Dr hab. Danuta Kołodziejczyk
Wydział Matematyki
i Nauk Informacyjnych,
Politechnika Warszawska

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Bartosza Kamedulskiego pt.: *Wybrane własności i zastosowania stopnia odwzorowań współzmienniczych.*

Recenzowana praca doktorska została napisana pod kierunkiem dra hab. Piotra Bartłomiejczyka i zawiera badania z pogranicza Topologii Algebraicznej i Analizy Nieliniowej.

Rozpatrywane są w niej pewne, istotne w zastosowaniach, własności tzw. stopnia współzmienniczego, który jest uogólnieniem szeroko znanego stopnia Brouwera zdefiniowanym dla tzw. odwzorowań współzmienniczych (ekwiwariantnych).

Tematyka stopnia współzmienniczego została zapoczątkowana przez Kazimierza Gębę oraz Sławomira Rybickiego i była rozwijana przez uczniów K. Gęby, w tym m. in. Piotra Bartłomiejczyka, promotora recenzowanej rozprawy doktorskiej, oraz grupę S. Rybickiego z Torunia. Spośród matematyków zagranicznych pokrewnymi zagadnieniami zajmował się m. in. W. Lück.

Klasyczny stopień Brouwera bywa używany między innymi do znajdywania zer odwzorowań lokalnych (tj. przekształceń z otwartego podzbioru R^n do R^n, których zbiór miejsc zerowych jest zwarty). Wspomniany stopień współzmienniczy, który jest nie liczbą, a elementem tzw. pierscienia Burnside'a (skończonym ciągiem liczb) może być zastosowany do podobnych celów dla tzw. odwzorowań lokalnych współzmienniczych. Rozważany jest również w tej rozprawie tzw. stopień współzmienniczy gradientowy zdefiniowany dla tzw. odwzorowań lokalnych współzmienniczych gradientowych, o wartościach w tzw. pierscieniu Eulera-tom Dieck'a. Wprowadzony jest też tu m. in. pewien jego nowy wariant nieskończenie wymiarowy w przestrzeniach Hilberta.

Recenzowana rozprawa ma 80 stron i składa się ze wstępu oraz 6 rozdziałów. Wstęp zawiera bardzo staranne wprowadzenie historyczne, a także opis otrzymanych w pracy wyników i zawartości poszczególnych rozdziałów.

Rozdział 1 nosi nazwę Preliminaria i znajdują się w nim wybrane definicje związane z tematyką rozprawy, pewne informacje o pojęciach używanych dalej (m. in. takich, jak otopie, odwzorowania lokalne, czy same odwzorowania współzmiennicze) oraz różne użyteczne dalej fakty.

W głównej części pracy, zawierającej wyniki własne (otrzymane częściowo ze współautorami), Autor zajmuje się najpierw (w Rozdziale 2) tzw. własnością produktową stopnia współzmienniczego, oznaczanego deg_G, dla grup G skończonych. Własność produktowa oznacza, że

$$deg_G(f_1 \times f_2) = deg_G f_1 \circ deg_G f_2,$$

gdzie po prawej stronie mamy mnożenie we wspomnianym pierścieniu Burnside'a. W Rozdziale 3 dowodzona jest ta sama własność dla zwartych abelowych grup Liego G.

Pierwszy z tych wyników — dla grupy G skończonej — został uzyskany ze współautorami — Piotrem Bartłomiejczykiem i Piotrem Nowakiem-Przygodzkim oraz opublikowany w New York Journ. of Math. w 2019 roku. Drugi, czyli wzór produktowy dla zwartej abelowej grupy Liego G (są to grupy o postaci iloczynu kartezjańskiego grupy skończonej i torusa), jest wynikiem samodzielnym Doktoranta opublikowanym w Bull. Brazilian Math. Soc. w 2021 roku. Autor uogólnia tam poprzedni wspólny rezultat uzyskany dla grupy skończonej wprowadzając do dowodu pewne modyfikacje. Wspomniane tu prace, to:

- P. Bartłomiejczyk, B. Kamedulski i P. Nowak-Przygodzki, *Degree product formula in the case of a finite group action*, New York J.Math. 25 (2019), 362–373.

- B. Kamedulski, *Product Property of Equivariant Degree under the Action of a Compact Abelian Lie Group*, Bull. Brazilian Math. Soc. 52(4) (2021), 879–891.

Ogólniejszy wynik, tzn. wzór produktowy dla stopnia współzmienniczego deg_G dla dowolnej zwartej grupy Liego G, pojawił się w 1994 roku w pracy Kazimierza Gęby, Wiesława Krawcewicza oraz Jianhonga Wu opublikowanej w Proc. London. Math. Soc.:

- K. Gęba, W. Krawcewicz i J. Wu, *An equivariant degree with applications to symmetric bifurcation problems. Part I: Construction of the degree*, Proc. London Math. Soc. 69 (1994), no. 2, 377–398.

