Wrocław, 24 listopada 2023

dr hab. Szymon Żeberski
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Krzysztofa Kowitza "Wykorzystanie porządku Katětova w badaniach przestrzeni topologicznych i ultrafiltrów"

Wyniki rozprawy doktorskiej "Wykorzystanie porządku Katětova w badaniach przestrzeni topologicznych i ultrafiltrów" napisanej przez mgra Krzysztofa Kowitza można podzielić na dwie zasadnicze części. Pierwsza dotyczy ideałów na zbiorze liczb naturalnych, ich własności i zależności pomiędzy nimi. Druga traktuje o przestrzeniach topologicznych, których własności wyrażone są przy użyciu ideałów.

Rozdzial pierwszy zawiera wprowadzenie podstawowych pojęć występujących w dalszej części pracy.

W rozdziale drugim znajdujemy opis własności oraz zależności pomiędzy wybranymi ideałami na ω. Autor koncentruje sie na trzynastu nastepujących ideałach:

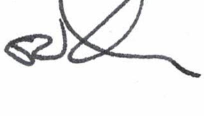
- ideale zbiorów skończonych Fin,
- ideale zbiorów asymptotycznej gęstości zero $\mathcal{I}_d$,
- ideale zbiorów jednostajnej gęstości zero $\mathcal{I}_u$,
- ideale sumowalnym$\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ związanym z szeregiem harmonicznym,
- ideale van der Wardena $\mathcal{W}$,

- ideale $\mathcal{D}$,
- ideale $\mathcal{D}_{fin}$,
- ideale Folkmana $\mathcal{F}$,
- ideale Hindmana $\mathcal{H}$,
- ideale lukowym (ang. lacunary) $\mathcal{L}$,
- ideale cienkim $\mathcal{T}$,
- ideale prawie cienkim $\mathcal{A}$,
- ideale $\mathcal{I}_{PS}$.

Celem przedstawionych w tym rozdziale badań jest sprawdzenie następujących własności:

- gęstość,
- klasa borelowska lub rzutowa,
- jednorodność,
- własność Bolzano-Weierstrassa (BW) oraz trzy inne jej warianty: $FinBW$, hBW, $hFinBW$.

Dla części przypadków odpowiedź była wcześniej znana, co zostało w pracy wyraźnie zaznaczone. Na szczególną uwagę zasługuje Twierdzenie 2.15 o niejednorodności ideału $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ wraz ze zgrabnym dowodem umiejetnie wykorzystującym kilka narzędzi (miedzy innymi Twierdzenie 2.12 oraz Twierdzenie 2.14). Twierdzenie 2.27 stanowiące, że ideał $\mathcal{D}$ ma dziedziczną własność Bolzano-Weierstrassa także wzbudziło moją ciekawość. Zaprezentowany dowód opiera się na dość subtelnej konstrukcji wykorzystującej analogon schematu Cantora. Na podkreslenie zasługują też nietrywialne wyniki (Twierdzenie 2.54, Twierdzenie 2.55)) dotyczące własności, mniej dotychczas zbadaniego, ideału $\mathcal{I}_{PS}$.
Ostatnią część omawianego rozdzialu stanowi stworzenie diagramu zawierań pomiędzy rozważanymi ideałami. Pojawia się tu szereg nowych rezultatów. W mojej ocenie "wyniki negatywne" o braku odpowiedniego zawierania (zwłaszcza Stwierdzenie 2.58 i Stwierdzenie 2.59) wymagały pomysłowości i



pewnego doświadczenia.
Warto dodać, że rozdzial ten z jednej strony porządkuje i, w znaczącym stopniu, uzupełnia aktualny stan wiedzy, z drugiej zaś, pozostawia kilka ciekawych, i jak się wydaje nietrywialnych, problemów związanych najczęściej z jednorodnością ideałów.

