Autoreferat

dr Adam Kwela

Spis treści

1 Imię i nazwisko

Adam Kwela

2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe lub artystyczne – z podaniem podmiotu nadającego stopień, roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej

Dyplom doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki
Instytucja: Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
Tytuł rozprawy doktorskiej: Kombinatoryczne i deskryptywne własności ideałów na zbiorach przeliczalnych
Promotor: prof. dr hab. Piotr Zakrzewski
Promotor pomocniczy: dr Marcin Sabok
Data nadania: 24 października 2014 r.

Dyplom magistra matematyki
Instytucja: Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Uniwersytet Gdański
Tytuł pracy magisterskiej: Porządek Rudin-Keislera
Promotor: prof. dr hab. Ireneusz Recław
Data nadania: 8 lipca 2010 r.

3 Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych

od 1 stycznia 2015 r.: adiunkt w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego

4 Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.)

4.1 Cykl artykułów naukowych: „Teoriomnogościowe i topologiczne zastosowania porządku Katětova"

Na serię habilitacyjną składa się 7 artykułów naukowych (w kolejności, w jakiej zostaną omówione poniżej):

[H1] Adam Kwela, *Unboring ideals*, Fund. Math. **261** (2023), no. 3, 235–272.

[H2] Rafał Filipów, Krzysztof Kowitz, Adam Kwela, and Jacek Tryba, *New Hindman spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **150** (2022), no. 2, 891–902. MR 4356195

[H3] Rafał Filipów, Krzysztof Kowitz, and Adam Kwela, *Characterizing existence of certain ultrafilters*, Ann. Pure Appl. Logic **173** (2022), no. 9, Paper No. 103157. MR 4448270

[H4] Adam Kwela, *On extendability to F_σ ideals*, Arch. Math. Logic **61** (2022), no. 7-8, 881–890. MR 4495906

[H5] Rafał Filipów and Adam Kwela, *Yet another ideal version of the bounding number*, J. Symb. Log. **87** (2022), no. 3, 1065–1092. MR 4472525

[H6] Adam Kwela, *On a conjecture of Debs and Saint Raymond*, Fund. Math. **260** (2023), no. 1, 67–76. MR 4516186

[H7] Adam Kwela and Paolo Leonetti, *Density-like and generalized density ideals*, J. Symb. Log. **87** (2022), no. 1, 228–251. MR 4404626

W całym autoreferacie pozycje bibliograficzne [H1]-[H7] odnoszą się do powyższego cyklu, pozycje [O1]-[O20] odnoszą się do moich pozostałych publikacji (których pełna lista i omówienie znajduje się w rozdziale 4.2), natomiast pozostałe pozycje ([E1]-[E∞]) są artykułami innych autorów i zostały wymienione na końcu autoreferatu.

4.1.1 Wstęp

Rodzinę $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(M)$ nazwiemy ideałem na zbiorze M, jeśli jest zamknięta na podzbiory i skończone sumy swoich elementów. Jeśli $\mathcal{I}$ jest ideałem na M, to $\mathcal{I}^\star = \{A \subseteq M : M \setminus A \in \mathcal{I}\}$ jest jego filtrem dualnym (rodziną zamkniętą na nadzbiory i skończone przekroje), natomiast $\mathcal{I}^+ = \{A \subseteq M : A \notin \mathcal{I}\}$ jest rodziną zbiorów $\mathcal{I}$-pozytywnych. W dalszej części, używając słowa „ideał", będę dodatkowo zakładał, że jest to ideał zawierający $[M]^{<\omega}$ (a więc $\bigcup \mathcal{I} = M$) oraz spełniający $M \notin \mathcal{I}$. Ponadto, o ile nie będzie to specjalnie zaznaczone, będę rozpatrywał jedynie ideały na nieskończonych zbiorach przeliczalnych. Niektóre definicje i wyniki dla większej przejrzystości będę formułował jedynie dla ideałów na ω (dla każdego nieskończonego zbioru przeliczalnego M można znaleźć jego bijekcję z ω i, używając jej, „przerzucić" ideał z M na ω, zachowując wszystkie potrzebne nam jego własności).

Poprzez utożsamienie podzbiorów M z ich funkcjami charakterystycznymi, ideały na M możemy traktować jako podzbiory przestrzeni topologicznej 2^M z topologią produktową (gdzie na $2 = \{0, 1\}$ rozważamy topologię dyskretną), a więc możemy mówić np. o ideałach borelowskiej klasy $\mathbf{\Sigma^0_2}$ czy też ideałach z własnością Baire'a.

Dla ideałów $\mathcal{I}$ oraz $\mathcal{J}$ napiszemy $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$, gdy istnieje funkcja $f : \bigcup \mathcal{J} \to \bigcup \mathcal{I}$, taka że $f^{-1}[A] \in \mathcal{J}$ dla wszystkich $A \in \mathcal{I}$. Wprawdzie relacja $\leq_K$ jest jedynie quasi-porządkiem, ale przyjęło się nazywać ją porządkiem Katětova. M. Katětov wprowadził ją w latach 60. w [E64], a następnie zastosował w [E65] i [E66] do badania klas Baire'a względem zbieżności ideałowej (zob. rozdział 4.1.7). Od tego czasu porządek Katětova był dogłębnie badany zarówno jako wygodne narzędzie (np. do klasyfikacji przy pomocy ideałów borelowskich niedefiniowalnych obiektów jakimi są ultrafiltry – zob. [E54] oraz rozdział 4.1.4), jak i sam w sobie (np. H. Sakai w [E83] pokazał, że $\leq_K$ na ideałach borelowskich jest σ-skierowany). W ostatnich latach szczególnie duży wkład w rozwój naszej wiedzy o porządku Katětova ma grupa matematyków związana z M. Hrušákiem – np. O. Guzmán-González i D. Meza-Alcántara pokazali w [E50], że nawet wśród P-ideałów borelowskiej klasy $\mathbf{\Sigma^0_2}$ istnieją antyłańcuchy długości $\mathfrak{c}$ i łańcuchy długości $\mathfrak{b}$ w porządku Katětova ($\mathcal{I}$ jest P-ideałem, gdy dla każdego ciągu $(A_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{I}^\omega$ istnieje taki zbiór $A \in \mathcal{I}$, że $|A_n \setminus A| < \omega$ dla wszystkich $n \in \omega$).

Powiemy, że ideał $\mathcal{I}$ na M jest gęsty, gdy w każdym $A \in [M]^\omega$ można znaleźć $B \in [A]^\omega \cap \mathcal{I}$. Dla ideału $\mathcal{I}$ oraz zbioru $A \in \mathcal{I}^+$ definiujemy ideał:

$$\mathcal{I} \restriction A = \{A \cap B : B \in \mathcal{I}\}.$$

Przykładami ideałów badanych w literaturze, które będą nas interesowały w tym autoreferacie, są:

- $\mathrm{Fin} = \{A \subseteq \omega : |A| < \omega\}$ (niegęsty P-ideał borelowskiej klasy $\mathbf{\Sigma^0_2}$),
- $\mathcal{I}_{1/n} = \left\{A \subseteq \omega : \sum_{n\in A} \frac{1}{n+1} < \infty\right\}$ (gęsty P-ideał borelowskiej klasy $\mathbf{\Sigma^0_2}$),
- $\mathcal{I}_d = \left\{A \subseteq \omega : \lim_{n\to\infty} \frac{|A\cap n|}{n+1} = 0\right\}$ (gęsty P-ideał borelowskiej klasy $\mathbf{\Pi^0_3}$; korzystam tutaj z teoriomnogościowej konwencji: $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$),
- $\mathrm{Fin}^2 = \left\{A \subseteq \omega^2 : \left\{n \in \omega : A_{(n)} \notin \mathrm{Fin}\right\} \in \mathrm{Fin}\right\}$, gdzie $A_{(n)} = \{k \in \omega : (n, k) \in A\}$ (gęsty nie-P-ideał borelowskiej klasy $\mathbf{\Sigma^0_4}$),
- conv składający się z tych $A \subseteq [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, które mają tylko skończenie wiele punktów skupienia (gęsty nie-P-ideał borelowskiej klasy $\mathbf{\Sigma^0_4}$).

Łatwo zauważyć, że ideał $\mathcal{I}$ jest gęsty wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{I} \not\leq_K \mathrm{Fin}$. W rozdziałach 4.1.2, 4.1.3 i 4.1.4 będziemy szukać podobnych w formie (również używających porządku Katětova) charakteryzacji: istnienia pewnych przestrzeni ciągowo zwartych czy też istnienia pewnych klas ultrafiltrów. W rozdziałach 4.1.5 i 4.1.7, odpowiadając na pytania M. Hrušáka oraz G. Debsa i J. Saint Raymonda, pokażemy ograniczenia tego podejścia. Z kolei w rozdziałach 4.1.6 i 4.1.8 zajmiemy się zagadnieniami niezwiązanymi bezpośrednio z porządkiem Katětova (np. rozwiążemy problem postawiony przez P. Borodulina-Nadzieję, B. Farkasa i G. Plebanka, dotyczący istnienia pewnych P-ideałów), jednak w dowodach niektórych twierdzeń będziemy korzystać z wyników dotyczących tego porządku.

