Prof. dr hab. Wacław Marzantowicz
Zakład Analizy Nieliniowej i Topologii Stosowanej
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Adama Mickiewicza w Poznaniu
ul. Uniwersytetu Poznańskiego, 61 - 614 Poznań

e-mail: marzan@amu.edu.pl

tel. (48) (61) 829-5499

Recenzja rozprawy doktorskiej magistra Bartosza Kamedulskiego
WYBRANE WŁASNOŚCI I ZASTOSOWANIA STOPNIA ODWZOROWAŃ WSPÓŁZMIENNICZYCH

Przedstawiona rozprawa doktorska magistra Bartosza Kamedulskiego "Wybrane własności i zastosowania stopnia odwzorowań współzmienniczych" liczy 75 stron wraz ze spisem treści (2 strony), streszczeniem w dwóch językach (4 strony), oraz obszernym, liczącym 89 pozycji, spisem literatury (7 stron). Poświęcona ona jest dwóm zagadnieniom z teorii stopnia dla odwzorowań współzmienniczych. Cytując autora: "Pierwsze z nich to własność produktowa dla stopnia współzmienniczego. Drugie zagadnienie rozprawy to konstrukcja gradientowego stopnia współzmienniczego Deg_G^{∇} dla zwartych zaburzeń nieograniczonego operatora samosprzężonego o czysto dyskretnym widmie w przestrzeni Hilberta."

Przejdźmy więc do omówienia wartości naukowej rozprawy doktorskiej pana Kamedulskiego. W topologii algebraicznej przez stopień odwzorowania ciągłego $f : M \to N$ pomiędzy zwartymi i orientowalnymi rozmaitościami gładkimi wymiaru n rozmumie się liczbę całkowitą $\deg(f)$ określoną równością $H_n(f)(e_M) = \deg(f)\cdot e_N$, gdzie e_M, oraz e_N są generatorami grup $H_n(M;\mathbb{Z}) \simeq H_n(N;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ odpowiednio. Jest to niezmiennik homotopii i w szczególności gdy $\deg(f) \neq 0$ to f nie jest homotopijne z odwzorowaniem stałym. Natomiast w analizie nieliniowej istotne jest szukanie zer odwzorowania $F : D \to \mathbb{R}^k$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^m$ ograniczony podzbiór z gładkim brzegiem ∂D, i zachodzi $F(x) \neq 0$ na brzegu ∂D. W najprostszym przypadku, ale istotnym dla zastosowań, $D = D^m(r)$ jest dyskiem o środku w zerze i promieniu r. Bowiem ma miejsce twierdzenie zwane podstawową zasadą analizy nieliniowej.
Podstawowa zasada analizy nieliniowej: *Niech $\phi : \partial D = S^{m-1} \to \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ będzie obcięciem F. Rozpatrzmy odwzorowanie $\psi : S^{m-1} \to S^{k-1}$ określone wzorem $\psi(x) = \frac{\phi(x)}{\|\phi(x)\|}$. Wtedy dla każdego przedłużenia $\tilde{F}$ odwzorownia ϕ na D równanie $\tilde{F}(x) = 0$ ma rozwiązanie $x \in \mathrm{Int}D$ wtedy i tylko wtedy gdy $\psi : S^{m-1} \to S^{k-1}$ jest homotopijnie nietrywialne."* Gdy $m = k$, to odwzorwaniu f można przypisać liczbę całkowitą $\deg(f)$ określoną powyżej i przyporzadkowanie $f \mapsto \deg(f)$ zadaje bijekcję zbióru klas homotopii $[S^m, S^m]$ i liczb całkowitych, o ile $m \geqslant 1$. Co więcej, jeśli w zbiorze $[S^m, S^m]$ wprowadzić strukturę pierścienia (określoną przez dodawanie w grupach homotopii oraz składanie odwzorowań), to bijekcja ta jest izomorfizmem pierścieni, który można wypowiedzieć w formie, że zerowa stabilna grupa homotopii jest izomorficzna zerowej stabilnej zerowej grupie bordyzmów obramowanych $\lim_{m\to\infty}[S^m, S^m] =: \pi_0^{st}(*) \simeq \omega_0^{st}(*) \simeq \mathbb{Z}$, która jest równa $\mathbb{Z}$. Z drugiej strony w rodzinie klas izomorfizmów zbiorów skończonych z relacją równoliczności można wprowadzic strukturę półpierścienia A^+ z dodawaniem rozłącznych zbiorów i mnożeniem kartezjańskim, którego pierścień uniwersalny (Grothendiecka) jest równy $\mathbb{Z}$. Warto dodać, że gdy $m = n + k > k$ to konstrukcja i twierdzenie Pontriagina ustala izomorfizm $\lim_{k\to\infty}[S^{n+k}, S^k] =: \pi_n^{st}(*) \simeq \omega_n^{st}(*)$ klas homotopii odzworowań (stabilnych homotopii sfer) i klas bordyzmów obramowanych zamkniętych zwartych n-podrozmaitości obramowanych. Zauważmy, że 0-wymiarowe podrozmaitości zwarte to zbiory skończone, a obramowanie to wybór orientacji wiązki normalnej do punktu, czyli orientacja wiązki stycznej w punkcie utożsamiana z ± 1 przy wyborze ustalonej orientacji S^m.