Trzeci rozdział rozprawy traktuje o ultrafiltrach na ω związanych z ideałami. Przeanalizowane zostają trzy klasy ultrafiltrów: $\mathcal{I}$-ultrafiltry, słabe $\mathcal{I}$-ultrafiltry oraz $\mathcal{I}$-punkty. Autor, dla pary ideałów $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ oraz rodziny funkcji $\mathcal{F}$ wprowadza współczynnik kardynalny $\mathfrak{fip}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{F})$, dzięki któremu w Twierdzeniu 3.12 otrzymujemy zgrabny warunek gwarantujący isntnienie $\mathcal{I}$-ultrafiltru, który nie jest $\mathcal{J}$-punktem.
Autor bada związki wprowadzonych ultrafiltrów z klasycznymi pojęciami P-punktów i Q-punktów. Analizuje także zależność istnienia wprowadzonych ultrafiltrów od własności ideałów wyrażonych w terminach porządku Katětova oraz szeregu innych wczeniej zdefiniowanych porządków o podobnym charakterze. Obszerną charakteryzację, przy załozeniu CH (lub niekiedy $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$), dostajemy w Twierdzeniu 3.21.
W dalszej części odnajdujemy nierówność $\operatorname{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{fip}(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{F})$ dla F_σ ideału $\mathcal{J}$ oraz $\mathcal{I}$ nie będacego słabym P-punktem (Twierdzenie 3.29). Dowód jest skomplikowany, używa między innymi klasycznej charakteryzacji F_σ ideałów pochodzącej od Soleckiego oraz interesującej konstrukcji pewnego częściowego porządku. Wnioskiem z tego twierdzenia jest istnienie, przy założeniu $\operatorname{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$, P-punktu, który nie jest $\mathcal{J}$-punktem dla F_σ ideału $\mathcal{J}$. Stanowi to uogólnienie wczesniejszych wyników Flaškowej.
Autor dokonuje też wnikliwej analizy związków $\mathcal{I}$-ultrafiltrów z Q-punktami oraz ultrafiltami selektywnymi (podrozdzialy 3.10 i 3.11).
Końcową część omawianego rozdzialu stanowią interesujące zastosowania wcześniejszych wyników do pokazania własności ideałów $\mathcal{L}$ oraz $\mathcal{T}$ (Wnioski 3.55, 3.57, 3.58).

Kolejny rozdział dotyczy przestrzeni topologicznych. Rozważane są tu tak zwane $\mathcal{I}$-przestrzenie. W szczególności badane są przestrzenie Hindmanna, van der Waerdena, Folkmana, różnicowo zwarte. jednym z podstawowych obiektów rozważań staje się tu przestrzeń postaci $\Phi(\mathcal{A})$, czyli uzwarcenie Aleksandrowa przestrzeni Mrówki. Twierdzenie 4.6 orzeka, że tak zdefiniowana przestrzeń nie jest przestrzenią różnicowo zwartą dla dowolnego wyboru m.a.d. rodziny $\mathcal{A}$. W kolejnym podrozdziale autor buduje narzędzia (Lematy 4.7, 4.8, 4.9) służące finalnie do skonstruowania, przy założeniu $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, $\mathcal{I}$-przestrzeni postaci $\Phi(\mathcal{A})$ dla F_σ ideału $\mathcal{I}$. Daje to natychmiastowy wnio-

sek o niesprzeczności istnienia $\mathcal{I}$-przestrzeni, która nie jest różnicowo zwarta. Jest to uogólnienie wcześniejszych wyników Shi.
W dalszej części tego rozdzialu znajdujemy konstrukcję ośrodkowej T_1 przestrzeni Hindmanna, która nie jest $\mathcal{I}$-przestrzenią dla ideału $\mathcal{I}$, który nie jest mniejszy równy od ideału $\mathcal{H}$ w porządku Katětova. Twierdzenie to wymaga dodatkowego założenia CH. Trzeba tu zaznaczyć, ze dowód jest dość żmudny i wymagal sporego nakładu pracy i pomysłowości.
Ostatnie twierdzenie tego rozdziału stanowi o istnieniu przestrzeni Hindmana, która nie jest $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$-przestrzenią, przy załozeniu CH. Jego dowód opiera sie na poprzednim twierdzeniu oraz nietrywialnym fakcie, że $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} \not\leq_K \mathcal{H}$.