Dowód Gęby, Krawcewicza i Wu, jako mała część obszerniejszej pracy, jest napisany dość szkicowo i odwołuje się do pewnych starszych wyników. Autor recenzowanej tu rozprawy i jego współautorzy stwierdzają (w samej rozprawie i opublikowanych, wspomnianych tu wcześniej związanych artykułach), że ich dowód, uzyskany jednak przy ograniczonych założeniach, czyli dla grupy G skończonej, a potem zwartej abelowej grupy Liego, jest bardziej czytelny i kompletny. Szkoda trochę, że Autor nie wyjaśnia lub choćby nie przybliża, co rozumie przez niekompletność ogólniejszego starszego wyniku (fakty, na których opiera się pierwszy i ogólniejszy dowód niekoniecznie u wszystkich muszą budzić wątpliwosści).

Dowód prezentowany w rozprawie, dla wspomnianych szczególnych grup G, jest rzeczywiście bardziej czytelny i korzysta m. in. z interesującego pojęcia otopii. Otopie, czyli uogólnienie homotopii (homotopie o zmiennej dziedzinie) były wprowadzone w zbiorze odzworowań lokalnych przestrzeni euklidesowych już w pracy D. H. Gottlieba i G. Samaranayake [New York J. Math. 1, 130–148 (1995)] i mogą mieć inne ciekawe zastosowania.

Kolejny Rozdział 4 zawiera znów wyniki opublikowane i uzyskane przez doktoranta wraz z tymi samymi współautorami, czyli Piotrem Bartłomiejczykiem i Piotrem Nowakiem-Przygodzkim, a poświęcony jest drugiemu podtematowi pracy — wprowadzeniu nowej wersji gradientowego stopnia współzmienniczego w przestrzeniach Hilberta oznaczanego $Deg_{\nabla G}$.

- P. Bartłomiejczyk, B. Kamedulski i P. Nowak-Przygodzki, *Topological degree for equivariant gradient perturbations of an unbounded self-adjoint operator in Hilbert space*, Topol. Appl. 275 (2020), 107037.

Stopień współzmienniczy gradientowy definiowany jest ogólnie dla klasy odwzorowań współzmienniczych, które są jednocześnie gradientowe. Podobnie jak inne znane wcześniej wersje stopnia współzmienniczego gradientowego, wprowadzona tu nowa wersja nieskończona gradientowego stopnia współzmienniczego $Deg_{\nabla G}$ przyjmuje wartości w pierścieniu Eulera-tom Dieck'a. Definicja opiera się na skończenie wymiarowych aproksymacjach i wykorzystuje własność produktową znanego wcześniej skończenie wymiarowego stopnia współzmienniczego gradientowego udowodnioną m.in. przez K. Gębę oraz A. Gołębiewską i S. Rybickiego. Alternatywnie użyte jest w definicji pojęcie granicy prostej. W rozprawie wykazanych jest kilka własności stopnia $Deg_{\nabla G}$ analogicznych jak własności stopnia współzmienniczego gradientowego skończenie wymiarowego $deg_{\nabla G}$, czyli addytywność, otopijna niezmienniczość, wykrywanie zer, tzw. normalizacja oraz znów własność produktowa.

Ciekawy jest ostatni Rozdział 5 rozprawy dotyczący potencjalnych zastosowań uzyskanych wyników. Autor nazywa to schematem zastosowania nowego stopnia $Deg_{\nabla G}$ (wprowadzonego w Rozdziale 4) w układach hamiltonowskich. Rozdział 6 zawiera z kolei dalsze hipotezy i rozważania o możliwości rozszerzenia stosowanych metod w celu udowodnienia wzoru produktowego w przypadku ogólniejszym, niż w Rozdziale 2 i 3.

Na końcu pracy znajduje się bibliografia licząca 89 pozycji.