Zbiór odzworowań, i klas homotopii odwzorowań z M do N posiada dodatkową strukturę w przypadku, gdy na obu tych rozmaitościach działa grupa G zwana grupą symetrii. W badaniach historycznie przyjmowało się, że G jest skończona lub zwarta ze względu na prostszą sytuację tj. środki techniczne (twierdzenia, teorie), którymi się wtedy dysponuje - dla tych grup teoria jest rozwinięta. Rozważa się zbiór odzworowań G-współzmienniczych, krótko współzmienniczych, czyli takich $f : M \to N$, że $f(gx) = gf(x)$, oraz klas homotopii współzmienniczych $[M, N]_G$, czyli odwzorowań współzmienniczych $F : M \times I \to N$ z działaniem trywialnym na odcinku I.

W roku 1970 na Kongresie ICM w Nicei Graeme Segal [80] sformułował (bez dowodu) twierdzenie: *Niech G będzie grupą skończoną, $\pi_0^{st,G}(*)$, $\omega_0^{st,G}(*)$ odpowiednio zerową grupą stabilnych G-współzmienniczych homotopii oraz zerową grupą bordyzmów obramowanych. Dla reprezentacji ortogonalnej V przez S^V oznaczamy jednopunktową kompatyfikację V, a przez $\lim_{V\to\infty}[S^V \to S^V]_G$ rozumiemy granicę $[S^V \to S^V]_G$ indukowaną przez włożenia $V \subset V'$ a $V \to \infty$ oznacza, że krotność każdego składnika nieprzywiedlnego w V dąży do ∞.*

$$\pi_0^{st,G}(*) := \lim_{V\to\infty}[S^V \to S^V]_G \simeq A(G) = \omega_0^{st,G}(*)$$

gdzie $A(G)$ jest pierścieniem Burnside'a G. Twierdzenie (hipoteza) Segala zainspirowało wiele badań, i zostało udowodnione w kilka lat po jego sformułowaniu. W ogólniejszej wersji, także postulowanej przez Segala, $\pi_*^{st,G}(*) \simeq \omega_*^{st,G}(*)$ zostało wykazane niezależnie przez doktoranta Segala Cz. Kosniowskiego (*Equivariant stable homotopy and framed bordism*, Trans. Amer. Math. Soc. 219 (1976), 225–234) oraz doktoranta tom Diecka H. Hauschilda (*Bordismentheorie stabil gerahmter G-Mannigfaltigkeiten*, Math. Z. 139 (1974), 165–171). Niezależnie od nich Ryszard Rubinsztein w swojej pracy doktorskiej [72] opisał efektywnie zbiór klas $[S(V), S(V\oplus W)]_G$ dla zwartej grupy Liego podając warunki na ("wielkość") V aby $[S(V), S(V)]_G$ było już równe $A(G)$ (ponieważ $S^V = S(V\oplus 1)$, więc nie ma tutaj znaczenia, odwzorowania którego z obiektów tutaj badamy. Drobne błędy w pracy Rubinszteina zostały skorygowane w pracy E. N.Dancera, *Perturbation of zeros in the presence of symmetries*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 36 (1984), no. 1, 106–125. Wszystkie wymienione dowody nie są łatwe technicznie.

Wymieniony w twierdzeniu pierścień Burnside'a jest jednym z podstawowych niezmienników kombinatoryczno-algebraicznych grupy skończonej a zdefiniowany jest on następująco:
Niech $A^+(G)$ oznacza zbiór klas izomorfizmów skończonych G-zbiorów. Suma rozłączna i iloczyn kartezjański (z działaniem przekątniowym) określają strukturę półpierscienia w $A^+(G)$. Stąd każdy element $\alpha \in A^+(G)$ może być zapisany jako

$$\alpha = \sum a(H)\,[G/H]\,, \quad a(H) \in \mathbb{N}\cup\{0\}\,, \tag{1}$$

gdzie $[G/H]$ jest klasą izomorfizmu zbioru G/H zależną tylko od klasy sprzężoności H. Pierscień Burnside'a to, z określenia, pierścien Grothendiecka skonstruowany z $A^+(G)$, który jest wolną grupą abelową o $\Phi(G)$ generatorach, gdzie $\Phi(G)$ to zbiór klas sprzężoności podgrup $H \subset G$. Jedynką tego przemiennego pierścienia jest element $1 \cdot [G/G]$.