4.1.2 Przestrzenie ciągowo zwarte względem ideału

W artykule [H1] zajmowałem się pewną naturalną modyfikacją przestrzeni ciągowo zwartych, dającą kontrolę nad wielkością podciągu zbieżnego: jeśli $\mathcal{I}$ jest ideałem na ω, to powiemy, że przestrzeń topologiczna X jest $\mathrm{FinBW}(\mathcal{I})$, gdy każdy ciąg $(x_n)_{n\in\omega}$ w X posiada zbieżny podciąg $(x_n)_{n\in A}$ indeksowany pewnym $A \in \mathcal{I}^+$. Oczywiście, $\mathrm{FinBW}(\mathrm{Fin})$ jest klasą przestrzeni ciągowo zwartych oraz dla każdego ideału $\mathcal{I}$ i każdej przestrzeni topologicznej X mamy:

$$X \text{ jest skończona} \implies X \text{ jest } \mathrm{FinBW}(\mathcal{I}) \implies X \text{ jest } \mathrm{FinBW}(\mathrm{Fin}).$$

Przestrzenie tego typu są od ponad dwudziestu lat badane w kontekście kilku konkretnych ideałów definiowalnych, głównie związanych z kombinatoryką nieskończoną i teorią Ramseya, m.in. przez M. Kojmana ([E68]) i J. Flaškovą ([E46]) – szerzej jest to opisane w rozdziale 4.1.3. Z kolei w pracach [E41] i [E43] dogłębnie badano ideały $\mathcal{I}$, dla których odcinek $[0,1]$ jest $\mathrm{FinBW}(\mathcal{I})$. Jak zauważył D. Meza-Alcántara w [E75, Section 2.7], takie ideały posiadają przyjemną charakteryzację używającą porządku Katětova: $[0,1]$ jest $\mathrm{FinBW}(\mathcal{I})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{conv} \not\leq_K \mathcal{I}$.

W [H1] zdefiniowałem nowy ideał $\mathcal{BI}$ klasy $\mathbf{\Sigma^0_4}$, taki że dla każdego ideału $\mathcal{I}$ zachodzą poniższe implikacje oznaczone strzałkami:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{I} \text{ rozszerza się do ideału klasy } \mathbf{\Sigma^0_2} \arrow[d, "\text{oczywiste}"] \arrow[dr, "{[E41,\ 3.4]+[E75,\ Sec.\ 2.7]}"] & \\
\mathcal{I} \text{ rozszerza się do ideału klasy } \mathbf{\Pi^0_4} \arrow[d, "{[E11]+[E33]^1}"] & \mathrm{conv} \not\leq_K \mathcal{I} \arrow[d, "{[H1,\ 4.6]}"] \\
\forall_{A\in\mathcal{I}^+}\ \mathrm{Fin}^2 \not\leq_K \mathcal{I}\restriction A \arrow[r, "{[H1,\ 4.10]}"] & \mathcal{BI} \not\leq_K \mathcal{I} \arrow[d, "{[H1,\ 4.6]}"] \\
& \mathrm{Fin}^2 \not\leq_K \mathcal{I}
\end{tikzcd}$$

Co więcej, dla każdego ideału $\mathcal{I}$ mamy:

(a) [H1, Theorem 6.5]: $\mathrm{Fin}^2 \not\leq_K \mathcal{I}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje nieskończona przestrzeń Hausdorffa $\mathrm{FinBW}(\mathcal{I})$.

(b) [H1, Proposition 6.2 i 6.3]: $\mathcal{BI} \not\leq_K \mathcal{I}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przestrzeń Hausdorffa $\mathrm{FinBW}(\mathcal{I})$, która nie jest sumą rozłączną skończenie wielu jednopunktowych uzwarceń przestrzeni dyskretnych.

(c) [H1, Theorem 6.6]: Przy założeniu hipotezy continuum (CH), $\mathcal{BI} \not\leq_K \mathcal{I}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje nieprzeliczalna ośrodkowa przestrzeń Hausdorffa, która jest $\mathrm{FinBW}(\mathcal{I})$ (implikacja „$\Leftarrow$" jest prawdziwa w ZFC).

(d) [H1, Proposition 6.1]: Jeśli $\mathrm{Fin}^2 \not\leq_K \mathcal{I} \restriction A$ dla wszystkich $A \in \mathcal{I}^+$, to ω_1 z topologią porządkową jest $\mathrm{FinBW}(\mathcal{I})$.

Ideał $\mathcal{BI}$ pozwala również odpowiedzieć na pytanie postawione przez M. Hrušáka w [E54, Question 5.18], a następnie powtórzone w [E55, Question 5.10]: Czy dla każdego ideału borelowskiego $\mathcal{I}$ mamy $\mathrm{Fin}^2 \not\leq_K \mathcal{I}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{I}$ rozszerza się do ideału klasy $\mathbf{\Pi^0_3}$? Okazuje się, że $\mathrm{Fin}^2 \not\leq_K \mathcal{BI}$, ale $\mathcal{BI}$ nie rozszerza się do ideału klasy $\mathbf{\Pi^0_3}$ ([H1, Example 7.1]).

[1] W [H1, Proposition 4.9] jest szczegółowo opisane, jak ta implikacja wynika z [E11] i [E33].

Pokazałem również, zakładając aksjomat Martina dla σ-scentrowanych częściowych porządków (MA(σ-centered)), że jeśli $\mathcal{I}$ jest koanalitycznym ideałem spełniającym warunek $\mathrm{Fin}^2 \not\leq_K \mathcal{I} \restriction A$ dla wszystkich $A \in \mathcal{I}^+$ (w szczególności, jeśli $\mathcal{I}$ jest klasy $\mathbf{\Pi^0_4}$), to dla każdego ideału $\mathcal{J}$ mamy: $\mathcal{J} \not\leq_K \mathcal{I}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przestrzeń Hausdorffa FinBW($\mathcal{I}$), która nie jest FinBW($\mathcal{J}$) (implikacja „$\Leftarrow$" jest prawdziwa w ZFC, a dowód „$\Rightarrow$" wykorzystuje pewną grę ideałową opisaną w rozdziale 4.1.6). Z drugiej strony, powyższego wyniku nie można rozciągnąć na wszystkie ideały $\mathcal{I}$, gdyż istnieje taki ideał $\mathcal{I}$ klasy $\mathbf{\Sigma^0_4}$, że $\mathcal{I}_d \not\leq_K \mathcal{I}$, ale każda przestrzeń FinBW($\mathcal{I}$) jest też FinBW($\mathcal{I}_d$) ([H1, Example 10.6]).

4.1.3 Przestrzenie Hindmana

Dla $D \in [\omega]^\omega$ będziemy stosować oznaczenie:

$$FS(D) = \left\{ \sum_{n \in F} n : \ F \in [D]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \right\}.$$

Powiemy, że ciąg $(x_n)_{n \in FS(D)}$ w przestrzeni topologicznej X jest IP-zbieżny do $x \in X$, gdy dla każdego otwartego otoczenia U punktu x istnieje takie $k \in \omega$, że $x_n \in U$ dla wszystkich $n \in FS(D \setminus k)$ (ten rodzaj zbieżności został wprowadzony przez H. Furstenberga i B. Weissa w [E48] w kontekście układów dynamicznych). W pracy [E67] M. Kojman zdefiniował przestrzenie Hindmana jako te, w których dla każdego ciągu $(x_n)_{n \in \omega}$ można znaleźć taki zbiór $D \in [\omega]^\omega$, że $(x_n)_{n \in FS(D)}$ jest IP-zbieżny. Później, wspólnie z S. Shelahem w [E69], pokazał, że przy założeniu CH istnieje przestrzeń Hausdorffa FinBW($\mathcal{W}$), która nie jest Hindmana, gdzie $\mathcal{W}$ jest ideałem składającym się z tych $A \subseteq \omega$, które nie zawierają dowolnie długich skończonych ciągów arytmetycznych. O ile mi wiadomo, otwartym pozostaje pytanie o istnienie takiej przestrzeni w ZFC.

W [E60] A. Jones wzmocnił powyższy wynik, zastępując CH przez MA(σ-centered) oraz zapytał o to, czy niesprzecznie istnieje przestrzeń Hindmana, która nie jest FinBW($\mathcal{W}$). Powyższe pytanie było motywacją pracy [H2]. Przed sformułowaniem jej wyników zdefiniujmy ideał Hindmana:

$$\mathcal{H} = \left\{ A \subseteq \omega : \ \forall_{D \in [\omega]^\omega} \ FS(D) \not\subseteq A \right\}$$

(rodzina ta, klasy $\mathbf{\Pi^1_1}$, jest ideałem na mocy twierdzenia Hindmana).

Miałem duży wkład w następujące dwa wyniki:

(a) [H2, Theorem 2.5]: (CH) Jeśli $\mathcal{I} \not\leq_K \mathcal{H}$, to istnieje ośrodkowa przestrzeń Hindmana, która nie jest FinBW($\mathcal{I}$).

(b) [H2, Theorem 3.2]: $\mathcal{I}_{1/n} \not\leq_K \mathcal{H}$, a więc przy założeniu CH istnieje przestrzeń Hindmana, która nie jest FinBW($\mathcal{I}_{1/n}$) – jest to odpowiedź na pytanie postawione przez J. Flaškovą podczas 22nd Summer Conference on Topology and its Applications (2007).

