,

$$\begin{aligned} \langle z | w \rangle_A &= \langle z | w \rangle_E + \langle Az | Aw \rangle_E = \langle z | w \rangle_E + \langle -\mathcal{J}\dot{z} | -\mathcal{J}\dot{w} \rangle_E = \\ &= \langle z | w \rangle_E + \langle \dot{z} | -\mathcal{J}^2\dot{w} \rangle_E = \langle z | w \rangle_E + \langle \dot{z} | \dot{w} \rangle_E, \end{aligned}$$

czyli $\langle z | w \rangle_A$ pokrywa się ze zwykłym iloczynem skalarnym w E_1 .

Przytaczamy dwa twierdzenia, z których wynika, że operator A posiada czysto dyskretne widmo.

1. Jeżeli włożenie $i_A: E_A \rightarrow E$ jest zwarte, to operator A ma czysto dyskretne widmo.
2. (okresowa wersja tw. Rellicha-Kondraszowa) Włożenie $H^1(S^1, \mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^2(S^1, \mathbb{R}^m)$ jest zwarte, tzn. z każdego ograniczonego ciągu w $H^1(S^1, \mathbb{R}^m)$ można wybrać podciąg zbieżny w $L^2(S^1, \mathbb{R}^m)$.

Zauważmy, że warunek $Az = \lambda z$ jest równoważny równaniu $\dot{z} = \lambda \mathcal{J} z$, którego rozwiązania mają postać

$$z(t) = e^{\lambda t \mathcal{J}} z_0.$$

Przypomnijmy, że

$$e^{\lambda t \mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \cos(\lambda t) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -\sin(\lambda t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cos(\lambda t) & -\sin(\lambda t) & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \sin(\lambda t) & \cos(\lambda t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(\lambda t) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cos(\lambda t) \end{bmatrix}.$$

Rozwiązania będą 2π -okresowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Stąd widmo punktowe operatora A , czyli zbiór jego wartości własnych, jest równe $\sigma_p(A) = \mathbb{Z}$. Zatem również całe widmo $\sigma(A) = \mathbb{Z}$.

DOMKNIĘTOŚĆ. Przypomnijmy, że operator $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ nazywamy *domkniętym*, jeżeli dla każdego ciągu $\{u_n\} \subset D(A)$ takiego, że $u_n \rightarrow u$ i $Au_n \rightarrow v$ mamy $u \in D(A)$ oraz $Au = v$. Zatem operatory ograniczone (ciągłe) są domknięte, ale niekoniecznie na odwrót.

Pokażemy, że operator $A = -\mathcal{J} \frac{d}{dt}: E \rightarrow L^2(S^1)$ jest domknięty.

Założmy, że $u_n \rightarrow u$ i $Au_n \rightarrow v$ w $L^2(S^1)$. Wtedy dla każdej funkcji testowej ϕ mamy

$$\begin{aligned} \langle v | \phi \rangle_{L^2} &= \lim \langle -\mathcal{J} \dot{u}_n | \phi \rangle_{L^2} = \lim \langle \dot{u}_n | \mathcal{J} \phi \rangle_{L^2} = \\ &= -\lim \langle u_n | \mathcal{J} \dot{\phi} \rangle_{L^2} = \langle u | \mathcal{J} \dot{\phi} \rangle_{L^2} = -\langle -\mathcal{J} u | \dot{\phi} \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Stąd na mocy definicji słabej pochodnej $v \in E$ oraz $v = -\mathcal{J} \dot{u}$. □

5.4 Objaśnienie schematu aproksymacyjnego

Przypomnijmy, że zastosowanie schematu aproksymacyjnego z podrozdziału 4.2.1 wymaga skonstruowania odpowiedniej filtracji rozpatrywanej przestrzeni Hilberta. W tym celu zdefiniujemy pewną bazę Hilberta w $E_1 = H^1(S^1)$. Następnie wyróżnimy pewne podprzestrzenie E_1 i opiszemy działanie S^1 na tych podprzestrzeniach oraz na całym E_1 . Wspomniana baza, rozkład na podprzestrzenie oraz działanie S^1 mają źródło w pracy Rabinowitza [66]. Pokażemy również, jak przenieść to rozumowanie na przypadek przestrzeni $E = L^2(S^1)$.

Tak jak w poprzednim podrozdziale, przez $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ oznaczamy standardową bazę w \mathbb{R}^{2n} . Niech

$$V_m := \left\{ \sum_{k=1}^{2n} \left(\sum_{j=0}^m a_{jk} \cos(jt) + b_{jk} \sin(jt) \right) e_k \mid a_{jk}, b_{jk} \in \mathbb{R} \right\},$$

czyli

$$V_m = \text{span} \{ \cos(jt)e_k, \sin(jt)e_k \mid 0 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq 2n \}.$$

Wyróżnijmy następujące elementy przestrzeni V_m :

$$\varphi_{jk} = \sin(jt)e_k - \cos(jt)e_{k+n},$$

$$\psi_{jk} = \cos(jt)e_k + \sin(jt)e_{k+n},$$

$$\theta_{jk} = \sin(jt)e_k + \cos(jt)e_{k+n},$$

$$\zeta_{jk} = \cos(jt)e_k - \sin(jt)e_{k+n}$$

dla $0 \leq j \leq m$ i $1 \leq k \leq n$.