Z drugiej strony dla każdej podgrupy $H \subset G$ określony jest homomorfizm półpierścieni $\chi^H : A^+(G) \to \mathbb{N}\{0\}$ przyporządkowujący skończonemu zbiorowi X moc zbioru punktów stałych H, tj. $X \mapsto |X^H|$ i zależny tylko od klasy sprzężoności H. Ten homomorfizm rozszerza się jednoznacznie do homomorfizmu $\chi^H : A(G) \to \mathbb{Z}$. Niech

$$\chi := (\chi^H) : \, A(G) \to \prod_{(H)\in\Phi(G)} \mathbb{Z} \qquad - \text{ pierścień po prawej oznaczany jest przez } C(G)\,. \tag{2}$$

Łatwo można wykazać, że χ jest monomorfizmem pierścieni, ale NIE jest izomorfizmem tj. pomiędzy poszczególnymi "współrzędnymi" $\chi^{H_1}(\alpha)$ i $\chi^{H_2}(\alpha)$ ogólnie istnieją pewne relacje, które sa wykorzystywane w zastosowaniach np. w zastosowaniach teori stopnia niezmienniczego w topologii i analizie nielinowej. Najbardziej chyba znaną jest następująca: jesli G jest p-grupą a to $\chi^G \cong \chi^e \mod p$. Dla $\alpha \in A(G)$ oznaczmy przez $b(H)$ wartość $\chi^H(\alpha)$. Z tego co jest napisane powyżej wynika, że układy liczb całkowitych (współczynniki) $\mathcal{A} = (a(H))$ i $\mathcal{B} = (b(H))$, $H \in \Phi(G)$ jednoznacznie wyznaczają α, a formuła przejścia pomiędzy nimi nazywana jest macierzą Burnside. Jest to formuła typu sumacyjnego a odwrotna - typu formuły Möbiusa na zbiorze częściowo uporządkowanym podgrup G. W kontekście współzmienniczego indeksu punktu stałego (niezmiennik dualny do współzmienniczego stopnia odwzorowania) ta procedura przejścia została opisana w pracy K. Komiyi *Fixed point indices of equivariant maps and Möbius inversion*, Invent. Math. 91 (1988), no. 1, 129–135. Pierścieniowi Burnside'a grupy skończonej, jego związkom z pierścieniem reprezentacji tej grupy i roli w opisie samej grupy, poświęcona jest bogata literatura licząca kilkaset pozycji. Przytoczę tylko jedną klasyczną pozycję znaną i wykorzystywaną przez topologów od lat 70tych: A. Dress, *Notes on the theory of representations of finite groups. Part I: The Burnside ring of a finite group and some AGN-applications*, With the aid of lecture notes, taken by Manfred Küchler. Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik, Bielefeld, 1971.

Z punktu widzenia teorii stopnia współzmienniczego ważna jest obserwacja [28,29, 72], że dla elementu α wyznaczonego w $\pi_0^{st,G}(*) \simeq A(G)$ przez odwzorowanie współzmiennicze $f : S^V \to S^V$ mamy

$$\chi^H(\alpha) = \deg(f^H)\,, \tag{3}$$

gdzie po prawej stronie jest klasyczny stopień Brouwera $f^H : S^{V^H} = (S^V)^H \to S^{V^H}$ obcięcia f do punktów stałych działania podgrupy H.

Pod koniec lat 70tych Tammo tom Dieck podał definicję pierścienia Burnside'a dla zwartej grupy Liego [28,29]. Najpierw określamy półpierścień $A^+(G)$ jako zbiór zwartych (skończonych) G-CW kompleksów z sumą rozłączną i iloczynem kartezjańskim podzielony przez relację $X \sim Y \iff \chi(X^H) = \chi(Y^H)$ dla wszystkich podgrup (domkniętych) $H \subset G$, gdzie $\chi(X)$ oznaczna charakterystykę Eulera.

Dla grupy zwartej Liego G niech $\Phi(G)$ oznacza zbiór klas sprzężoności (H) podgrup takich, że grupa Weyla $W(H) + N(H)/H$ jest skończona. Dla każdego $H \subset G$ określony jest też homomorfizm $\chi^H : A(G) \to \mathbb{Z}$, gdyż charakterystyka Eulera jest multiplikatywna i addytywna względem sum rozłącznych. Mają miejsce następujące fakty ([28 Rodz IV. 2] $A(G)$ jest wolną grupą abelową o generatorach $[G/H]$, $(H) \in \Phi(G)$ i dla każdego G-kompleksu mamy

$$A(G) \ni [X] = \sum_{(H)\in\Phi(G)} \chi_c(X_{(H)}/G)[G/H] \tag{4}$$

gdzie $\chi_c(X_{(H)}/G)$ oznacza charakterystykę Eulera $X_{(H)}/G)$ dla homologii o zwartych nośnikach, albo co jest tutaj równoważne, charakterystykę pary $\chi_c(X^{(H)}/G) = \chi(X^{(H)}/G, X^{>(H)}/G)$ wg. oznaczeń z pracy doktorskiej, oraz [28,29].

Podobnie jak w przypadku grupy skończonej możemy określić homomorfizm

$$\chi := (\chi^H) : \ A(G) \ \to C(G) := \prod_{(H)\in\Phi(G)} \mathbb{Z}\,, \tag{5}$$

I podobnie jak w przypadku grupy skończonej mamy tw. Segala, [28, 29] i implicite częściowo [72]:

$$\pi_0^{st,G}(*) := \lim_{V\to\infty} [S^V \to S^V]_G \simeq A(G) = \omega_0^{st,G}(*) \tag{6}$$

(7) *iniektywność odwzorowania* $\chi : A(G) \to \prod_{(H)\in\Phi(G)} \mathbb{Z}$ jest monomorfizmem pierścieni.