Konstrukcja przestrzeni z punktu (a) różni się od tej zaproponowanej przez M. Kojmana i S. Shelaha w [E69], a następnie zmodyfikowanej przeze mnie w [H1] (gdzie główną częścią dowodu jest znalezienie odpowiedniej maksymalnej rodziny prawie rozłącznej, a następnie wykorzystanie jednopunktowego uzwarcenia przestrzeni Mrówki zadanej przez tę rodzinę) – nie udało się pokazać, że otrzymana przestrzeń jest Hausdorffa, jednak udowodniliśmy, że granice (jak również IP-granice) ciągów w tej przestrzeni są wyznaczone jednoznacznie.

Korzystając z [H2, Proposition 1.1] oraz opisanego w poprzednim rozdziale [H1, Theorem 6.6], otrzymujemy następującą charakteryzację: (CH) $\mathcal{BI} \not\leq_K \mathcal{I}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przestrzeń FinBW($\mathcal{I}$), która nie jest Hindmana ([H1, Corollary 11.5]). Co więcej, jeśli $\mathcal{I}$ rozszerza się do ideału klasy $\mathbf{\Pi^0_4}$, to CH można zastąpić przez MA(σ-centered) (na mocy [H2, Proposition 1.1] i [H1, Corollary 6.8]). Jest to rozszerzenie na większą klasę ideałów wspomnianego wcześniej twierdzenia M. Kojmana i S. Shelaha z [E69], jak również wyniku J. Flaškovej z [E46], gdzie jest to pokazane dla wszystkich ideałów borelowskiej klasy $\mathbf{\Sigma^0_2}$.

Wracając do pytania A. Jonesa, $\mathcal{W}$ jest ideałem klasy $\mathbf{\Sigma^0_2}$, a więc, na mocy [H2, Proposition 2.6], jeśli $\mathcal{W} \leq_K \mathcal{H}$, to każda przestrzeń Hindmana jest FinBW($\mathcal{W}$). Używając punktu (a) i zakładając, że zdanie „$\mathcal{W} \leq_K \mathcal{H}$" jest rozstrzygalne w ZFC,[2] sprowadziliśmy to pytanie do problemu czysto kombinatorycznego (którego jednak nie udało nam się rozwiązać): czy $\mathcal{W} \leq_K \mathcal{H}$? Powyższe rozumowanie jest prawdziwe dla każdego ideału definiowalnego $\mathcal{I}$ klasy $\mathbf{\Sigma^0_2}$, dla którego „$\mathcal{I} \leq_K \mathcal{H}$" nie jest niezależne od ZFC (zob. [H2, Corollary 2.8], w którego sformułowaniu brakuje założenia, że zdanie „$\mathcal{I} \leq_K \mathcal{H}$" jest rozstrzygalne w ZFC; zob. też [H1, Corollary 11.5(b)]).

4.1.4 $\mathcal{I}$-ultrafiltry

Jeśli $\mathcal{I}$ jest ideałem, to ultrafiltr (filtr maksymalny ze względu na relację zawierania) $\mathcal{U}$ na ω nazwiemy $\mathcal{I}$-ultrafiltrem, gdy dla każdej funkcji $f : \omega \to \bigcup\mathcal{I}$ istnieje taki zbiór $A \in \mathcal{U}$, że $f[A] \in \mathcal{I}$ (lub, równoważnie, używając $\leq_K$: gdy $\mathcal{I} \not\leq_K \mathcal{U}^\star$, gdzie $\mathcal{U}^\star$ jest ideałem dualnym do $\mathcal{U}$). Pojęcie to zostało wprowadzone przez J. Baumgartnera w [E13] i od tego czasu było wielokrotnie wykorzystywane w literaturze, m.in. przez J. Brendle'a i J. Flaškovą w [E18] czy też M. Hrušáka w [E54].

$\mathcal{I}$-ultrafiltry pozwalają charakteryzować dobrze znane rodziny ultrafiltrów przy pomocy definiowalnych (zwykle borelowskich) ideałów – z tego względu w kontekście ultrafiltrów szczególnie istotne są właśnie takie ideały.

Przykładem podejścia opisanego w poprzednim akapicie są P-punkty, czyli ultrafiltry na ω dualne do P-ideałów. P-punkty zostały wykorzystane przez W. Rudina w [E81] do rozwiązania pewnego topologicznego problemu dotyczącego uzwarcenia Čecha-Stone'a przestrzeni liczb naturalnych ω. Jak pokazał S. Shelah, istnienie P-punktów jest niezależne od ZFC ([E91]). M. Hrušák zauważył, że dla każdego ultrafiltru $\mathcal{U}$ na ω następujące warunki są równoważne (zob. [E18, Observation 2.1] lub [E75, Theorem 2.8.7]):

- $\mathcal{U}$ jest P-punktem,
- $\mathcal{U}$ jest Fin^2-ultrafiltrem,
- $\mathcal{U}$ jest conv-ultrafiltrem.

Wiadomo, że jeśli istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest $\mathcal{J}$-ultrafiltrem, to $\mathcal{I} \not\leq_K \mathcal{J}$. W pracy [H3] badaliśmy możliwości odwrócenia tej implikacji, uzyskując kilka ogólnych wyników (zob. [H3, Theorem 4.3]; punkt (5) tego twierdzenia jest nieprecyzyjny i powinien być sformułowany w duchu [H1, Corollary 10.5(a)]). Następnie użyliśmy naszych metod w kontekście trzech znanych klas ultrafiltrów: P-punktów, Q-punktów i ultrafiltrów selektywnych. Poniżej skupię się na pierwszej z nich.

Dwa pierwsze z następujących wyników, do których przyczyniłem się w znacznym stopniu, pokazują, jakie cechy Fin^2 i conv są kluczowe dla powyższej charakteryzacji P-punktów:

(a) [H3, Theorem 7.3(1)]: (CH) $\mathcal{I} \not\leq_K \mathrm{Fin}^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest P-punktem (implikacja „$\Leftarrow$" jest prawdziwa w ZFC).

(b) [H3, Theorem 6.3]: (MA(σ-centered)) Ideał borelowski $\mathcal{I}$ rozszerza się do ideału klasy $\mathbf{\Sigma^0_2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje P-punkt, który nie jest $\mathcal{I}$-ultrafiltrem (implikacja „$\Leftarrow$" jest prawdziwa w ZFC; zob. rozdział 4.1.5, gdzie jest analizowana możliwość użycia $\leq_K$ w tym wyniku).

(c) [H3, Corollary 7.2(2)]: Zakładając aksjomat Martina dla przeliczalnych częściowych porządków (MA(ctbl)), jeśli ideał $\mathcal{I}$ zawiera gęsty ideał sumowalny, to istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr, który nie jest P-punktem (ideał jest sumowalny, gdy jest postaci $\mathcal{I}_g = \left\{A \subseteq \omega : \sum_{n \in A} g(n) < \infty\right\}$ dla pewnej funkcji $g : \omega \to [0, \infty)$, takiej że $\sum_{n\in\omega} g(n) = \infty$).

[2] O ile mi wiadomo, nie są znane żadne ideały definiowalne niespełniające tego założenia, tzn. takie ideały definiowalne $\mathcal{I}$ oraz $\mathcal{J}$, dla których „$\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$" byłoby niezależne od ZFC. W przypadku ideałów borelowskich „$\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$" jest absolutne na mocy twierdzenia Shoenfielda o absolutności (zob. [E18] lub [E54, Proposition 1.3]).

Dowód punktu (c) wykorzystuje pewną wprowadzoną przez nas grę $G(\mathcal{I})$ stowarzyszoną z ideałem $\mathcal{I}$ na ω, w której gracz I w swoim pierwszym ruchu gra $k_0 \in \omega$, a następnie w n-tym ruchu gracz II wybiera $G_n \in \mathrm{Fin}$, natomiast gracz I w $(n+1)$-szym ruchu odpowiada parą $(F_n, k_{n+1}) \in \mathrm{Fin} \times \omega$, taką że $F_n \cap G_n = \emptyset$ oraz $|F_n| \leq k_n$. Na koniec gracz I wygrywa, jeśli $\bigcup_{n\in\omega} F_n \in \mathcal{I}^+$. W przeciwnym wypadku wygrywa gracz II. Na mocy twierdzenia Martina o borelowskiej determinacji, gra ta jest zdeterminowana (tzn. jeden z graczy ma strategię wygrywającą) w przypadku ideałów borelowskich.

Powyższa gra jest modyfikacją gry $G'(\mathcal{I})$ badanej przez C. Laflamme'a w [E71], a następnie użytej przez M. Laczkovicha i I. Recława w [E70] (zob. rozdziały 4.1.6 i 4.1.7) – zmiana polega na wymuszeniu na graczu I podania mocy (k_n) swojego ruchu (F_n) przed ruchem gracza II (G_n). Co ciekawe, istnienie strategii wygrywającej gracza II w $G(\mathcal{I})$ daje się wyrazić przy pomocy znanych pojęć: gracz II ma strategię wygrywającą w $G(\mathcal{I})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{I}$ zawiera gęsty ideał sumowalny ([H3, Lemma 5.2(2)]). Z drugiej strony, istnienie strategii wygrywającej gracza I można scharakteryzować kombinatorycznie ([H3, Lemma 5.2(1)]) w sposób umożliwiający udowodnienie punktu (c).