Te elementy rozpinają przestrzeń V_m , tj.

$$V_m = \text{span} \{ \varphi_{jk}, \psi_{jk}, \theta_{jk}, \zeta_{jk} \mid 0 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n \}.$$

Ponadto

- $\varphi_{0k} = -\theta_{0k}$ oraz $\psi_{0k} = \zeta_{0k}$,
- $\varphi_{jk}, \psi_{jk}, \theta_{jk}, \zeta_{jk}$ są wektorami własnymi operatora A , a ściślej

$$A\varphi_{jk} = j\varphi_{jk},$$

$$A\psi_{jk} = j\psi_{jk},$$

$$A\theta_{jk} = -j\theta_{jk},$$

$$A\zeta_{jk} = -j\zeta_{jk}.$$

Dla ustalonego $1 \leq j \leq m$ zbiór

$$B_j = \{ \varphi_{jk}, \psi_{jk}, \theta_{jk}, \zeta_{jk} \mid 1 \leq k \leq n \}$$

jest L^2 -ortogonalny, czyli

$$\int_0^{2\pi} \langle z \mid w \rangle_{\mathbb{R}^{2n}} d\tau = 0$$

dla różnych elementów $z, w \in B_j$. Zatem oczywiście ten zbiór jest również liniowo niezależny. Co więcej, zbiór B_j jest A -ortogonalny, tj.

$$\int_0^{2\pi} \langle z | Aw \rangle_{\mathbb{R}^{2n}} d\tau = 0. \quad (5.1)$$

Dla $z \in E_1 = H^1(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ niech $\mathcal{P}_1 z = (z_1, \dots, z_n)$ i $\mathcal{P}_2 z = (z_{n+1}, \dots, z_{2n})$. Po uwzględnieniu wzoru na całkowanie przez części równość 5.1 przyjmuje postać

$$\int_0^{2\pi} [\langle \mathcal{P}_1 z | \mathcal{P}_2 \dot{w} \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \mathcal{P}_1 w | \mathcal{P}_2 \dot{z} \rangle_{\mathbb{R}^n}] d\tau = 0.$$

Zdefiniujmy dodatkowo przestrzenie

$$\begin{aligned} V_+^m &= \text{span} \{\varphi_{mk}, \psi_{mk} \mid 1 \leq k \leq n\}, \\ V_-^m &= \text{span} \{\theta_{mk}, \zeta_{mk} \mid 1 \leq k \leq n\}, \\ V^m &= V_+^m \oplus V_-^m. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

- $V_0 = V^0$ oraz $\dim V^0 = \dim V_+^m = \dim V_-^m = 2n$,
- V_+^m jest podprzestrzenią własną operatora A odpowiadającą wartości własnej $\lambda = m$,
- V_-^m jest podprzestrzenią własną operatora A odpowiadającą wartości własnej $\lambda = -m$,
- $V_m = V^0 \oplus V_+^1 \oplus V_-^1 \oplus \dots \oplus V_+^m \oplus V_-^m = V^0 \oplus V^1 \oplus \dots \oplus V^m$.

Z ostatniej równości wynika, że $\dim V_m = (2m + 1) \cdot 2n$.

Rozważmy operator przesunięcia (tzw. *time-shift*) w przestrzeni E_1 . Dla $z(\tau) \in E_1$, określamy go w następujący sposób:

$$L_t z := z(\tau + t) \quad \text{dla } t \in [0, 2\pi].$$

Przypominamy, że $S^1 = [0, 2\pi] / \{0, 2\pi\}$.

Stwierdzenie 5.16. *Jeżeli $z \in V_+^j = \text{span} \{\varphi_{jk}, \psi_{jk}\}$, to*

$$L_t z \in V_+^j \quad \text{dla wszystkich } t \in [0, 2\pi].$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że

$$\begin{aligned} L_t(\sin(j\tau)e_k) &= \sin(j(\tau+t))e_k = \cos(jt)\sin(j\tau)e_k + \sin(jt)\cos(j\tau)e_k, \\ L_t(\cos(j\tau)e_{k+n}) &= \cos(j(\tau+t))e_{k+n} = \cos(jt)\cos(j\tau)e_{k+n} - \sin(jt)\sin(j\tau)e_{k+n}. \end{aligned}$$

W rezultacie

$$L_t\varphi_{jk} = \cos(jt)\varphi_{jk} + \sin(jt)\psi_{jk} \in V_+^j.$$

Podobnie można pokazać, że

$$L_t\psi_{jk} = -\sin(jt)\varphi_{jk} + \cos(jt)\psi_{jk} \in V_+^j.$$

Stąd jeżeli $z \in V_+^j$, czyli

$$z = \sum_{k=1}^{2n} (a_{jk}\varphi_{jk} + b_{jk}\psi_{jk}),$$

to

$$L_t z = \sum_{k=1}^{2n} (a_{jk}L_t\varphi_{jk} + b_{jk}L_t\psi_{jk}) \in V_+^j. \quad \square$$

Uwaga 5.17. Zauważmy, że przy ustalonym k , operator L_t działa jak obrót o kąt jt w płaszczyźnie $\text{span}\{\varphi_{jk}, \psi_{jk}\}$, tzn.

$$L_t \begin{pmatrix} \varphi_{jk} \\ \psi_{jk} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(jt) & \sin(jt) \\ -\sin(jt) & \cos(jt) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{jk} \\ \psi_{jk} \end{pmatrix}.$$

Wniosek 5.18. Z powyższego faktu wynika, że także przestrzenie V_m są niezmiennicze ze względu na działanie $\{L_t \mid t \in [0, 2\pi]\}$.

Translacje $\{L_t \mid t \in [0, 2\pi]\}$ indukują izometryczne (ortogonalne) działanie grupy S^1 na przestrzeni E_1 . Mówiąc ściślej, można przedstawić $z \in E_1$ jako

$$z(\tau) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j \exp(ij\tau) \equiv \phi(e^{i\tau}),$$

gdzie $\gamma_j \in \mathbb{C}^{2n}$ oraz $\gamma_{-j} = \bar{\gamma}_j$.