Praca zredagowana jest na ogół dość starannie, miejscami nawet bardzo starannie (jak wstęp, czy różnego rodzaju wprowadzenia), jednak jest pod tym względem bardzo niejednolita. Najmniej udanym rozdziałem, pod tym i innymi względami, są według mnie Preliminaria. Nie wiadomo, czym kierował się Autor przytaczając tam te, a nie inne definicje. I tak na przykład, znalazły się tam np. definicje orbity, czy stabilizatora z podstawowego kursu Algebry, a nie zostały podane defnicje dotyczące teorii grup Liego i wiele innych. Definicja samego stopnia współzmienniczego, którego własności są badane w pracy i są jej istotną częścią (własność produktowa) nie pojawia się w pracy w ogóle. Tak samo nie ma w rozprawie definicji stopnia gradientowego, którego uogólnienie jest konstruowane w drugiej części pracy. W obszernej rozprawie, która zawiera wiele ciekawych, lecz często mniej istotnych rzeczy powinno chyba znaleźć się na nie miejsce. W moim odczuciu, definicja samego odwzorowania współzmienniczego, która akurat znalazła się w Preliminariach, powinna pojawić się zaraz na początku pracy, bo jest wielokrotnie używana przed jej wprowadzeniem, a przy tym jest dość krótka.

Pojęcie angielskie "equivariant"byłoby być może lepiej tłumaczyć na język polski jako po prostu "ekwiwariantne", a nie "współzmiennicze", gdyż większej ilości osób ta nazwa coś mówi, rozumiem jednak, że użyte tłumaczenie zostało przejęte po poprzednikach.

Istotną wadą redakcji pracy jest (poza brakiem definicji kluczowych pojęć) to, że w środku rozprawy i we wstępie zabrakło czasem odsyłaczy dotyczących pochodzenia przytoczonych pojęć lub faktów, jakie zwyczajowo umieszcza się w artykułach naukowych (uwaga ta odnosi się na ogół do różnego rodzaju wprowadzeń, ale raczej nie do rozumowań z głównej, badawczej części pracy). Jednym z przykładów jest np. brak w Preliminariach odsyłacza do miejsca gdzie zostało wprowadzone pojęcie otopii, które nie jest powszechnie znane (można byłoby zatem błędnie pomyśleć, że po raz pierwszy pojawiło się ono w tej rozprawie lub przynajmniej w innej pracy jej autora).

Ponadto, podobnie, jak w artykułach badawczych, streszczenie powinno być w zasadzie czytelne samodzielnie, bez koniecznosci zaglądania do środka pracy, czy innych źródeł. Zaraz na początku użyte jest tam jednak oznaczenie deg_G bez wyjaśnienia, czym jest G i bez definicji.

W niektórych komentarzach w pracy Autor nie jest zbyt precyzyjny, jeśli chodzi o język polski. Znów można zgadywać, o co chodzi podczas, gdy można byłoby ująć to samo bardziej przejrzyście.

Praca zawiera bardzo małą ilość "literówek", jednak niektóre w dość istotnych miejscach (np. we wzorze produktowym w wersji współzmienniczej na początku Rozdziału 2 lub w 1.1.7, we wzorze dotyczącym addytywności).

Powyższe uwagi krytyczne dotyczące redakcji nie mają wpływu na moją ostateczną pozytywną ocenę rozprawy, ale niektóre z nich może przydadzą się Autorowi w przyszłości.

Podsumowywując, większość wyników zawartych w tej rozprawie zostało opublikowanych w 3 wspomnianych wyżej pracach, które ukazały się w latach 2019-2021 w dobrych lub dość dobrych czasopismach (z listy ministerialnej). Dwie z nich są pracami współautorskimi napisanymi wraz z promotorem drem hab. Piotrem Bartłomiejczykiem oraz drem Piotrem Nowakiem-Przygodzkim. Jak wynika z oświadczeń przedstawionych przez Doktoranta, podpisanych przez Współautorów, jego udział w obu współautorskich pracach oszacowany jest na 40 %. Trzecia praca jest pracą samodzielną.

Recenzowana rozprawa pokazuje dużą wiedzę Autora w szerokim zakresie związanym z jego tematyką badawczą. Dowodem na to jest m. in. bardzo staranny i szczegółowy wstęp oraz wprowadzenie w tematykę pracy, obszerna bibliografia oraz różnorodne narzędzia stosowane w dowodach. Mając na uwadze opublikowane 3 artykuły i oświadczenia o wkładzie we współautorskie prace, można powiedzieć, że Autor wykazał się umiejętnoscią samodzielnego prowadzenia pracy naukowej. W szczególności, wyniki przedstawione w Rozdziale 3 i opublikowane w pracy z roku 2021 w Bull. Braz. Math. Soc. są jego samodzielnym osiągnięciem, a jego udział w dwóch wspólnych pracach jest większy niż pozostałych współautorów.

Uważam, że przedstawiona rozprawa spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane przy nadawaniu stopnia doktora, dlatego jestem za dopuszczeniem Pana mgra Bartosza Kamedulskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Danuta Kołodziejczyk

Danuta Kołodziejczyk, Warszawa 17.12.2022 r.