4.1.5 Pytanie dotyczące rozszerzalności do ideałów klasy $\mathbf{\Sigma^0_2}$

Porównując ze sobą punkty (a) i (b) z rozdziału 4.1.4, można chcieć znaleźć charakteryzację rozszerzalności do ideału klasy $\mathbf{\Sigma^0_2}$, używającą porządku Katětova. W diagramie umieszczonym w rozdziale 4.1.2 pojawiła się implikacja udowodniona w [E41, Theorem 3.4]: jeśli ideał $\mathcal{I}$ rozszerza się do ideału klasy $\mathbf{\Sigma^0_2}$, to $\mathrm{conv} \not\leq_K \mathcal{I}$. Co więcej, na mocy [E41, Theorem 4.2], w przypadku P-ideałów analitycznych możliwe jest odwrócenie powyższej implikacji. Powstaje pytanie, czy jest też tak w przypadku wszystkich ideałów borelowskich. Pytanie to postawił M. Hrušák w [E54, Question 5.16], a sześć lat później powtórzył je w [E55, Question 5.8].

Głównym wynikiem pracy [H4] jest negatywna odpowiedź na powyższe pytanie – zdefiniowałem ideał $\mathrm{conv}(\mathcal{I}_d, (1/2^{n+1})_{n\in\omega})$ borelowskiej klasy $\mathbf{\Sigma^0_6}$, który nie rozszerza się do ideału klasy $\mathbf{\Sigma^0_2}$, ale $\mathrm{conv} \not\leq_K \mathrm{conv}(\mathcal{I}_d, (1/2^{n+1})_{n\in\omega})$.

Ideał conv jest generowany przez ciągi zbieżne – każdy zbiór należący do conv daje się pokryć skończenie wieloma takimi ciągami. Ideał $\mathrm{conv}(\mathcal{I}_d, (1/2^{n+1})_{n\in\omega})$ ma podobną definicję – jest on generowany przez ciągi zbieżne, ale tylko te zbiegające odpowiednio szybko.[3]

Metoda użyta w [H4] nie pozwala uzyskać podobnego ideału niższej klasy borelowskiej. Zatem problemem otwartym pozostaje na przykład, czy w przypadku ideałów klasy $\mathbf{\Pi^0_3}$ rozszerzalność do ideału klasy $\mathbf{\Sigma^0_2}$ jest równoważna $\mathrm{conv} \not\leq_K \mathcal{I}$ (co ciekawe, w [H3, Theorem 10.1] pokazaliśmy, że każdy ideał klasy $\mathbf{\Sigma^0_3}$ rozszerza się do ideału klasy $\mathbf{\Sigma^0_2}$). Co więcej, D. Meza-Alcántara spytał, czy dla każdego ideału borelowskiego $\mathcal{I}$ albo $\mathrm{conv} \leq_K \mathcal{I} \restriction A$ dla jakiegoś $A \in \mathcal{I}^+$, albo $\mathcal{I}$ rozszerza się do ideału klasy $\mathbf{\Sigma^0_2}$ ([E75, Question 4.4.6]). Problem ten pozostaje otwarty.

4.1.6 Ideałowe liczby $\mathfrak{b}$

Dla ideału $\mathcal{I}$ na ω oraz $g, h \in \omega^\omega$ wprowadźmy oznaczenia:

$$\mathcal{D}_\mathcal{I} = \left\{ f \in \omega^\omega : \ \forall_{n\in\omega}\ f^{-1}[\{n\}] \in \mathcal{I} \right\},$$

$$g \leq_\mathcal{I} h \iff \{n \in \omega : \ g(n) > h(n)\} \in \mathcal{I}.$$

Klasyczna liczba $\mathfrak{b}$ jest równa minimalnej mocy zbioru nieograniczonego względem relacji $\leq_{\mathrm{Fin}}$ na ω^ω. Wiadomo też, że jest ona równa minimalnej mocy zbioru nieograniczonego dla relacji $\geq_{\mathrm{Fin}}$ na $\mathcal{D}_{\mathrm{Fin}}$.

Podobne liczby dla $\leq_\mathcal{I}$ na ω^ω w kontekście ideałów maksymalnych (czasem nazywane kofinalnościami ultrapotęg $\omega^\omega/\mathcal{I}$) były szeroko badane np. przez A. Blassa i H. Mildenberger w [E14] i [E76], natomiast w przypadku ideałów borelowskich zajmowali się nimi B. Farkas i L. Soukup w [E39]. W pracy [H5] zbadaliśmy takie liczby względem relacji $\geq_\mathcal{I}$ na $\mathcal{D}_\mathcal{I}$, czyli liczby postaci:

$$\mathfrak{b}(\mathcal{I}) = \min\left\{|\mathcal{F}| : \ \mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}_\mathcal{I} \ \wedge \ \forall_{g\in\mathcal{D}_\mathcal{I}}\ \exists_{f\in\mathcal{F}}\ f \not\geq_\mathcal{I} g\right\}$$

(w [H5] oznaczamy je przez $\mathfrak{b}(\mathcal{I},\mathcal{I},\mathcal{I})$). Dla ideałów maksymalnych $\mathfrak{b}(\mathcal{I})$ było badane w kontekście niestandardowych modeli arytmetyki przez M. Canjara, który pokazał m.in., że przy założeniu $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$ istnieje P-ideał $\mathcal{I}$, taki że $\mathfrak{b}(\mathcal{I})$ jest równe kofinalności $\mathfrak{d}$ ([E23], zob. też [E22]).

[3] W [H4] takie ciągi nazywam ciągami zbiegającymi $\mathcal{I}_d$-*quickly with respect to* $(1/2^{n+1})_{n\in\omega}$.

Nas interesowały w tym kontekście głównie ideały borelowskie. Motywacją był opisany poniżej związek z ideałowymi QN-przestrzeniami badanymi m.in. w Koszycach przez L. Bukovský'ego i jego współpracowników. Dla ideału $\mathcal{I}$ na ω powiemy, że ciąg (x_n) punktów przestrzeni topologicznej X jest $\mathcal{I}$-zbieżny do $x \in X$ (piszemy: $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x$), jeśli dla każdego otwartego otoczenia U punktu x mamy $\{n \in \omega : x_n \notin U\} \in \mathcal{I}$. Powyższa zbieżność w przypadku ideału $\mathcal{I}_d$ nazywa się zbieżnością statystyczną i była badana m.in. przez H. Steinhausa w [E88], a w ogólnym przypadku została wprowadzona przez H. Cartana w [E24] w latach 30.

Ciąg funkcji rzeczywistych $(f_n)_{n\in\omega}$ określonych na pewnym zbiorze X:

- zbiega punktowo względem $\mathcal{I}$ do $f \in \mathbb{R}^X$, jeśli $f_n(x) \xrightarrow{\mathcal{I}} f(x)$ dla wszystkich $x \in X$,
- zbiega quasi-normalnie względem $\mathcal{I}$ do $f \in \mathbb{R}^X$, jeśli istnieje taki ciąg dodatnich liczb rzeczywistych $(\varepsilon_n)_{n\in\omega}$, że $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{I}} 0$ oraz dla wszystkich $x \in X$ mamy:

$$\{n \in \omega : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}.$$

Dla każdego ideału $\mathcal{I}$ na ω zbieżność quasi-normalna względem $\mathcal{I}$ implikuje zbieżność punktową względem $\mathcal{I}$. Ponadto, w [E19] zostało pokazane, że zbieżność quasi-normalna względem Fin jest równoważna zbieżności σ-jednostajnej. W [E21] L. Bukovský, I. Recław i M. Repický badali FinQN-przestrzenie, czyli przestrzenie topologiczne nieodróżniające zbieżności punktowej od zbieżności quasi-normalnej względem Fin ciągów funkcji ciągłych.

Jeśli $\mathcal{I}$ jest ideałem, to przestrzeń topologiczna X jest $\mathcal{I}$QN-przestrzenią, gdy każdy zbieżny punktowo względem $\mathcal{I}$ do 0 ciąg funkcji ciągłych $(f_n)_{n\in\omega} \in \left(\mathbb{R}^X\right)^\omega$ jest też zbieżny quasi-normalnie względem $\mathcal{I}$ do 0. Pojęcie to zostało wprowadzone w [E32]. Aktualnie przestrzenie te są dogłębnie badane w Koszycach m.in. przez M. Repický'ego i J. Šupinę (zob. [E20], [E80], [E86] i [E89]). Okazuje się, że $\mathfrak{b}(\mathcal{I})$ jest minimalną mocą przestrzeni normalnej, która nie jest $\mathcal{I}$QN-przestrzenią (niezależnie zostało to udowodnione w [E80, Theorem 3.4] i [H5, Section 3.4]).