Wtedy działanie S^1 na E_1 odpowiadające powyższym translacjom jest dane wzorem

$$(\rho\phi)(e^{i\tau}) = \phi(\rho e^{i\tau}) \quad \text{dla } \rho \in S^1.$$

Uwaga 5.19. Zauważmy, że działanie

$$L_t z \equiv z(\tau+t) \quad \text{dla } t \in [0, 2\pi]$$

lub równoważnie

$$(\rho\phi)(e^{i\tau}) = \phi(\rho e^{i\tau}) \quad \text{dla } \rho \in S^1$$

można rozszerzyć na całą przestrzeń $E = L^2(S^1)$.

Mianowicie mając element przestrzeni E , pierwszy wzór można przyłożyć do dowolnej funkcji będącej jego reprezentantem. Łatwo przy tym zauważyć, że jeśli dwie funkcje są równe prawie wszędzie (czyli wyznaczają w E ten sam element), to ich translacje za pomocą L_t również mają tę własność. Stąd działanie $\{L_t \mid t \in [0, 2\pi]\}$ na E jest dobrze określone.

Z kolei drugi wzór można stosować do przedstawienia elementu $z \in E$ w postaci szeregu Fouriera. Tu też łatwo widać, że $\rho \in S^1$ przekształca izometrycznie E na siebie.

Poprzedni podrozdział poświęcony był własnościom operatora $A: E_1 \rightarrow E$, danego wzorem $Az := -\mathcal{J}z$. Teraz pokażemy, że jest on również współzmienniczy, tj.

$$A(\rho z) = \rho(Az) \quad \text{dla } \rho \in S^1.$$

Skorzystamy z przedstawienia elementów przestrzeni Sobolewa w postaci szeregów Fouriera. Niech $\rho = e^{it}$ oraz

$$z = \sum_j \gamma_j e^{ij\tau} \in E_1. \quad (\gamma_j \in \mathbb{C}^n, \gamma_{-j} = \bar{\gamma}_j)$$

Wtedy

$$\begin{aligned} z &= \sum_{j \neq 0} ij\gamma_j e^{ij\tau}, \\ Az &= -\sum_{j \neq 0} ij\mathcal{J}\gamma_j e^{ij\tau}, \\ \rho z &= \sum_j e^{ijt}\gamma_j e^{ij\tau}. \end{aligned}$$

Zatem

$$A(\rho z) = -\sum_{j \neq 0} ije^{ijt}\mathcal{J}\gamma_j e^{ij\tau} = \rho(Az).$$

Alternatywnie można by skorzystać z faktu, że funkcje gładkie są gęste w przestrzeni Sobolewa i z obserwacji, że dla takich funkcji operator przesunięcia komutuje z operatorem różniczkowania, tzn.

$$\frac{d}{dt}(L_t z) = L_t \left(\frac{dz}{dt} \right).$$

5.5 Lemat o gradiencie hilbertowskim (subliniowość)

Zaczynamy od następującej obserwacji. Niech $(V_1, \|\cdot\|_{V_1})$, $(V_2, \|\cdot\|_{V_2})$ oraz $(W, \|\cdot\|_W)$ będą takimi przestrzeniami Banacha, że

$$V_2 \subset V_1 \quad \text{oraz} \quad \|x\|_{V_1} \leq \|x\|_{V_2} \quad \text{dla } x \in V_2.$$

Rozważmy odwzorowanie $f_1: V_1 \rightarrow W$. Niech $f_2 = f_1|_{V_2}: V_2 \rightarrow W$.

Stwierdzenie 5.20. *Jeżeli A jest pochodną Frécheta funkcji f_1 w punkcie $x \in V_2$, to $A|_{V_2}$ jest pochodną Frécheta funkcji f_2 w punkcie x .*

Dowód. Rozważmy $x, h \in V_2$. Zachodzi nierówność $\|h\|_{V_1} \leq \|h\|_{V_2}$, zatem

$$\frac{\|f_2(x+h) - f_2(x) - Ah\|_W}{\|h\|_{V_2}} \leq \frac{\|f_1(x+h) - f_1(x) - Ah\|_W}{\|h\|_{V_1}}.$$

Stąd jeżeli $\|h\|_{V_2} \rightarrow 0$, to $\|h\|_{V_1} \rightarrow 0$. Ponadto na mocy założenia istnienia pochodnej Frécheta funkcji f_1

$$\lim_{\|h\|_{V_1} \rightarrow 0} \frac{\|f_1(x+h) - f_1(x) - Ah\|_W}{\|h\|_{V_1}} = 0,$$

czyli także

$$\lim_{\|h\|_{V_2} \rightarrow 0} \frac{\|f_2(x+h) - f_2(x) - Ah\|_W}{\|h\|_{V_2}} = 0,$$

co należało pokazać. □

Uwaga 5.21. Powyższe stwierdzenie będziemy stosować do przypadku, w którym $V_1 = W = L_2(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ oraz $V_2 = H^1(S^1, \mathbb{R}^{2n})$.

Warunkiem zastosowania konstrukcji stopnia topologicznego przedstawionej w pracy [10] jest zagwarantowanie, że funkcjonał $\Phi: L^2(S^1, \mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathbb{R}$ dany wzorem

$$\Phi(z) := \int_0^{2\pi} H(z(t)) dt$$

jest dobrze określony i różniczkowalny w sposób ciągły. Niezbędne są dodatkowe założenia na funkcję $H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, których zabrakło w naszej pracy [10]. Stanowi to pewną lukę, którą postaramy się teraz uzupełnić. W tym celu formułujemy następujący rezultat.