Co więcej, dla odzworowania współzmienniczego $f : S^V \to S^V$, a także dla lokalnego odwzorowania właściwego $f : V \supset D :\to V$ zachodzi wzór (3), który zapisuje się następująco

$$\chi^H(\deg_G(f)) = \deg(f^H)\,, \tag{8}$$

gdzie po lewej jest stopień współzmienniczy w $A(G)$, a po prawej stopień klasyczny (Bouwera). Dla odwzorowania współzmienniczego $f : S^V \to S^V$ jest to właściwie we wszystkich klasycznych źródłach, w tym cytowanych już [28, 29, 72]. Dla lokalnego współzmienniczego odwzorowania właściwego $f : V \Supset \mathcal{U} \to V$ i G-otopii nie jest nigdzie sformułowane explicite [!!], ale implicite wynika z opisu konstrukcji bijekcji $\mathcal{R} : [S(V) \to S(V)]_G \to \mathcal{F}_G[V]$ pomiędzy przestrzenią klas G-homotopii odwzorowań współzmienniczych S^V w siebie a klasami współzmienniczych otopii lokalnych odwzorowań właściwych V, opisanej dokładnie w pracy Bartłomiejczyka, Gęby i Izydorka [10, Tw. 7.1, dla $k = 0$]. Po tym trochę dłuższym wstępie (dla uczynienia tekstu bardziej dostępnym dla czytelnika nie zaznajomionego z tą tematyką) możemy zaproponować bardzo krótki i naturalny dowód własności multiplikatywności stopnia G-współzmienniczego dla odwzorowania współzmienniczego $f : S^V \to S^V$ i lokalnego współzmienniczego odwzorowania właściwego $f : V \supset D \to V$ dla zwartej grupy Liego G.

Twierdzenie 1:*Niech G będzie zwartą grupą Liego. Niech dalej $f_1 : V_1 \supset D_1 \to V_1$ i $f_2 : V_2 \supset D_2 \to V_2$ będą odzworowaniami lokalnymi i właściwymi odwzorowaniami G- współzmienniczymi. Wtedy*

$$\deg_G(f_1 \times f_2) = \deg_G(f_1) \cdot \deg_G(f_2)\,,$$

gdzie po prawej jest iloczyn elementów w pierścieniu Burnside'a.

Dowód: Dla każdego $H \subset G$ mamy $\chi^H(\deg_G(f_1 \times f_2)) = \deg(f_1 \times f_2)^H = = \deg(f_1^H)\deg(f_2^H) = \chi^H(\deg_G(f_1))\,\chi^H(\deg_G(f_2)) = \chi^H(\deg_G(f_1)\cdot\deg_G(f_2))$, ponieważ $(X \times Y)^H = X^H \times Y^H$. To pokazuje tezę na mocy 7. $\square$

Kolejnym faktem umieszczonym w omawianej pracy doktorskiej jest dowód omawianej powyżej własności multiplikatywności stopnia $\deg_G(f)$ w przypadku gdy G jest zwartą grupą abelową tj. jest izomorficzną z grupą postaci $\mathbb{T}^k \times \Gamma$, gdzie Γ jest skończoną grupą abelową. Znowu i w tym przypadku można podać prosty dowód redukujący ten przypadek do wykazanego wcześniej przez autora stwierdzenia, że zachodzi ona dla grup skończonych. Nietrudno jest wykazać, posługując się tylko algebraicznymi własnościami pierścienia Burnsidea'a że jeśli G jest zwartę grupą abelową, tj. $G = bt^k \times \Gamma$, gdzie Γ skończona abelowa, to $A(G) = A(\Gamma)$. (patrz H. Fausk *Survey on the Burnside Ring of Compact Lie Groups*, Journal of Lie Theory Volume 18 (2008) 351–368, https://www.heldermann-verlag.de/jlt/jlt18/fauskla2e.pdf). Posługując się tym i faktem, że dla grupy abelowej postaci $G \supset K = \mathbb{T}^l \times \tilde{\Gamma}$ i G-przestrzeni X mamy $X^{\mathbb{T}^l \times \tilde{\Gamma}} = (X^{\tilde{\Gamma}})^{\mathbb{T}^l}$, oraz $\deg(f^K) = \deg(f^{\tilde{\Gamma}})$ dla G-odzorowania $f : S^V \to S^V$. Redukuje to omawiany przypadek grupy abelowej zwartej do przypadku skończonej grupy abelowej.