W [E44, Proposition 4.1] zostało pokazane, że $\omega_1 \leq \mathfrak{b}(\mathcal{I}) \leq \mathfrak{c}$ dla każdego ideału $\mathcal{I}$. Miałem duży udział m.in. w następujących wynikach umieszczonych w artykule [H5]:

(a) [H5, Corollary 6.9]: Jeśli $\mathcal{I}$ jest ideałem klasy $\mathbf{\Pi^0_4}$, to $\mathfrak{b}(\mathcal{I}) \leq \mathfrak{b}$.

(b) [H5, Theorem 5.13]: Obliczenie $\mathfrak{b}(\mathcal{I})$ w przypadku, gdy $\mathcal{I}$ jest produktem Fubiniego dwóch ideałów.[4]

(c) [H5, Theorem 7.4]: Istnieje gęsty ideał $\mathcal{S}$ (tzw. ideał Soleckiego) klasy $\mathbf{\Sigma^0_2}$, taki że $\mathfrak{b}(\mathcal{S}) = \omega_1$ (konsekwencją tego wyniku jest fakt, że niesprzecznie istnieje FinQN-przestrzeń, która nie jest $\mathcal{S}$QN-przestrzenią – wcześniej nie był znany żaden ideał o takiej własności).

Porządek Katětova w [H5] nie jest tak kluczowy jak w poprzednio omawianych pracach. Jest on jednak pośrednio używany w dowodzie punktu (a), który wykorzystuje dwa wcześniejsze wyniki. Pierwszym jest twierdzenie G. Debsa i J. Saint Raymonda mówiące, że jeśli $\mathcal{I}$ jest klasy $\mathbf{\Pi^0_4}$, to $\mathrm{Fin}^2 \not\leq_K \mathcal{I}$ ([E33, Theorems 7.5 i 9.1][5]). Drugi jest związany z grą ideałową $G'(\mathcal{I})$ rozważaną przez C. Laflamme'a w [E71] i opisaną w rozdziale 4.1.4. Na mocy twierdzenia Martina o borelowskiej determinacji, gra ta jest zdeterminowana, o ile $\mathcal{I}$ jest ideałem borelowskim. M. Laczkovich i I. Recław w pracy [E70], używając kombinatorycznych charakteryzacji udowodnionych przez C. Laflamme'a, zauważyli, że gracz I ma strategię wygrywającą w $G'(\mathcal{I})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Fin}^2 \leq_K \mathcal{I}$,[6] natomiast jeśli gracz II ma strategię wygrywającą w $G'(\mathcal{I})$, to istnieje zbiór S klasy $\mathbf{\Sigma^0_2}$ zamknięty na podzbiory i oddzielający ideał $\mathcal{I}$ od jego filtru dualnego (tzn. $\mathcal{I} \subseteq S$ i $S \cap \mathcal{I}^\star = \emptyset$). Istnienie strategii wygrywającej dla gracza II pozwala również udowodnić, że $\mathfrak{b}(\mathcal{I}) \leq \mathfrak{b}$. Tej samej techniki użyłem w pracy [H1] w dowodach twierdzeń przy założeniu MA(σ-centered).

[4] Definicję produktu Fubiniego ideałów można znaleźć w rozdziale 4.1.7.

[5] G. Debs i J. Saint Raymond korzystali z nieco innego porządku na ideałach – równoważność $\mathrm{Fin}^2 \not\leq_K \mathcal{I}$ z oryginalnym warunkiem z pracy [E33] jest wykazana w [E11].

[6] Podobnie jak G. Debs i J. Saint Raymond w [E33], M. Laczkovich i I. Recław korzystali z innego, ale równoważnego w interesującym nas przypadku (na mocy [E11]), porządku na ideałach.

4.1.7 Hipoteza dotycząca oddzielania ideału od filtru dualnego zbiorem borelowskim

Łatwo pokazać, że ideał $\mathcal{I}$ oraz jego filtr dualny $\mathcal{I}^\star$ mają taką samą złożoność deskryptywną. Zatem jeśli $\mathcal{I}$ jest ideałem analitycznym, to – na mocy twierdzenia Suslina o oddzielaniu – istnieje zbiór borelowski S, taki że $\mathcal{I} \subseteq S$ i $S \cap \mathcal{I}^\star = \emptyset$. Możemy więc dla każdego ideału analitycznego $\mathcal{I}$ zdefiniować jego rangę jako:

$$\mathrm{rk}(\mathcal{I}) = \min\left\{\alpha < \omega_1 :\ \exists_{S \in \mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha}}\ \mathcal{I} \subseteq S\ \wedge\ S \cap \mathcal{I}^\star = \emptyset\right\}.$$

Opisana w rozdziałach 4.1.4 i 4.1.6 gra ideałowa $G'(\mathcal{I})$ pozwoliła M. Laczkovichowi i I. Recławowi w [E70, Theorem 5] udowodnić, że dla każdego ideału borelowskiego $\mathcal{I}$ następujące warunki są równoważne:

- $\mathrm{rk}(\mathcal{I}) = 1$,
- dla każdej przestrzeni polskiej X zachodzi równość $\mathcal{B}_1^{\mathcal{I}}(X) = \mathcal{B}_1^{\mathrm{Fin}}(X)$, gdzie $\mathcal{B}_1^{\mathcal{I}}(X)$ jest rodziną funkcji rzeczywistych określonych na X będących punktową granicą względem $\mathcal{I}$ jakiegoś ciągu funkcji ciągłych,
- $\mathrm{Fin}^2 \not\leq_K \mathcal{I}$.

G. Debs i J. Saint Raymond niezależnie (i stosując zupełnie inne metody) uzyskali ten sam wynik dla wszystkich ideałów analitycznych ([E33, Theorem 7.5, Corollary 7.6]) oraz częściowo uogólnili go na wyższe rangi ([E33, Theorem 3.2]): dla każdego ideału analitycznego $\mathcal{I}$ oraz $\alpha < \omega_1$ następujące warunki są równoważne:

- $\mathrm{rk}(\mathcal{I}) = \alpha$,
- dla każdej zerowymiarowej przestrzeni polskiej X zachodzi równość $\mathcal{B}_1^{\mathcal{I}}(X) = \mathrm{Bor}_\alpha(X)$, gdzie $\mathrm{Bor}_\alpha(X)$ jest rodziną funkcji rzeczywistych na X borelowskiej klasy α.

Ten cykl prac inspirowany był wynikami M. Katětova z [E65] i [E66], sięgającymi lat 70. Ideałowe klasy Baire'a były później badane m.in. przez A. Bouziada w [E17] czy też przez T. Natkańca i P. Szucę w [E77]. R. Filipów i P. Szuca pokazali w [E45], że powyższa charakteryzacja M. Laczkovicha i I. Recława z [E70] jest prawdziwa również dla innych rodzajów zbieżności ideałowej.

Jeśli $\mathcal{I}$ oraz $\mathcal{J}$ są ideałami, to

$$\mathcal{I} \otimes \mathcal{J} = \left\{A \subseteq \bigcup\mathcal{I} \times \bigcup\mathcal{J} :\ \left\{n \in \bigcup\mathcal{I} :\ A_{(n)} \notin \mathcal{J}\right\} \in \mathcal{I}\right\},$$

gdzie $A_{(n)} = \{k \in \bigcup\mathcal{J} :\ (n,k) \in A\}$, jest ich produktem Fubiniego (powyższy wzór definiuje ideał również gdy $\mathcal{I}$ lub $\mathcal{J}$, ale nie obydwa naraz, zastąpimy przez $\{\emptyset\}$). W szczególności, $\mathrm{Fin}^2 = \mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin}$, a idąc dalej, możemy zdefiniować rekurencyjnie $\mathrm{Fin}^{n+1} = \mathrm{Fin} \otimes \mathrm{Fin}^n$ dla $n \in \omega$.

G. Debs i J. Saint Raymond wprowadzili również ideały Fin^α dla $\omega \leq \alpha < \omega_1$, pokazali, że $\mathrm{rk}(\mathrm{Fin}^\alpha) = \alpha$ dla każdego $0 < \alpha < \omega_1$ i sformułowali następującą hipotezę ([E33, Conjecture 7.8]): dla każdego ideału analitycznego $\mathcal{I}$ oraz liczby porządkowej $0 < \alpha \leq \omega$ nierówność $\mathrm{rk}(\mathcal{I}) < \alpha$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Fin}^\alpha \not\leq_K \mathcal{I}$.[7] Na mocy powyższych rozważań jest to prawda dla $\alpha = 2$.[8] Dowód punktu (a) z rozdziału 4.1.6 sugeruje, że udowodnienie tej hipotezy mogłoby pozwolić na uogólnienie go na wszystkie ideały borelowskie.

Głównym wynikiem pracy [H6] jest pokazanie, że powyższa hipoteza jest nieprawdziwa już dla $\alpha = 3$:

$$\mathcal{CEI} = (\{\emptyset\} \otimes \mathrm{Fin}^3) \cap (\mathrm{Fin}^3 \otimes \{\emptyset\})$$

jest takim ideałem klasy $\mathbf{\Sigma}^0_6$, że $\mathrm{Fin}^3 \not\leq_K \mathcal{CEI}$, ale $\mathrm{rk}(\mathcal{CEI}) \geq 3$. Wcześniej w [O11] udowodniłem również nieprawdziwość tej hipotezy dla $\alpha = \omega$ – zob. rozdział 4.2.3.