Stwierdzenie 5.22. *Załóżmy, że*

- $H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^1 ,
- ∇H jest subliniowy tzn. $|\nabla H(z)| \leq c + d|z|$ dla pewnych $c, d \in \mathbb{R}$.

Wtedy $\Phi: L^2(S^1, \mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem

$$\Phi(z) := \int_0^{2\pi} H(z(t)) dt$$

jest dobrze określonym funkcjonałem klasy C^1 (w normie L^2) oraz

$$\Phi'(z)h = \int_0^{2\pi} \langle \nabla H(z(t)) | h(t) \rangle_{\mathbb{R}^{2n}} dt = \langle \nabla H(z) | h \rangle_{L^2}.$$

Dowód. Funkcjonał $\Phi: L^2(S^1, \mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathbb{R}$ jest złożeniem dwóch operatorów:

1. nieliniowego operatora Niemyckiego (podstawienia) $N_H: L^2(S^1, \mathbb{R}^{2n}) \rightarrow L^1(S^1, \mathbb{R})$ danego wzorem $N_H(z) = H(z)$,
2. liniowego operatora całki z $L^1(S^1, \mathbb{R})$ do \mathbb{R} .

Na mocy twierdzenia Krasnosielskiego oraz wniosków z tego twierdzenia (patrz [53], Tw. 1.2.2) operator Niemyckiego N_H jest przy naszych założeniach dobrze określony i różniczkowalny w sensie Frécheta w sposób ciągły, a jego pochodna wynosi

$$N'_H(z)h = u, \text{ gdzie } u(t) = H'(z(t))(h(t)) = \langle \nabla H(z(t)) | h(t) \rangle_{\mathbb{R}^{2n}} \text{ p.w.}$$

Z kolei operator całki jako liniowy też jest klasy C^1 , a jego pochodna jest mu równa. Teżę stwierdzenia otrzymujemy z reguły różniczkowania funkcji złożonej w przestrzeniach Banacha. \square

Wniosek 5.23. *Zatem przy założeniach Stwierdzenia 5.22 i zgodnie z definicją gradientu w przestrzeni Hilberta otrzymujemy*

$$\nabla_{L^2} \Phi(z) = \nabla_{\mathbb{R}^{2n}} H(z).$$

Ponadto nieliniowy operator $\nabla_{L^2} \Phi: L^2(S^1) \rightarrow L^2(S^1)$ jest ciągły oraz $\nabla_{L^2} \Phi: H^1(S^1) \rightarrow L^2(S^1)$ jest zwarte, bo włożenie $\iota: H^1(S^1) \rightarrow L^2(S^1)$ jest zwarte.

5.6 Zamiana problemu różniczkowego na hilbertowski

Warto podkreślić, że ten podrozdział nie przedstawia rzeczywistego zastosowania opisaną teorię, lecz jedynie przykładową sytuację, w której nasz stopień może być przydatny.

Poszukiwanie okresowych rozwiązań układów hamiltonowskich jest jednym z podstawowych problemów analizy nieliniowej (odsyłamy na przykład do [14, 66, 70, 88]). Rozpatrzmy hamiltonowski układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{dp}{dt} = -H_q, \quad \frac{dq}{dt} = H_p,$$

gdzie $H \in C^1(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ oraz $p, q \in \mathbb{R}^n$, lub równoważnie

$$\frac{dz}{dt} = \mathcal{J} H_z,$$

gdzie $z = (p, q)$ oraz

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Funkcję H nazywamy hamiltonianem lub energią.

Przekształcamy układ hamiltonowski do postaci

$$\dot{z} = \mathcal{J}\nabla H(z), \quad z \in \mathbb{R}^{2n} \quad (*)$$

lub równoważnie $-\mathcal{J}\dot{z} - \nabla H(z) = 0$.

Szukamy rozwiązań $z \in H_T^1$ równania (*), gdzie H_T^1 ($T > 0$) oznacza uzupełnienie zbioru funkcji T -okresowych z \mathbb{R} do \mathbb{R}^{2n} z normą pochodzącą od iloczynu skalarnego $(u|v)_{H_T^1} = \int_0^T uv \, dt + \int_0^T \dot{u}\dot{v} \, dt$. Do tego celu spróbujemy wykorzystać metodę stopnia topologicznego $\text{Deg}_{S^1}^\nabla$. Mianowicie niech $E = L^2(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ i $E_1 = H^1(S^1, \mathbb{R}^{2n})$. Co więcej, oznaczmy jako D zbiór E_1 wyposażony w iloczyn skalarny z E .

Zauważmy, że

- E i E_1 są przestrzeniami Hilberta i ortogonalnymi reprezentacjami grupy $SO(2) = S^1$ z działaniem danym przez przesunięcie w czasie,
- operator $A: D \rightarrow E$ dany wzorem $Az = -\mathcal{J}\dot{z}$ jest współmienniczy, nieograniczony, samosprzężony i posiada czysto dyskretne widmo,
- $\nabla H(z)$ jest subliniowym gradientem (odsyłamy do Stwierdzenia 5.22 oraz Wniosku 5.23) niezmienniczego funkcjonału $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ określonego wzorem $\varphi(z) = \int_0^{2\pi} H(z(t)) \, dt$,
- $\nabla H \circ \iota: E_1 \rightarrow E$ jest odwzorowaniem zwartym, co wynika ze zwartości włożenia $\iota: E_1 \rightarrow E$.

Możemy teraz sformułować główny wynik tego podrozdziału.