Po tym dość długim wyjaśnieniu mającym częściowo charakter eksplikacyjny, uważam, że formalnie można by tę część pracy (dowódy własności multiplikatywności G-stopnia) zrecenzować następująco: W Paragrafie 8 Rodziału II książki tom Diecka [29] znajdują się wszystkie niezbędne fakty, aby przeprowadzić krótki dowód Twierdzenia 1. Co wiecej, autor wymienionej monografii zostawia to jako ćwiczenie dla czytelnika (w pierwszych zdaniach Paragrafu 8.1) w trochę zawoalowanej formie:"wykazać, że w pierścieniu
$\lim\limits_{V \to \infty} [S^V \to S^V]_G$ struktura multilikatywna zadana jest albo poprzez składanie odwzorowań, albo przez *smash-produkt* G-odwzorowań $f : S^V \to S^V$, $h : S^W \to S^W$. To ostatnie jest produktem odwzorowań, gdyż smash-produkt $S^V \wedge S^W \simeq S^{V \times W}$ - czyli jednopunktowe uzwarcenie $V \times W = V \oplus W$. W tym momencie autor monografii [29] odwołuje sie do definicji pierscienia Burnside'a jako podpierścienia $C(G)$ zgodnie z (5), ale cały ten paragraf poświęcony jest wytłumaczeniu, że taki opis jest równoważny temu pierwszemu (1) podającemu wartości współczynników w bazie addytywnej $\mathcal{A} : [G/H]$, $H \in \Phi(G)$. Jest też tam opisane dualne podejście do teorii stopnia G-współzmienniczego poprzez G- współzmienniczą wersję teorii indeksu punktu stałego Dolda rozwiniętej przez doktoranta Dolda H. Ulricha (patrz A. Dold, *Fixed point index and fixed point theorem for Euclidean neighborhood retracts*, Topology 4 (1965), 1–8; i odpowiednio H. Ulrich, *Fixed point theory of parametrized equivariant maps*, Lecture Notes in Mathematics, 1343. Springer-Verlag, Berlin, 1988). Odpowiedniość wynika z prostej obserwacji, że dla $f : V \supseteq D \to V$, punkt $x \in D$ jest zerem f wtedy i tylko wtedy gdy x jest punktem stałym odwzorowania $F(x) := (\mathrm{id} + f)(x)$. Wtedy własności stopnia łatwo wynikają z odpowiednich własności indeksu punktu stałego i na odwrót. W szczególności w pracy Ulricha, jak wielu innych m.in. w L. G. Lewis, Jr., P. May, et al., *Equivariant stable homotopy theory*, Lecture Notes in Math., 1213, Springer, Berlin, 1986 i L. G. Lewis, Jr., Mem. Amer. Math. Soc. 144 (2000), no. 686, wspólnej pracy Ulricha z C. Prieto, czy pracach C. Prieto z piszącym tę recenzję, jest podany i skonstruowany rozkład addytywny typu (1) pierścienia $A(G)$ na sumę prostą składników odpowiadającym występujących na X, odpowiednio D, typom orbitowym. Przy posługiwaniu się G-indeksem należy jednak deformować dane odwzorowanie współzmiennicze do G-odwzorowania *ko-normalnego* tj. takiego, że w małym G-niezmienniczym otoczeniu podzbioru o większych i równych grupach izotropii niż H-kolejno rozpatrywana jest ono zerem w kierunku normalnym, dualnie do metody użytej w pracy K. Gęby & współautorów [38], więc i autora pracy doktorskiej, gdzie jest identycznością w kierunku normalnym.

Podsumowując, trochę dziwnym wydaje się fakt, że przed doktorantem postawiono zadanie udowodnienia po raz kolejny, pewnej własności stopnia współzmienniczego, której dowody w pełnej ogólności są proste i dobrze znane w klasycznej literaturze od lat 80-tych 20 wieku. Co więcej, zaproponowana metoda jest skomplikowana (zacytuję wyjątek z recenzji pracy [9] w Math. Reviews " *But the whole proof of the main theorem, including the proofs of two mentioned lemmas, does not seem to be very short*") i jak dotychczas skuteczna tylko w szczególnych przypadkach.

Pozwolę sobie uczynić jeszcze jedną uwagę ogólną. Dowód twierdzenia G. Segala i wszystkich późniejszych jego wersji, uogólnień, etc. (czyli zapis $A(G)$ w bazie $(\mathcal{A})$ nie jest łatwy, gdyż w przypadku odwzorowań G-współzmienniczych nie ma twierdzenia o transwersalności i jest ono technicznie zastępowane żmudną, indukcyjną po typach orbitowych, techniką G-deformacji do odzorowań normalnych, czy ko-normalnych. Daje to jednak efektywny geometrycznie opis elementów pierścienia $A(G)$, czy w szczególności elementu $\deg_G(f, D)$. Jednakże otrzymane jako wynik deformacji G-dwzorowanie nie musi mieć izolowanych zer (orbit). Wykorzystanie pojęcia G-otopii używanego w pracy pozwala uzyskać to, i nawet wiecej, gdyż finalne odzorowanie deformacji może być określone na sumie rozłącznej dziedzin, i w każdej z nich ma tylko jedną orbitę zerową. To jest główny argument, dotychczas nie wykorzystany [!?] w problemach nieliniowych, za wprowadzeniem i badaniem odwzorowań "standartowych" i "polistandardowych", czyli o takiej własności.

Natomiast do wykazywania własności ogólnych pierścienia $A(G)$, czy też jego elementów określonych geometrycznie, jak $\deg_G(f_1 \times f_2) = \deg_G(f_1) \cdot \deg_G(f_2)$ wygodniejszą, i naturalną, jest baza $\mathcal{B}$ (patrz 5).

Przejdźmy teraz do omówienia drugiego zagadnienia zawartego w rozprawie tj. "konstrukcji gradientowego stopnia współzmienniczego Deg_G^{∇} dla zwartych zaburzeń nieograniczonego operatora samosprzężonego o czysto dyskretnym widmie w przestrzeni Hilberta", która opisana jest w rozdziale czwartym tej pracy.