[7] Oryginalna hipoteza G. Debsa i J. Saint Raymonda jest sformułowana dla wszystkich liczb porządkowych $0 < \alpha < \omega_1$, ale wykorzystuje inny porządek na ideałach. Równoważność [E33, Conjecture 7.8] z podanym sformułowaniem w przypadku $0 < \alpha \leq \omega$ jest konsekwencją [E11].

[8] Prawdziwość hipotezy dla $\alpha = 1$ jest udowodniona w [E33, Proposition 7.3].

4.1.8 Ideały gęstościowe

Funkcję $\phi : \mathcal{P}(\omega) \to [0, \infty]$ nazywamy podmiarą, gdy $\phi(\emptyset) = 0$, $\phi(\{n\}) < \infty$ dla każdego $n \in \omega$ oraz:

$$\forall_{A,B \subseteq \omega}\ \phi(A) \le \phi(A \cup B) \le \phi(A) + \phi(B).$$

Podmiara ϕ jest dolnie półciągła, gdy:

$$\forall_{A \subseteq \omega}\ \phi(A) = \lim_{n\to\infty} \phi(A \cap n).$$

S. Solecki w [E84, Theorem 3.1] pokazał, że ideał na ω jest analitycznym P-ideałem wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci:

$$\mathrm{Exh}(\phi) = \left\{A \subseteq \omega :\ \lim_{n\to\infty} \phi(A \setminus n) = 0\right\}$$

dla pewnej dolnie półciągłej podmiary ϕ, takiej że $\omega \notin \mathrm{Exh}(\phi)$ (zob. też [E37, Theorem 1.2.5]). Konsekwencją tego wyniku jest fakt, że każdy analityczny P-ideał jest klasy $\mathbf{\Pi}^0_3$.

S. Solecki i S. Todorčević w [E85] rozwiązali problem, postawiony niezależnie przez J. Isbella w [E59] i D. Fremlina w [E47], dotyczący pewnej redukcji (tzw. redukcji Tukeya) ideału wszystkich domkniętych nigdziegęstych podzbiorów 2^ω do ideału $\mathcal{I}_d$. Wyizolowali również kluczową dla tego dowodu własność ideału $\mathcal{I}_d$ i przy jej pomocy zdefiniowali nową klasę P-ideałów analitycznych (dla których ich twierdzenie zachodzi): ideał jest density-like, gdy jest postaci $\mathrm{Exh}(\phi)$ dla pewnej dolnie półciągłej podmiary ϕ o tej własności, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, taka że jeśli $(F_i)_{i\in\omega}$ jest ciągiem parami rozłącznych skończonych podzbiorów ω spełniających $\phi(F_i) < \delta$, to $\phi(\bigcup_{i\in A} F_i) < \varepsilon$ dla pewnego $A \in [\omega]^\omega$.

Ideałami density-like są wszystkie uogólnione ideały gęstościowe wprowadzone przez I. Faraha w [E38], tzn. ideały postaci $\mathrm{Exh}(\sup_n \phi_n)$ dla pewnego ciągu $(\phi_n)_{n\in\omega}$ podmiar o skończonych parami rozłącznych nośnikach (nośnikiem ϕ jest $\{n \in \omega :\ \phi(\{n\}) > 0\}$).

W [E16, Question 5.11] P. Borodulin-Nadzieja, B. Farkas i G. Plebanek spytali, czy istnieje ideał density-like, który nie jest uogólnionym ideałem gęstościowym. Ich motywacją były rozważania ideałów reprezentowanych w polskich grupach abelowych: jeśli X jest taką grupą, a $\mathcal{I}$ jest ideałem na ω, to jest on reprezentowany w X, gdy istnieje funkcja $f : \omega \to X$ spełniająca warunek:

$$A \in \mathcal{I} \iff \sum_{n\in A} f(n) \text{ jest bezwzględnie zbieżny w } X.$$

W pracy [H7] odpowiedzieliśmy na powyższe pytanie, podając przykłady ideałów density-like, które nie są uogólnionymi ideałami gęstościowymi. Co więcej, pokazaliśmy że jest ich dużo:

(a) [H7, Theorem 3.7]: Wśród ideałów, które nie są gęste, istnieje $\mathfrak{c}$ wiele parami nieizomorficznych ideałów density-like, które nie są uogólnionymi ideałami gęstościowymi (ideały $\mathcal{I}$ oraz $\mathcal{J}$ są izomorficzne – piszemy: $\mathcal{I} \cong \mathcal{J}$ – gdy istnieje bijekcja $f : \bigcup \mathcal{J} \to \bigcup \mathcal{I}$, taka że $A \in \mathcal{I} \iff f^{-1}[A] \in \mathcal{J}$ dla wszystkich $A \subseteq \bigcup \mathcal{I}$).

(b) [H7, Theorem 4.24]: Wśród ideałów gęstych istnieje $\mathfrak{c}$ wiele parami nieizomorficznych ideałów density-like, które nie są uogólnionymi ideałami gęstościowymi (w przypadku tego wyniku mój wkład polegał na wskazaniu w [H7, Theorem 4.22] ogólnej konstrukcji, przy pomocy której można tworzyć gęste ideały density-like, które nie są uogólnionymi ideałami gęstościowymi).

Ponadto, podaliśmy charakteryzację uogólnionych ideałów gęstościowych, która przypomina definicję ideałów density-like ([H7, Theorem 5.3]).

Porządek Katětova w artykule [H7] jest wykorzystywany w dowodzie punktu (a). Najpierw w [H7, Theorem 4.3 i Theorem 4.4] pokazaliśmy, że jeśli $\mathcal{I}$ jest gęstym ideałem density-like (w szczególności, gęstym uogólnionym ideałem gęstościowym), to $(\{\emptyset\} \otimes \mathrm{Fin}) \cap (\mathcal{I} \otimes \{\emptyset\})$ jest ideałem density-like, który nie jest uogólnionym ideałem gęstościowym. Następnie zdaliśmy sobie sprawę, że jeśli $\mathcal{I}$ oraz $\mathcal{J}$ są nieporównywalne w porządku Katětova, to $(\{\emptyset\}\otimes\mathrm{Fin})\cap(\mathcal{I}\otimes\{\emptyset\})$ oraz $(\{\emptyset\} \otimes \mathrm{Fin}) \cap (\mathcal{J} \otimes \{\emptyset\})$ nie są izomorficzne. Wystarczyło zatem wziąć antyłańcuch $\{\mathcal{I}_\alpha :\ \alpha < \mathfrak{c}\}$ w $\le_K$ złożony z gęstych uogólnionych ideałów gęstościowych (istnienie takiego antyłańcucha było znane już wcześniej), żeby ideały $(\{\emptyset\} \otimes \mathrm{Fin}) \cap (\mathcal{I}_\alpha \otimes \{\emptyset\})$, dla $\alpha < \mathfrak{c}$, były takie, jakich potrzeba w (a).

4.2 Dorobek naukowy niezawarty w serii habilitacyjnej

Przejdę teraz do krótkiego omówienia mojego dorobku naukowego niezawartego w serii habilitacyjnej, na który składa się 20 artykułów naukowych (w kolejności, w jakiej zostaną omówione poniżej):

[O1] Adam Kwela and Ireneusz Recław, *Ranks of $\mathcal{F}$-limits of filter sequences*, J. Math. Anal. Appl. **398** (2013), no. 2, 872–878. MR 2990109

[O2] Adam Kwela and Marcin Sabok, *Topological representations*, J. Math. Anal. Appl. **422** (2015), no. 2, 1434–1446. MR 3269521

[O3] Adam Kwela, *A note on a new ideal*, J. Math. Anal. Appl. **430** (2015), no. 2, 932–949. MR 3351990

[O4] Adam Kwela and Piotr Zakrzewski, *Combinatorics of ideals – selectivity versus density*, Comment. Math. Univ. Carolin. **58** (2017), no. 2, 261–266. MR 3666945

[O5] Adam Kwela, *Erdős-Ulam ideals vs. simple density ideals*, J. Math. Anal. Appl. **462** (2018), no. 1, 114–130. MR 3771234

[O6] Adam Kwela, Michał Popławski, Jarosław Swaczyna, and Jacek Tryba, *Properties of simple density ideals*, J. Math. Anal. Appl. **477** (2019), no. 1, 551–575. MR 3950052

[O7] Kumardipta Bose, Pratulananda Das, and Adam Kwela, *Generating new ideals using weighted density via modulus functions*, Indag. Math. (N.S.) **29** (2018), no. 5, 1196–1209. MR 3853420

[O8] Adam Kwela and Jacek Tryba, *Homogeneous ideals on countable sets*, Acta Math. Hungar. **151** (2017), no. 1, 139–161. MR 3594409

[O9] Adam Kwela and Marcin Staniszewski, *Ideal equal Baire classes*, J. Math. Anal. Appl. **451** (2017), no. 2, 1133–1153. MR 3624783

[O10] Adam Kwela, *Ideal weak QN-spaces*, Topology Appl. **240** (2018), 98–115. MR 3784399

[O11] Adam Kwela, *Inductive limits of ideals*, Topology Appl. **300** (2021), Paper No. 107798, 13. MR 4293085

[O12] Rafał Filipów, Adam Kwela, and Jacek Tryba, *The ideal test for the divergence of a series*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM **117** (2023), no. 3, 98.