Twierdzenie 5.24. *Załóżmy, że $\lambda > 0$ oraz zbiór miejsc zerowych odwzorowania $f_\lambda(z) = -\mathcal{J}\dot{z} - \lambda\nabla H(z)$ jest zwarty. Jeżeli $\text{Deg}_{S^1}^\nabla(f_\lambda) \neq 0$, to równanie (*) posiada rozwiązanie w $H_{2\pi\lambda}^1$.*

Dowód. Na początku zauważmy, że jeżeli $f_\lambda^{-1}(0)$ jest zwarty, to f_λ jest elementem $\mathcal{G}_{S^1}(E)$. Własność wykrywania zer mówi, że jeżeli $\text{Deg}_{S^1}^\nabla(f_\lambda) \neq 0$, to istnieje pewne $z \in E_1$, dla którego $f_\lambda(z) = 0$. Niech $\rho: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ to standardowe nakrycie. Wtedy podniesienie $\tilde{z} \in H_{2\pi\lambda}^1$ odwzorowania z , dane wzorem $\tilde{z}(t) = z(\rho(t))$, jest rozwiązaniem (*), co chcieliśmy pokazać. \square

Rozdział 6

Hipotezy

Przedstawione w rozprawie twierdzenia i definicje mogą stanowić dobry punkt wyjścia do pracy nad kolejnymi problemami badawczymi. W tym miejscu stawiamy kilka hipotez związanych z tematyką tej rozprawy doktorskiej.

Dowód formuły produktowej w przypadku ogólnym

Przy nieabelowych, nieskończonych, zwartych grupach Liego narastają problemy techniczne wynikające z ich złożonej struktury. W szczególności mocno komplikuje się operacja mnożenia w pierścieniu Burnside'a, która w tym przypadku wymaga dodatkowych, nietrywialnych przekształceń G -kompleksów, niezbędnych do przeprowadzenia rozkładu wyniku mnożenia na sumę typów orbitowych.

Niemniej sądzimy, że przy wykorzystaniu udowodnionego przez P. Bałomiejczyka w [7] twierdzenia typu Hopfa (dotyczącego dowolnej zwartej grupy Liego) oraz odpowiedniego uogólnienia pojęcia odwzorowań standardowych, możliwe jest przeprowadzenie alternatywnego dowodu własności produktowej stopnia współzmienniczego także w przypadku działania dowolnej zwartej grupy Liego, w sposób analogiczny do przedstawionego w rozprawie.

Wykrywanie rozwiązań okresowych układów hamiltonowskich

Uważamy, że zdefiniowany przez nas stopień $\text{Deg}_{S^1}^\nabla$ można zastosować do poszukiwania okresowych rozwiązań układów hamiltonowskich. Ogólna idea potencjalnego wykorzystania stopnia do takiego zagadnienia została opisana w poprzednim rozdziale.

Przyпускаjemy, że za pomocą stopnia $\text{Deg}_{S^1}^\nabla$ można przeprowadzić alternatywne dowody niektórych z klasycznych twierdzeń z prac [20, 66, 88], a być może również poprawić te wyniki, osłabiając ich założenia lub wzmacniając tezę (np. wykazując nie

tylko istnienie, ale i liczbę rozwiązań okresowych). Najlepiej dopasowane do tego typu ponownej analizy wydaje się twierdzenie Changa.

Twierdzenie 6.1 (Chang, [20]). *Załóżmy, że funkcja $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ spełnia założenia:*

1. $H(\mathbf{0}) = 0, \nabla H(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \text{Hess } H(\mathbf{0}) = 0, H(z) \geq 0.$
2. $H(z) = \frac{\gamma}{2} |z|^2$ dla $|z| \geq R, R > 0, \gamma \in (1, 2).$

Wówczas układ hamiltonowski $\dot{z} = \mathcal{J} \nabla H(z)$ posiada nietrywialne rozwiązanie 2π -okresowe.

Oryginalny dowód powyższego twierdzenia opiera się na zastosowaniu twierdzenia typu mini-max. Wydaje się, że punktem wyjścia do przeprowadzenia alternatywnego dowodu przy użyciu naszego stopnia byłoby zdefiniowanie funkcji φ pełniącej rolę wzorcowego hamiltonianu. Mówiąc ściślej, dla danego hamiltonianu H spełniającego założenia twierdzenia Changa, należałoby określić funkcję φ przyjmującą za argument moduł $|z|$ w \mathbb{R}^{2n} , która miałaby dość zbliżoną „charakterystykę orbit okresowych”.

Wydaje się, że naturalnym kandydatem do roli wzorcowego hamiltonianu jest funkcja

$$\tilde{H}(z) = a|z|^\rho \tag{6.1}$$

dla odpowiednio dobranych parametrów a i $\rho > 2$. Gradient tej funkcji jest równy $\nabla \tilde{H}(z) = a\rho |z|^{\rho-1} z$.

Kolejnym krokiem byłoby odpowiednie dobranie dziedziny, a następnie obliczenie wartości stopnia wzorcowego odwzorowania $h(z) = -J\dot{z} - \nabla \tilde{H}(z)$. Naszym celem jest uzyskanie wartości $\text{Deg}_{S^1}^\nabla(h) \neq 0$. Oznaczmy

- $\Omega := \{z \in \mathbb{R}^{2n} \mid r < |z| < R\},$
- $U := \{z \in H^1(S^1, \mathbb{R}^{2n}) \mid z(S^1) \subset \Omega\}.$

Wówczas, w przypadku $\tilde{H}(z)$ zadanego takim wzorem jak w (6.1) oraz przyjęciu zbioru U jako dziedziny odwzorowania h , przypuszczamy, że $\text{Deg}_{S^1}^\nabla(h) = n \cdot [S^1/E] \in \mathfrak{U}(S^1)$.