Pierwsze paragrafy tego rozdziału są poświęcone pobieżnej prezentacji informacji o operatorach samosprzężonych w przestrzeniach Hilberta, w tym nieograniczonych (4.1.1). Kolejno w 4.1.2 omawia się przestrzenie Sobolewa, znowu pobieżnie (np. nie wyjaśnia się, w jakim sensie pochodna jest używana). Następnie w paragrafach 4.1.3 i 4.1.4 też przedstawiono definicje odwzorowania lokalnego w przestrzeni Hilberta i otopii w przestrzeni Hilberta - w ich G-współzmienniczych wersjach. W Paragrafie 4.15 podana jest definicja i pobieżnie własności pierścienia Eulera. Wszystko to jest przygotowaniem do określenia konstrukcji współzmienniczego gradientowego stopnia odwzorowania w Paragrafie 4.2. Jest to dokładnie ta sama konstrukcja, która została podana w pracy Gołębiewskiej i Rybickiego [43] z jedną różnicą - w procesie aproksymacji podprzestrzeniami skończenie wymiarowymi zamiast filtracji dowolnym ciągiem podprzestrzeni $\{\mathrm{H}^{\mathrm{n}}$ postaci $\{\mathrm{H}^{\mathrm{n}+1}\} = \{\mathrm{H}^{\mathrm{n}} \oplus \mathrm{H}_{\mathrm{n}}\}$, z sumą gęstą w H, rozpatruje się jedną filtrację zadaną przez kolejne podsprzestrzenie własne $V^i := \bigoplus_{|\lambda_j| \leqslant |\lambda_i|} V_j$ operatora A. To istotnie ogranicza stosowanie tej definicji - w pracy [43] pokazuje się, że tamta definicja stopnia nie zależy od filtracji $\{\mathrm{H}^{\mathrm{n}+1}\}$ użytej do określenia stopnia. Porównanie obu definicji, w tym pokazanie przykładów, w których można stosować stopień określony w rozprawie, a nie można stosować wcześniej znanych, czy też że dzięki nowej konstrukcji otrzymujemy więcej informacji, nie jest dyskutowane zarówno w rozprawie, jak i w źródłowej pracy [10].

W kolejnym rozdziale piątym "Schemat zastosowania nowego stopnia w układach hamiltonowskich" jako zastosowanie skonstruowanego wcześniej stopnia rozpatruje się odwzorowanie współzmiennicze $f(x)(x) = Ax - \nabla\phi(x)$, gdzie A jest operatorem postaci $\mathcal{J}\dot{z}$, $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n}$, a $\mathcal{J}\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ macierzą kanoniczną f struktury symplektycznej, którego zera odpowiadają rozwiązaniom układu (równania hamiltonowskiego) $(*) \quad \dot{z} = J\nabla \mathrm{H}(z),\ z \in \mathbb{R}^{2n}$. Po dwustronnicowej "historii problemu" kolejne kilka stron stron zajmuje, pobieżne przedstawienie klasycznych, czasami wręcz elementarnych i dobrze znanych, pojęć później częściowo wykorzystywanych. Na przykład wykazuje się bezpośrednio, że operator $A = \mathcal{J}\dot{z}$ jest samosprzężony. A przecież jest on złożeniem dwóch operatorów, z których każdy jest sprzężony formalnie z przeciwnym do siebie, więc złożenie jest operatorem samosprzężonym, zresztą jest to dobrze znane. Podobnie Paragraf 5.4 "Objaśnienie schematu aproksymacyjnego" - zarówno operator pochodnej $\dot{z}$ jak i i mnożenia wartości przez kanoniczną macierz symplektyczną $\mathcal{J}$ są S^1 współzmiennicze, więc ich złożenie jest takie. Tak samo podprzestrzeń własna operatora G-współzmienniczego jest G-niezmiennicza, więc nie trzeba sprawdzać tego na explicite danych funkcjach własnych (tak jak jest w rozprawie), co skróciło by Paragraf 5.4 z czterech stron do kilku linijek. Kolejno w 5.5 nie ma nic nowego (nic ogólnie znanego). Na koniec, w Paragrafie 5.6 opisuje się "zamianę problemu różniczkowego na hilbertowski". Po standardowym przeformułowaniu następuje główne twierdzenie rodziału piątego:

"Załóżmy, że $\lambda > 0$ oraz zbiór miejsc zerowych odwzorowania $f_\lambda(z) = -\mathcal{J}\dot{z} - \lambda\nabla\mathrm{H}(z)$ jest zwarty. Jeżeli $\mathrm{Deg}_{S^1}^{\nabla}(f_\lambda) \neq 0$, to równanie (*) posiada rozwiązanie w $H^1(2\pi\lambda)$."

