STRESZCZENIE ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

pt.: **„Wykorzystanie porządku Katětova w badaniach przestrzeni topologicznych oraz ultrafiltrów"**

napisanej przez **mgr Krzysztofa Kowitz**

pod kierunkiem prof. UG, dr. hab. Rafała Filipów oraz dr. Adama Kweli

W rozprawie doktorskiej zajęliśmy się trzynastoma wybranymi ideałami i zbadaliśmy ich podstawowe własności. Uzyskaliśmy również ogólne twierdzenia charakteryzujące wszystkie ideały o pewnych własnościach. Szczególnie zainteresowały nas własności związane ze zbieżnością ideałową i strukturą porządkową ideałów. Motywem przewodnim tej pracy jest porządek Katětova nazwany na cześć czeskiego matematyka Miroslava Katětova, który wykorzystaliśmy w badaniu przestrzeni topologicznych i ultrafiltrów. Inspiracją naszych badań były prace Brendlego, Flaškovej i Kojmana.

Dla kilku ideałów związanych z twierdzeniami kombinatorycznymi (np. Hindmana, van der Waerdena, Browna, Folkmana) rozważyliśmy zbieżność ideałową, badając własności BW, hBW, FinBW, hFinBW wprowadzone w pracy [21] przez Filipowa, Mrożka, Recława i Szucę. Następnie zbadaliśmy czy przedstawione przez nas ideały są jednorodne. Pojęcie jednorodności ideałów wprowadzili Kwela z Trybą i podali charakteryzację ideałów jednorodnych w artykule [54]. Wykorzystaliśmy tę charakteryzację, by pokazać, że niektóre przedstawione przez nas ideały są jednorodne. Na koniec drugiego rozdziału zaprezentowaliśmy wykres przedstawiający zawierania między danymi ideałami (jedyną niewiadomą pozostaje hipoteza Erdősa-Turána).

W rozdziale trzecim zainteresowały nas znane dotąd rodzaje ultrafiltrów takie jak: selektywne ultrafiltry, P-punkty, czy Q-punkty. Zajmowali się nimi między innymi tacy znani matematycy jak: Baumgartner, Brendle, Hrušák. Wprowadziliśmy nowy porządek i dwa współczynniki kardynalne, które posłużyły do napisania najważniejszego twierdzenia w tym rozdziale dającego charakteryzację za pomocą porządku Katětova na istnienie $\mathcal{I}$-ultrafiltru, który nie jest $\mathcal{J}$-ultrafiltrem. Rozróżniliśmy także niektóre rodzaje $\mathcal{I}$-ultrafiltrów. Na przykład, pokazaliśmy, że niesprzecznie istnieje $\mathcal{D}_{fin}$-ultrafiltr, który nie jest Q-punktem [53]. Na końcu rozdziału wykorzystaliśmy uzyskane wyniki do pokazania, że niektóre ideały nie są jednorodne.

Rozdział czwarty dotyczy przestrzeni topologicznych takich jak: różnicowo zwarte, Hindmana, van der Waerdena, Folkmana. W pracach [50, 49, 51, 24, 63, 27, 46] tymi przestrzeniami zajmowali się następujący matematycy: Filipów, Flašková, Jones, Kojman, Shelah, Shi. Wzmocniliśmy wyniki Shi dotyczące przestrzeni różnicowo zwartych, zamieniając założenie hipotezy continuum na aksjomat Martina. Zbadaliśmy w jaki sposób za pomocą porządku Katětova możemy rozróżnić dane dwie klasy przestrzeni albo w jaki sposób pokazać zawieranie między nimi. Jako zastosowanie ogólnych wyników pokazaliśmy, że przy założeniu hipotezy continuum istnieje przestrzeń Hindmana, która nie jest $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$-przestrzenią.

W ostatnim rozdziale wzięliśmy pod uwagę ideały z rozdziału pierwszego i ich relacje w porządkach (dodaliśmy porządki: Rudin-Keislera i Rudin-Blassa). Sprawdziliśmy te relacje, których nie dało się osiągnąć przez poprzednie rozważania i które nie były dotąd znane. Pracę podsumowuje tabela, w której zebraliśmy znane dotąd wyniki i uzyskane w tej rozprawie. Przedstawiliśmy tam, jak mają się do siebie rozważane przez nas ideały w danych porządkach.