[O13] Adam Kwela, *Additivity of the ideal of microscopic sets*, Topology Appl. **204** (2016), 51–62. MR 3482702

[O14] Klaudiusz Czudek, Adam Kwela, Nikodem Mrożek, and Wojciech Wołoszyn, *Ideal-like properties of generalized microscopic sets*, Acta Math. Hungar. **150** (2016), no. 2, 269–285. MR 3568089

[O15] Adam Kwela, *Haar-smallest sets*, Topology Appl. **267** (2019), 106892, 25. MR 4008566

[O16] Adam Kwela and Wojciech Wołoszyn, *Differentiability of continuous functions in terms of Haar-smallness*, Topology Appl. **284** (2020), 107353, 16. MR 4138435

[O17] Paweł Klinga and Adam Kwela, *Borel complexity of the family of attractors for weak IFSs*, Acta Math. Hungar. **166** (2022), no. 1, 124–141. MR 4385979

[O18] Paweł Klinga, Adam Kwela, and Marcin Staniszewski, *Size of the set of attractors for iterated function systems*, Chaos Solitons Fractals **128** (2019), 104–107. MR 3985600

[O19] Paweł Klinga and Adam Kwela, *Porosities of the sets of attractors*, J. Math. Anal. Appl. **514** (2022), no. 2, Paper No. 126348, 10. MR 4429586

[O20] Paweł Klinga and Adam Kwela, *Comparison of the sets of attractors for systems of contractions and weak contractions*, Chaos Solitons Fractals **155** (2022), Paper No. 111764, 6. MR 4362797

Dla większej przejrzystości opisu prace te podzieliłem na sześć grup:

1. Wyniki uzyskane przed doktoratem: [O1], [O2], [O3] i [O4].
2. Badania pewnych klas P-ideałów analitycznych: [O5], [O6] i [O7].
3. Pozostałe wyniki dotyczące ideałów: [O8], [O9], [O10], [O11] i [O12].
4. Badania zbiorów mikroskopijnych: [O13] i [O14].
5. Badania zbiorów Haar-małych: [O15] i [O16].
6. Badania atraktorów iterowanych układów funkcyjnych: [O17], [O18], [O19] i [O20].

4.2.1 Wyniki uzyskane przed doktoratem

Niektóre z omawianych w tej części artykułów zostały opublikowane już po nadaniu stopnia doktora, jednak jest to jedynie wynikiem długiego procesu redakcyjnego. Mój doktorat oparty był na artykułach [O1], [O2] i [O3], natomiast praca [O4] nie weszła w skład rozprawy doktorskiej.

W pracy [O1] pokazaliśmy, że jeśli $\mathcal{I}$ jest ideałem borelowskim rangi 1, to $\mathrm{rk}(\mathcal{I}\otimes\mathcal{J}) = \mathrm{rk}(\mathcal{J})+1$ dla dowolnego ideału analitycznego $\mathcal{J}$ ([O1, Corollary 3.6]) – jest to wzmocnienie [E33, Proposition 4.4], gdzie dokładną rangę $\mathcal{I}\otimes\mathcal{J}$ autorzy uzyskują jedynie w przypadku $\mathcal{I} = \mathrm{Fin}$. Nasz dowód korzystał z gry $G'(\mathcal{I})$ opisanej w rozdziałach 4.1.4 i 4.1.6. Ponadto, udowodniliśmy, że dla każdej liczby porządkowej $0 < \alpha < \omega_1$ istnieją takie ideały borelowskie $\mathcal{I}$ oraz $\mathcal{J}$, że $\alpha = \mathrm{rk}(\mathcal{I}) = \mathrm{rk}(\mathcal{J})$, ale $\mathrm{rk}(\mathcal{I}\cap\mathcal{J}) = 1$ ([O1, Lemma 4.4]).

Ideał $\mathcal{I}$ jest reprezentowalny topologicznie, jeśli istnieją ośrodkowa metryzowalna przestrzeń X, przeliczalny gęsty zbiór $D \subseteq X$ oraz σ-ideał I na X zawierający wszystkie singletony, takie że $\mathcal{I}$ jest izomorficzny z ideałem $\left\{A \subseteq D : \overline{A} \in I\right\}$ ($\overline{A}$ oznacza tutaj domknięcie A w X; badania podobnych form reprezentowalności ideałów są też prowadzone przez P. Borodulina-Nadzieję, B. Farkasa i G. Plebanka – zob. [E15] i [E16]). Punktem wyjścia do pracy [O2] była hipoteza [E82, Conjecture 4.4] sformułowana przez M. Saboka i J. Zapletala: ideał analityczny jest reprezentowalny topologicznie wtedy i tylko wtedy, gdy jest gęstym słabo selektywnym ideałem klasy $\mathbf{\Pi^0_3}$ ($\mathcal{I}$ jest słabo selektywny, gdy każda funkcja określona na zbiorze z $\mathcal{I}^+$ jest stała lub różnowartościowa na jakimś podzbiorze z $\mathcal{I}^+$). Dodatkową motywacją do naszych badań były zastosowania ideałów reprezentowalnych topologicznie w teorii forsingu (zob. [E82]) oraz w teorii relacji równoważności na 2^ω (zob. [E94]).

Głównym wynikiem pracy [O2] jest charakteryzacja ideałów reprezentowalnych topologicznie ([O2, Theorem 1.1]), która wprawdzie nie rozwiązuje hipotezy [E82, Conjecture 4.4], jednak, w przeciwieństwie do jej sformułowania, jest czysto kombinatoryczna. Ponadto, udało nam się pokazać, że wszystkie ideały reprezentowalne topologicznie są równoważne w sensie porządku Rudin-Blassa[9] ([O2, Corollary 1.2]) oraz że każdy analityczny ideał reprezentowalny topologicznie jest $\mathbf{\Pi^0_3}$-zupełny ([O2, Theorem 1.4]). Co więcej, scharakteryzowaliśmy koanalityczne ideały słabo selektywne przy pomocy ideałów reprezentowalnych topologicznie ([O2, Theorem 1.6]), używając w dowodzie pewnej gry ideałowej rozważanej wcześniej przez C. Laflamme'a w [E71] i przez M. Hrušáka w [E54].

Powiemy, że ideał $\mathcal{I}$ na ω jest słabo ramseyowski, jeśli każde drzewo $T \subseteq \omega^{<\omega}$ spełniające dla wszystkich $s \in T$ warunek $\{n \in \omega : s^\frown(n) \in T\} \in \mathcal{I}^\star$ posiada gałąź o zbiorze wartości należącym do $\mathcal{I}^+$. Własność ta została wprowadzona przez C. Laflamme'a w [E71] w celu charakteryzacji, kiedy jeden z graczy ma strategię wygrywającą w grze z poprzedniego akapitu. W pracy [O3] zdefiniowałem ideał $\mathcal{WR}$ klasy $\mathbf{\Sigma^0_2}$ o następującej własności: ideał $\mathcal{I}$ jest słabo ramseyowski wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{WR} \not\leq_K \mathcal{I}$ ([O3, Theorem 1.3]). Na mocy wcześniejszego wyniku T. Natkańca i P. Szucy z [E77] oznacza to, że $\mathcal{WR}$ jest ideałem krytycznym dla ideałowej punktowej zbieżności ciągów funkcji quasi-ciągłych[10] (w podobnym sensie, w jakim Fin^2 jest krytyczny w przypadku funkcji ciągłych – zob. rozdział 4.1.7). Pokazałem również, że $\mathcal{WR}$ jest przykładem ideału, o który pytali R. Filipów, N. Mrożek, I. Recław i P. Szuca w [E42, dyskusja przed Theorem 3.11]. Badania ramseyowskich własności ideałów były później kontynuowane przez M. Hrušáka, D. Mezę-Alcántarę, E. Thümmela i C. Uzcáteguiego w [E56].

[9] Definicję porządku Rudin-Blassa można znaleźć w [O2].
[10] Definicję quasi-ciągłości można znaleźć w [O3] lub [E77].

Ideał $\mathcal{I}$ jest selektywny, gdy dla każdego podziału $(X_n)_{n\in\omega}$ zbioru $\bigcup\mathcal{I}$ albo $\bigcup_{n\leq k} X_n \in \mathcal{I}^\star$ dla pewnego $k \in \omega$, albo można znaleźć selektor tego podziału należący do $\mathcal{I}^+$. Klasyczny wynik A. R. D. Mathiasa mówi, że analityczny lub koanalityczny ideał selektywny nie może być gęsty ([E73]). W pracy [O4] badaliśmy, jak dalekie od siebie są pojęcia selektywności i gęstości.