Tak sformułowane twierdzenie nie ma żadnej wartości aplikacyjnej, bo nie podaje żadnych warunków gwarantujących, że założenie o zwartości zer jest spełnione - to jest jakby powtórzona podstawowa zasada analizy nieliniowej w przypadku nieskończenie-wymiarowym. W prezentowanej formie twierdzenie jest bezużyteczne i dlatego autor nie podaje żadnych zastosowań a jedynie wspomina, że w źródłowej pracy brakuje założeń na hamiltonian $\mathrm{H}(z)$, które tutaj są podane (wcześniej). Nie jest jednak wytłumaczone dlaczego te założenia, i ogólnie jakie, są niezbędne dla uzyskania istnienia rozwiązania okresowego. Brakuje podania relacji założeń i tezy tego twierdzenia do choćby jednego wyniku innych autorów, a przecież prac poświeconych badaniu rozwiazań okresowych układów Hamiltona są setki, w tym dziesiątki monografii. W źródłowej pracy [10] autorzy wspominają jeszcze o możliwości stosowania ich schematu do szukania rozwiązań równania Seiberga-Wittena, co jest równoważne szukaniu zer odzworowania Seiberga-Wittena (oznaczane przez SW) ([10] 5.2 Applications to the Seiberg-Witten equations). Jednak w konkluzji piszą "It suggests that the SW map should fit to our abstract setting of the degree $\mathrm{Deg}_{\nabla}^{S^1}$. **Unfortunately, the set of zeros of the SW map is not compact**". To pokazuje, że praca ta, i w związku z tym odpowiednia część przedstawionej rozprawy doktorskiej, jest bezużyteczna. Mnie osobiście nurtuje pytanie dlaczego autorzy pracy [10] wprowadzają swój schemat tj. schemat konstrukcji stopnia $\mathrm{Deg}_{S^1}^{\nabla}(f)$, a nie próbują tego zagadnienia badać wielokrotnie używanym standardowym schematem, gdzie operator A rozpatruje się nie jako odwzorowanie z $L^2(S^1;\mathbb{R}^{2n})$ w siebie, ale z $H^1(S^1;\mathbb{R}^{2n})$ w $L^2(S^1;\mathbb{R}^{2n})$. W takim wypadku jest on ciągły, więc ograniczony, czyli zadaje izomorfizm uzupełnienia ortogonalnego jądra A na uzupełnienie kojądra A, i można obie stron równości (modulo te dwie podrzestrzenie izomorficzne z $\mathbb{R}^{2n}$) przemnożyc przez A^{-1} uzyskując równanie postaci $\mathrm{Id} - F$, gdzie F jest pełnociagły (zwarty) i współzmienniczy? Nie ma też żadnej wzmianki, z argumentacją, że używanie odwzorowań lokalnych i otopii jest niezbędne do badania omawianego zagadnienia.

Równie znaczącym argumentem podkreślającym bezużyteczność tej części rozprawy doktorskiej jest brak w sformułowaniu Twierdzenia 5.24 (a wcześniej dyskusji) jakiejkolwiek roli symetrii problemu. Znowu, wydaje mi się, że doktorant (i współautorzy pracy [10]) nie ma świadomości istoty stosowania stopnia G-współzmienniczego w analizie nieliniowej. Ogólnie, w przypadku działania grupy zwartej Liego G, stopień współzmienniczy pozwala stwierdzać istnienie rozwiązań (zer) o zadanej symetrii (będących punktami stałymi podgrupy H). Konstrukcja stopnia współzmienniczego, czy jego wersji gradientowej o wartościach w pierścieniu Burnside'a, czy odpowiednio Eulera, pozwala wykorzystywać informacje o relacjach pomiędzy stopniami $\deg(f^H)$, a więc np. niezerowaniem się, dla różnych $H \subset G$, czy wykorzystać strukturę algebraiczną i kombinatoryczną tych prierścieni. Co więcej, przy pomocy tej techniki, + pewne założenia, można stwierdzać istnienie rozwiązań o mniejszej grupie symetrii niż mają pewne już istniejące (bifurkacja rozwiązań ze złamaniem symetrii). Historycznie w analizie nieliniowej określanie niezmienników tego typu zaczęło się przy badaniu rozwiązań okresowych, np. badaniu bifurkacji Hopfa w latach osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych równolegle i niezależnie przez kilka grup, w tym E.N. Dancera [24], K. Gębę i współpracowników [32], [31], czy J. Ize i współpracowników [47] [48], w przypadku gradientowym E.N. Dancera [26], S. Rybickiego [73], [74], [75], [76], i znowu K. Gębę i współpracowników [37], [38], [39], [25], [8], zwykle najpiew dla $G = S^1$ a potem w przypadku dowolnej grupy zwartej Liego. Jednocześnie było jasne, że te wszystkie konstrukcje dają informacje o rozwiązaniach o określonej krotności okresu minimalnego dla $G = S^1$ czy określonej symetrii $H \subset G$ w przypadku dowolnej grupy G. Z czasem okazało się, że są one powiązane i tak naprawdę są albo uogólnieniem, albo uszczególowieniem innych, i istnieją opisane relacje, często formuły, wiążące te niezmienniki. Natomiast w przedstawionej rozprawie nie ma w ogóle precyzyjnych porównań treści formułowanych twierdzeń z wynikami innych autorów i relacji między nimi.