Końcowa część dowodu opierałaby się na pokazaniu, że odwzorowania $h(z)$ oraz $f(z) = -J\dot{z} - \nabla H(z)$ są otopijne w pewnym otoczeniu zbioru miejsc zerowych funkcji h . To zagwarantowałoby, że stopień $\text{Deg}_{S^1}^\nabla(f)$ jest różny od zera, a w rezultacie układ hamiltonowski z Twierdzenia 6.1 posiada rozwiązanie okresowe. Warto jednak podkreślić, że wykazanie nietrywialności rozwiązań okresowych wymagałoby dodatkowej argumentacji.

Uogólniona normalizacja

W pracy [10] zaproponowaliśmy możliwe uogólnienie własności normalizacji stopnia Deg_G^{\vee} (Remark 5.1). Po późniejszej analizie okazało się jednak, że w obecnym sformułowaniu hipoteza ta jest fałszywa. Wynika to z tego, że opisane tam odwzorowanie nie zawsze jest gradientowe (a zatem jego stopień nie jest określony). Pomimo podjętych prób, z powodu trudności technicznych dotychczas nie udało nam się uzyskać prostego opisu normalizacji w ogólniejszym przypadku, gdy zbiór zer rozważanego odwzorowania stanowi pojedynczą, nietrywialną orbitę działania grupy G .

Literatura

- [1] A. Abbondandolo, *Morse Theory for Hamiltonian Systems*, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics 425, Boca Raton, FL, 2001.
- [2] H. Amann i E. Zehnder, *Periodic solutions of asymptotically linear Hamiltonian systems*, Manuscr. Math. **32** (1980), 149–189.
- [3] G. Arioli i A. Szulkin, *Homoclinic solutions of Hamiltonian systems with symmetry*, J. Diff. Eq. **158** (1999), 291–313.
- [4] Z. Balanov, P. Kravets, W. Krawcewicz i D. Rachinskii, *Equivariant degree method for analysis of Hopf bifurcation of relative periodic solutions: case study of a ring of oscillators*, J. Differential Equations. **265** (2018), no. 9, 4530–4574.
- [5] Z. Balanov, W. Krawcewicz i H. Steinlein, *Reduced $SO(3) \times S^1$ -equivariant degree with applications to symmetric bifurcation problems*, Nonlinear Anal. **47** (2001), no. 3, 1617–1628.
- [6] P. Bartłomiejczyk, *On the space of equivariant local maps*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **45** (2015), no. 1, 233–246.
- [7] P. Bartłomiejczyk, *A Hopf type theorem for equivariant local maps*, Colloq. Math. **147** (2017), no. 2, 315–324.
- [8] P. Bartłomiejczyk, K. Gęba i M. Izydorek, *Otopy classes of equivariant local maps*, J. Fixed Point Theory Appl. **7(1)** (2010), 145–160.
- [9] P. Bartłomiejczyk, B. Kamedulski i P. Nowak-Przygodzki, *Degree product formula in the case of a finite group action*, New York J. Math. **25** (2019), 362–373.
- [10] P. Bartłomiejczyk, B. Kamedulski i P. Nowak-Przygodzki, *Topological degree for equivariant gradient perturbations of an unbounded self-adjoint operator in Hilbert space*, Topol. Appl. **275** (2020), 107037.

- [11] P. Bartłomiejczyk i P. Nowak-Przygodzki, *The exponential law for partial, local and proper maps and its application to otopy theory*, Commun. Contemp. Math. **16** (2014), no. 5, 1450005 (12 pages).
- [12] P. Bartłomiejczyk i P. Nowak-Przygodzki, *The Hopf type theorem for equivariant gradient local maps*, J. Fixed Point Theory Appl. **19(4)** (2017), 2733–2753.
- [13] T. Bartsch, *Topological Methods for Variational Problems with Symmetries*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1993.
- [14] T. Bartsch i A. Szulkin, Hamiltonian systems: periodic and homoclinic solutions by variational methods, w: A. Canada, P. Drábek, i A. Fonda (red.), *Handbook of differential equations: ordinary differential equations. Vol. II*, Elsevier, Amsterdam, 2005, 77–146.
- [15] G. D. Birkhoff, *Dynamical systems with two degree of freedom*, Trans. Amer. Math. Soc. **18** (1917), 199–300.
- [16] G. D. Birkhoff i M. R. Hestenes, *Natural isoperimetric conditions in the calculus of variations*, Duke Math. J. **1** (1935), 198–286.
- [17] G. D. Birkhoff i M. R. Hestenes, *Generalized minimax principles in the calculus of variations*, Duke Math. J. **1** (1935), 413–432.
- [18] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre*, Fund. Math. **20** (1933), 177–190.
- [19] R. F. Brown, *A Topological Introduction to Nonlinear Analysis*, Birkhäuser, 1993.
- [20] K.C. Chang, *Methods in Nonlinear Analysis*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [21] F. H. Clarke, *A classical variational principle for periodic Hamiltonian trajectories*, Proc. Amer. Math. Soc. **76** (1979), 186–188.
- [22] F. H. Clarke i I. Ekeland, *Hamiltonian trajectories with prescribed minimal period*, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), 103–116.
- [23] V. Coti-Zelati i P. H. Rabinowitz: *Homoclinic orbits for second order Hamiltonian systems possessing superquadratic potentials*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 693–727.