Rozdział ostatni podsumowuje zależności pomiedzy rozważanymi wcześniej ideałami. Koncentruje się, oprócz wcześniej eksplorowanego porządku Katětova, na porządkach Rudina-Keislera oraz Rudina-Blassa.

Rozprawa mgra Krzysztofa Kowitza jest dość obszerna. Autor nie ustrzegł się szeregu niezgrabności językiowych.

Brakuje mi także komentarza przy zdefiniowaniu własności BW, hBW, FinBW, hFinBW. Podobna uwaga dotyczy także AP-zbiorów i DP-zbiorów. W mojej ocenie, choćby dla porządku, warto rozszyfrować te oznaczenia. Nie zawsze autor jest konsekwentny w nazewnictwie. Wprowadza ideał cienki i prawie cienki, a obok niego ideał lacunary oraz zbiory piecewise syndetic. Może lepiej w tym kontekście byłoby, nawet niezgrabnie, przetłumaczyć wszystkie nazwy na język polski, aby zachować spójność.
Powyższe uwagi nie wpływają istotnie na rzeczy najbardziej istotne, czyli klarowne przedstawienie definicji, wyników i, przede wszystkim, rozumowań. Całość rozprawy jest uporządkowana i dobrze zorganizowana. Autor w sposób możliwie przystępny prezentuje dowody swoich twierdzeń. Warto także podkreślić dobry balans pomiędzy prezentacją aktualnego stanu wiedzy oraz własnych rezultatów. Pozwala to czytelnikowi na spojrzenie na wyniki mgra Krzysztofa Kowitza w kontekście aktualnego stanu wiedzy w rozważanej dziedzinie. Dobre wrażenie robią również stawiane przez autora problemy, zarówno te dotyczące ideałów, jak i te dotyczące przestrzeni topologicznych. Pokazują one, że rozważana tematyka nie wyczerpała się i może nadal dostarczać inspiracji do dalszych badań.

Tematyka podjęta w rozprawie jest ciekawa, aktualna. Budziła i nadal budzi zainteresowanie oraz jest eksplorowana przez specjalistów, w szczególności: Jörga Brendle, Janę Flašková, Michaela Hrušáka, Menachema Kojmana, Lingshenga Shi.
Rozprawa mgra Krzysztofa Kowitza pokazuje jego szeroką wiedzę w pre-

zentowanej tematyce. Przedstawione nowe rezultaty używają różnych, często nietrywialnych, narzędzi. Autor przedstawia ciekawe kombinatoryczne konstrukcje. Używa twierdzenia Ramseya. Sprawnie posługuje się również aparatem deskryptywnej teorii mnogości. W konstrukcjach filtrów oraz przestrzeni topologicznych związanych z porządkiem Katětova biegle stosuje charakteryzacje z literatury lub, jeśli zachodzi taka potrzeba, modyfikuje istniejące lub stwarza nowe norzędzia.
Część przedstawionych rezultatów to wyniki pokazujące niesprzeczność istnienia pewnych obiektów z teorią ZFC. W tej dziedzinie autor wykorzystuje obok hipotezy continuum, aksjomat Martina oraz pewne jego szczególne warianty, które można wyrazić poprzez współczynniki kardynalne, na przykład $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$. Autor wprowadza też nowe współczynniki dotyczące ideałów i rodzin funkcji.
Szeroki wachlarz używanych narzędzi oraz dobra znajomość wcześniejszych wyników w badanych zagadnieniach świadczą o erudycji mgra Krzysztofa Kowitza oraz o jego wysokiej kulturze matematycznej.

Rozprawa "Wykorzystanie porządku Katětova w badaniach przestrzeni topologicznych oraz ultrafiltrów" mgra Krzysztofa Kowitza spełnia zarówno ustawowe, jak i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę przeto o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie mgra Krzysztofa Kowitza do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Szymon Żeberski