Podsumowując merytoryczną zawartość przedstawionej rozprawy w części pierwszej zawiera ona skomplikowany dowód własności multiplikatywności stopnia współzmienniczego i to tylko dla grupy skończonej i zwartej abelowej, w sytuacji gdy krótki i prosty dowód, której to własności w pełnej ogólności (dla zwartej grupy Liego) jest dostępny w klasycznej literaturze sprzed kilkudziesięciu lat. Co więcej, ten drugi z omawianych faktów można wywieść z wykazanego już wcześniej pierwszego za pomocą bardzo prostego argumentu, bez prowadzenia osobnego dowodu. Przedstawiona w drugiej części konstrukcja stopnia współzmienniczego nie wnosi nic nowego w stan wiedzy o omawianym zagadnieniu.

Przejdźmy teraz do omówienia strony formalnej przedstawionej rozprawy magistra Bartosza Kamedulskiego. Rozprawa ta jest napisana niezbyt ładnym, powiedziałbym niedojrzałym stylem. Rażą zarówno długi wstęp jak i długi wstęp historyczny do rozdziału piątego, które obnażają raczej powierzchowną znajomość tematyki przez autora niż pokazują jego erudycje. Nie ma sensu podawać wszystkich przykładów, ale dla ilustracji podam jeden: "W podobnym czasie Wolfgang Lück w pracy [60] powiązał stopień współzmienniczy z wygodniejszym środowiskiem pierścienia Burnside'a zwartej grupy Liego". Otóż w roku 1987 W. Lück, doktorant T. tom Diecka z roku 1984, a obecnie jeden z najwybitniejszych topologów niemieckich, nie musiał powiązywać stopnia współzmienniczego z pierścieniem Burnside'a, bo wcześniej zrobił to jego promotor [27, [28], [29]. W tej pracy Lück badał czy i kiedy przyporządkowanie $f \mapsto \deg_G(f) := \{\deg(f^H)\} \in C(G)$ jest elementem $A(G)$ dla G-odwzorowania zwartej zamknietej G-rozmaitości M w siebie, a nie tylko $M = S^V$.

Spis literatury omawianej rozprawy jest bardzo długi, ale odniesienia do dużej części wymienionych pozycji są tylko w partiach "historycznych" jeśli nie ma ich w ogóle. Ogólnie w zdecydowanej części są to publikacje dość luźno związane z treścią doktoratu. W kontekście tego co zostało wymienione na temat merytorycznej strony przedstawionej rozprawy rodział szósty "Hipotezy" już nie razi, a właściwie tylko śmieszy. Nie zawiera on żadnej hipotezy, a tylko luźne i ogólne uwagi typu "co warto badać, czym się zajmować, etc.". Zwyczajowo w recenzjach nie zawiera się uwag z sugestiami co można by alternatywnie, czy w przyszłości badać. Jednak ośmielony zarysowaniem perspektyw i zamierzeń doktoranta pozwolę sobie powiedzieć, co ja bym osobiście badał, gdybym był młodym matematykiem i chciał prowadzić badania zagadnień zbliżonych do zawartości rozprawy. Wymieniany powyżej W. Lück zaproponował kilka nierównoważnych definicji pierścienia Burnside'a, dla szerokiej klasy dyskretnych grup nieskończonych, które dają klasyczną definicje w przypadku grup skończonych (*The Burnside ring and equivariant stable cohomotopy for infinite groups*, Pure Appl. Math. Q. 1 (2005), no. 3, Special Issue: In memory of Armand Borel. Part 2, 479–541). Jedna z klas tych grup zawiera grupy krystalograficzne i grupy NEC (nieuklidesowe grupy krystalograficzne). Co więcej, badanie problemów nieliniowych, w tym problemów wariacyjnych z takimi grupami symetrii juz się zaczęło np. w pracy doktorskiej N. Bárcenasa napisanej pod kierunkiem W. Lücka (N. Bárcenas, *Mountain pass theorem with infinite discrete symmetry.* Osaka J. Math. 53 (2016), no. 2, 331–350.) Z drugiej strony duża liczba prac dotyczących układów hamiltonowskich na kratach, czy z wirami na powierzchniach, może dostarczyć bazę przykładów.

W konkluzji, wobec wszystkich argumentów dotyczących merytorycznej zawartości przedstawionej rozprawy wymienionych powyżej, biorąc pod uwagę zarówno wymagania obecnie obowiązującej ustawy "Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce" (Dz.U.2022.0.574 t.j. - Ustawa z dnia 20 lipca 2018 r., art. 187) oraz zwyczajowe wymagania stawiane pracom doktorskim, z przykrością muszę stwierdzić, że przedstawiona rozprawa doktorska magistra Bartosza Kamedulskiego nie powinna być dopuszczona do dalszych etapów przewodu doktorskiego, o co wnioskuję.

Poznań, 22 sierpnia 2022

Elektronicznie podpisany przez Wacław Marzantowicz
DN: cn=Wacław Marzantowicz, givenName=Wacław, sn=Marzantowicz, serialNumber=PNOPL-50061802817, c=PL
Data: 2022.08.22 21:40:44 +02'00'

Art 187.1 Rozprawa doktorska prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną kandydata w dyscyplinie albo dyscyplinach oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej lub artystycznej.

2. Przedmiotem rozprawy doktorskiej jest oryginalne rozwiązanie problemu naukowego, oryginalne rozwiązanie w zakresie zastosowania wyników własnych badań naukowych w sferze gospodarczej lub społecznej albo oryginalne dokonanie artystyczne.