- [24] E. N. Dancer, *A new degree for S^1 -invariant gradient mappings and applications*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. **2** (1985), 329–370.
- [25] E. N. Dancer, K. Gęba, S. M. Rybicki, *Classification of homotopy classes of equivariant gradient maps*, Fund. Math. **185** (2005), no. 1, 1–18.
- [26] E. N. Dancer i S. Rybicki, *A note on periodic solutions of autonomous Hamiltonian systems emanating from degenerate stationary solutions*, Diff. Int. Eq. **12** (1999), 147–160.
- [27] T. tom Dieck, *The Burnside ring of a compact Lie group*, Math. Ann. **215** (1975), 235–250.
- [28] T. tom Dieck, *Transformation groups and representation theory*, Lecture Notes in Math., vol. 766, Springer, Berlin, 1979.
- [29] T. tom Dieck, *Transformation groups*, De Gruyter Stud. Math. **8**, de Gruyter, Berlin, 1987.
- [30] Y. H. Ding i M. Willem, *Homoclinic orbits of a Hamiltonian system*, Z. Angew. Math. Phys. **50** (1999), 759–778.
- [31] G. Dylawerski, *An S^1 -degree and S^1 -maps between representation spheres*, w: T. tom Dieck (red.), *Algebraic Topology and Transformation groups*, Lecture Notes in Math., vol. 1361, Springer, Berlin, 1987, 14–28.
- [32] G. Dylawerski, K. Gęba, J. Jodel i W. Marzantowicz, *An S^1 -equivariant degree and the Fuller index*, Annales Polonici Mathematici. **52** (1991), 243–280.
- [33] I. Ekeland, *Periodic solutions of Hamiltonian equation and a theorem of P. Rabinowitz*, J. Differential Equations. **34** (1979), 523–534.
- [34] I. Ekeland, *Convexity Methods in Hamiltonian Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin 1990.
- [35] E. R. Fadell i P. H. Rabinowitz, *Generalized cohomological index theories for Lie group actions with an application to bifurcation questions for Hamiltonian systems*, Inv. Math. **45** (1978), 139–174.
- [36] F. B. Fuller, *An index of fixed point type for periodic orbits*, Amer. J. Math. **89** (1967), 133–148.

- [37] K. Gęba, *Degree for gradient equivariant maps and equivariant Conley index*, w: M. Matzeu i A. Vignoli (red.), *Topological Nonlinear Analysis II* (Frascati, 1995), *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.* **27**, Birkhäuser, Boston, MA, 1997, 247–272.
- [38] K. Gęba, W. Krawcewicz i J. Wu, *An equivariant degree with applications to symmetric bifurcation problems. Part I: Construction of the degree*, *Proc. London Math. Soc.* **69** (1994), no. 2, 377–398.
- [39] K. Gęba, I. Massabó i A. Vignoli, *Generalized topological degree and bifurcation*, NATO ASI, Series C, Mathematical and Physical Sciences. **173** (1986) 54–73.
- [40] A. Gołębiewska, N. Hirano i S. Rybicki, *Global symmetry-breaking bifurcations of critical orbits of invariant functionals*, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S.* **12** (2019), no. 7, 2005–2017.
- [41] A. Gołębiewska, J. Kluczenko i P. Stefaniak, *Bifurcations from the orbit of solutions of the Neumann problem*, *Calc. Var. Partial Differential Equations.* **57** (2018), no. 1, Paper No. 21, 23 pp.
- [42] V. Guillemin i A. Pollack, *Differential topology*, Prentice-Hall, 1974.
- [43] A. Gołębiewska i S. Rybicki, *Global bifurcations of critical orbits of G -invariant strongly indefinite functionals*, *Nonlinear Anal.* **74(5)** (2011), 1823–1834.
- [44] A. Gołębiewska i S. Rybicki, *Equivariant Conley index versus degree for equivariant gradient maps*, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S.* **6(4)**, 2013, 985–997.
- [45] H. Hauschild, *Zerspaltung äquivarianter Homotopiemengen*, *Math. Ann.* **230** (1977), 279–292.
- [46] H. Hofer i E. Zehnder, *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*, Birkhäuser, Basel, 1994.
- [47] J. Ize, I. Massabó i A. Vignoli, *Global results on continuation and bifurcation for equivariant maps*, NATO ASI, Series C, Mathematical and Physical Sciences. **173** (1986), 75–111.
- [48] J. Ize, I. Massabó i A. Vignoli, *Degree theory for equivariant maps. I*, *Trans. Am. Math. Soc.* **315** (1989), 433–510.

- [49] M. Izydorek, *A cohomological Conley index in Hilbert spaces and applications to strongly indefinite problems*, J. Diff. Eq. **170** (2001), 22–50.
- [50] M. Izydorek, *Equivariant Conley index in Hilbert spaces and applications to strongly indefinite problems*, Nonlinear Anal. **51** (2002), 33–66.
- [51] M. Izydorek i J. Janczewska, *Heteroclinic solutions for a class of the second order Hamiltonian systems*, J. Diff. Eq. **238(2)** (2007), 381–393.
- [52] B. Kamedulski, *Product Property of Equivariant Degree Under the Action of a Compact Abelian Lie Group*, Bull. Brazilian Math. Soc. **52(4)** (2021), 879–891.
- [53] W. Kryszewski, *Wstęp do analizy nieliniowej. Wykład monograficzny*, Wydział Matematyki i Informatyki UMK, Toruń, 2012.
- [54] W. Kryszewski i A. Szulkin, *An infinite dimensional Morse theory with applications*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1987), 3181–3234.
- [55] W. Kryszewski i A. Szulkin, *Generalized linking theorem with an application to a semilinear Schrödinger equation*, Adv. in Diff. Equations. **3(3)** (1998), 441–472.
- [56] G. Li i A. Szulkin, *An asymptotically periodic Schrödinger equation with indefinite linear part*, Comm. Contemp. Math. **4** (2002), 763–776.
- [57] S. J. Li i A. Szulkin, *Periodic solutions for a class of nonautonomous Hamiltonian systems*, J. Diff. Eq. **112** (1994), 226–238.
- [58] L. Ljusternik, *Topology of the Calculus of Variations in the Large*, Amer. Math. Soc, Providence, RI, 1966.
- [59] L. Ljusternik i L. Schnirelmann, *Méthodes Topologiques dans les Problèmes Variationnels*, Hermann, Paris, 1934.
- [60] W. Lück, *The equivariant degree*, w: T. tom Dieck (red.), *Algebraic Topology and Transformation groups*, Lecture Notes in Math., vol. 1361, Springer, Berlin, 1987, 123–166.
- [61] J. Mawhin i M. Willem, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [62] K. R. Meyer i G. R. Hall, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, Springer-Verlag, 1992.

- [63] M. Morse, *Relations between the critical points of a real function of n independent variables*, Trans. Amer. Math. Soc. **27** (1925), 345–396.
- [64] M. Nakaoka, *Generalizations of Borsuk-Ulam theorem*, Osaka J. Math. **7(2)** (1970), 423–441.
- [65] E. Pérez-Chavela, S. Rybicki i D. Strzelecki, *Symmetric Liapunov center theorem for minimal orbit*, J. Diff. Eq. **265** (2018), no. 3, 752—778.
- [66] P. H. Rabinowitz, *Periodic solutions of Hamiltonian systems*, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), 157–184.
- [67] P. H. Rabinowitz, *Periodic solutions of a Hamiltonian system on a prescribed energy surface*, J. Diff. Eq. **33** (1979), 336–352.
- [68] P. H. Rabinowitz, *Periodic solutions of Hamiltonian systems: a survey*, SIAM J. Math. Anal. **13** (1982), 343–352.
- [69] P. H. Rabinowitz, *Periodic solutions of large norm of Hamiltonian systems*, J. Diff. Eq. **50** (1983), 33–48.
- [70] P. H. Rabinowitz, *Variational methods for Hamiltonian systems*, w: B. Hasselblatt i A. Katok (red.), *Handbook of dynamical systems*, vol. 1A, Elsevier, 2002, 1091–1127.
- [71] H. Ruan, *Hidden symmetries, coupled networks and equivariant degrees*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **31** (2021), no. 5, Paper No. 2150073, 21 pp.
- [72] R. L. Rubinsztein, *On the equivariant homotopy of spheres*, Dissertationes Math. **134** (1976), 48 pp.
- [73] S. Rybicki, *A degree for S^1 -equivariant orthogonal maps and its applications to bifurcation theory*, Nonlinear Anal. **23(1)** (1994), 83–102.
- [74] S. Rybicki, *On periodic solutions of autonomous Hamiltonian systems via degree for S^1 -equivariant gradient maps*, Nonlinear Anal. **34** (1998), 537–569.
- [75] S. Rybicki, *Degree for S^1 -equivariant strongly-indefinite functionals*, Nonlinear Anal. **43(8)** (2001), 1001–1017.
- [76] S. Rybicki, *Degree for equivariant gradient maps*, Milan J. Math. **73** (2005), 103–144.

- [77] K. Schmüdgen, *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space*, Graduate Texts in Mathematics 265, Springer, 2012.
- [78] H. Seifert, *Periodische Bewegungen mechanischer Systeme*, Math. Z. **51** (1948), 197–216.
- [79] H. Seifert, *Closed integral curves in 3-space and isotopic two-dimensional deformations*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 287–302.
- [80] G. B. Segal, *Equivariant stable homotopy theory*, Actes du Congrès Intern. Math. Nice (1970), Tome 2, 59–63.
- [81] H. Steinlein, *Borsuk's antipodal theorem and its generalizations and applications: A survey*, w: A. Granas (red.), *Méthodes topologiques en analyse non linéaire*, Sémin. Math. Sup. 95, Presses Univ. Montréal, Montreal, 1985, 166–235.
- [82] A. Szulkin, *Morse theory and existence of periodic solutions of convex Hamiltonian systems*, Bull. Soc. Math. France. **116** (1988), 171–197.
- [83] A. Szulkin, *A relative category and applications to critical point theory for strongly indefinite functionals*, Nonlinear Anal. **15** (1990), 725–739.
- [84] A. Szulkin, *Index theories for indefinite functionals and applications*, w: P. Drábek (red.), *Topological and Variational Methods for Nonlinear Boundary Value Problems*, Pitman Research Notes in Mathematics Series 365, Harlow, Essex, 1997, 89–121.
- [85] A. Szulkin i W. Zou, *Infinite dimensional cohomology groups and periodic solutions of asymptotically linear Hamiltonian systems*, J. Diff. Eq. **174** (2001), 369–391.
- [86] A. Szulkin i W. Zou, *Homoclinic orbits for asymptotically linear Hamiltonian systems*, J. Func. Anal. **187** (2001), 25–41.
- [87] K. Tanaka, *Homoclinic orbits in a first order superquadratic Hamiltonian system: convergence of subharmonic orbits*, J. Diff. Eq. **94** (1991), 315–339.
- [88] A. Weinstein, *Periodic orbits for convex Hamiltonian systems*, Ann. Math. **108** (1978), 507–518.
- [89] X. Xu, *Homoclinic orbits for first order Hamiltonian systems possessing superquadratic potentials*, Nonlinear Anal. **51** (2002), 197–214.