4.2.2 Badania pewnych klas P-ideałów analitycznych

Prostym ideałem gęstościowym nazwiemy ideał postaci:

$$\mathcal{Z}_g = \left\{ A \subseteq \omega : \lim_{n\to\infty} \frac{|A\cap n|}{g(n)} = 0 \right\},$$

gdzie $g : \omega \to (0,\infty)$ jest taka, że $\lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$ oraz $\frac{n}{g(n)}$ nie zbiega do 0. Ta klasa ideałów została wprowadzona w pracy [E5], w której pokazano m.in., że nie ma żadnej inkluzji pomiędzy klasą prostych ideałów gęstościowych a klasą ideałów Erdősa-Ulama (ideał jest Erdősa-Ulama, gdy jest postaci:

$$\mathcal{EU}_h = \left\{ A \subseteq \omega : \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i\in A\cap n} h(i)}{\sum_{i\in n} h(i)} = 0 \right\},$$

gdzie $h : \omega \to [0,\infty)$ jest taka, że $\sum_{i\in\omega} h(i) = \infty$; ideały te zostały wprowadzone w [E61] przez W. Justa i A. Krawczyka w kontekście pytania zadanego przez P. Erdősa i S. Ulama, dotyczącego izomorficzności algebr Boole'a postaci $\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}$).

Niedawno J. Tryba w [E90] pokazał, że często używana charakteryzacja ideałów Erdősa-Ulama ([E37, Theorem 1.13.3]) w rzeczywistości charakteryzuje jedynie ideały izomorficzne z ideałami Erdősa-Ulama, co powoduje konieczność drobnego przeformułowania niektórych z wyników wymienionych poniżej. Na mój dorobek dotyczący tej tematyki składają się między innymi:

- [O5, Theorem 2]: Prosty ideał gęstościowy jest izomorficzny z ideałem Erdősa-Ulama wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera ideał $\mathcal{I}_d$.
- [O5, Theorem 3]: Charakteryzacja, kiedy ideał izomorficzny z ideałem Erdősa-Ulama jest prostym ideałem gęstościowym.
- [O6, Theorem 3]: Istnieje antyłańcuch w sensie porządku Katětova mocy $\mathfrak{c}$ złożony z prostych ideałów gęstościowych – jest to wzmocnienie [E5, Theorem 2.7], gdzie zamiast $\leq_K$ jest rozważana inkluzja.
- [O5, Proposition 5]: Istnieje rodzina mocy $\mathfrak{c}$ złożona z parami nieizomorficznych ideałów Erdősa-Ulama, które nie są prostymi ideałami gęstościowymi – wszystkie ideały Erdősa-Ulama są równoważne w sensie $\leq_K$ (na mocy [E37, Theorem 1.13.10]), więc w tym przypadku nie jest możliwe skonstruowanie antyłańcucha w sensie porządku Katětova.
- [O6, Theorem 6]: Jeśli $\mathcal{Z}_g \cong \mathcal{Z}_g \restriction A$ dla jakiegoś $A \subseteq \omega$, to rosnąca numeracja A jest świadczącym o tym izomorfizmem – jest to częściowa odpowiedź na [O8, Problem 5.8], gdzie spytaliśmy wspólnie z J. Trybą o charakteryzację ideałów o powyższej własności.

Ponadto, w pracy [O7] badaliśmy pewne dalsze uogólnienie prostych ideałów gęstościowych.

4.2.3 Pozostałe wyniki dotyczące ideałów

W artykule [O8] zajęliśmy się badaniem ideałów jednorodnych, tzn. takich ideałów $\mathcal{I}$, że $\mathcal{I} \cong \mathcal{I} \restriction A$ dla wszystkich $A \in \mathcal{I}^+$. Uzyskaliśmy ich wygodną charakteryzację ([O8, Corollary 2.2]), która pozwoliła pokazać, że jednorodne są np. $\mathcal{W}$ oraz Fin^n dla wszystkich $n \in \omega \setminus \{0\}$. Jak się okazało już po opublikowaniu pracy [O8], wspomniana charakteryzacja jest twierdzącą odpowiedzią na pytanie [E75, Question 2.1.10] postawione przez D. Mezę-Alcántarę, natomiast [O8, Example 2.6], w którym pokazujemy, że $\mathcal{W}$ jest jednorodny, jest odpowiedzią na pytanie [E55, Question 5.11] postawione przez M. Hrušáka. Ponadto, w pracy [O8] odpowiadamy na szereg pytań postawionych w [E6] przez M. Balcerzaka, S. Głąba i J. Swaczynę.

W [O9] badaliśmy rodziny funkcji pierwszej klasy Baire'a dla zbieżności quasi-normalnej względem zadanego ideału (dokładniej: rodzinę funkcji rzeczywistych określonych na przestrzeni doskonale normalnej, będących quasi-normalną granicą względem zadanego ideału ciągu funkcji ciągłych; zbieżność quasi-normalna względem ideału została opisana w rozdziale 4.1.6). W szczególności, scharakteryzowaliśmy, dla jakich ideałów borelowskich rodzina ta pokrywa się z klasyczną rodziną funkcji pierwszej klasy Baire'a (używając w dowodzie techniki opisanej w rozdziale 4.1.6 i bazującej na grze $G'(\mathcal{I})$). Zbadaliśmy w tym kontekście również quasi-normalną zbieżność względem ustalonego ideału ciągów funkcji quasi-ciągłych (wykorzystując moje wcześniejsze wyniki z [O3]). Motywacją były prace [E33] i [E70], w których zostały wykonane podobne badania w przypadku ideałowej punktowej zbieżności ciągów funkcji ciągłych, praca [E45], w której znajdują się rozważania podobne do naszych, jak również praca [E77], w której zbadano ideałową punktową zbieżność ciągów funkcji quasi-ciągłych.

W artykule [O10] badałem $\mathcal{I}$wQN-przestrzenie[11] (tzn., dla ustalonego ideału $\mathcal{I}$, takie przestrzenie topologiczne X, że dla każdego zbieżnego punktowo do 0 ciągu funkcji ciągłych $(f_n)_{n\in\omega} \in \left(\mathbb{R}^X\right)^\omega$ można znaleźć jego podciąg zbieżny quasi-normalnie względem $\mathcal{I}$ do 0; w rozdziale 4.1.6 opisane są podobne przestrzenie – tam rozpatrujemy jednak ciągi funkcji ciągłych zbieżne punktowo względem $\mathcal{I}$, a nie względem Fin, oraz wymagamy, aby cały ciąg $(f_n)_{n\in\omega}$ był zbieżny quasi-normalnie względem $\mathcal{I}$). Przestrzenie te, podobnie jak $\mathcal{I}$QN-przestrzenie, są dogłębnie badane w Koszycach m.in. przez L. Bukovský'ego, M. Repický'ego i J. Šupinę (zob. [E20], [E80], [E86] i [E89]). Scharakteryzowałem kombinatorycznie, dla dowolnego ideału $\mathcal{I}$, minimalną moc przestrzeni niebędącej $\mathcal{I}$wQN-przestrzenią ([O10, Theorem 2.3]) oraz pokazałem, że jest ona równa $\mathfrak{b}$ dla wszystkich ideałów klasy $\mathbf{\Sigma^0_2}$ ([O10, Theorem 2.7]). Udowodniłem również, że niesprzecznie istnieją ideał $\mathcal{I}$, taki że $\mathrm{Fin}^2 \not\leq_K \mathcal{I}$ (na mocy [E89, Theorem 1.4], jeśli $\mathrm{Fin}^2 \leq_K \mathcal{I}$, to każda przestrzeń topologiczna jest $\mathcal{I}$wQN-przestrzenią) oraz $\mathcal{I}$wQN-przestrzeń, która nie jest FinwQN-przestrzenią ([O10, Theorem 2.11]) – jest to częściowa odpowiedź na [E20, Problem 3.7]. Pokazałem też, że jeśli $\mathcal{I}$ jest gęstym ideałem, a

$$\mathtt{cov}^\star(\mathcal{I}) = \min\left\{|\mathcal{A}| :\ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \ \wedge\ \forall_{S\in[\omega]^\omega}\ \exists_{A\in\mathcal{A}}\ |A\cap S| = \omega\right\},$$

to każda przestrzeń topologiczna X mocy mniejszej niż $\mathtt{cov}^\star(\mathcal{I})$ jest $\mathcal{I}$wQN-przestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy jest FinwQN-przestrzenią – jest to odpowiedź na [E20, Problem 3.2] oraz inspiracja niektórych wyników z [E86]. Warto zauważyć, że $\mathtt{cov}^\star(\mathcal{I})$ jest dobrze zbadanym obiektem i może mieć stosunkowo duże wartości, np. $\mathtt{cov}^\star(\mathrm{conv}) = \mathfrak{c}$ (zob. [E54]).

W pracy [O11] pokazałem, że hipoteza G. Debsa i J. Saint Raymonda z [E33] opisana w rozdziale 4.1.7 jest nieprawdziwa dla $\alpha = \omega$ (główny wynik pracy [H6] mówi, że jest ona nieprawdziwa dla $\alpha = 3$). Ideał Fin'_ω, będący odpowiednim kontrprzykładem, posiada jeszcze jedną ciekawą własność: $\mathrm{Fin}'_\omega \leq_K \mathcal{I}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Fin}^n \leq_K \mathcal{I}$ dla wszystkich $n \in \omega \setminus \{0\}$.

Artykuł [O12] dotyczy uogólnień klasycznego twierdzenia Oliviera, mówiącego, że dla każdego nierosnącego ciągu $(a_n)_{n\in\omega}$ liczb rzeczywistych dodatnich, jeśli szereg $\sum_{n\in\omega} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. Udowodniliśmy ogólne twierdzenia, z których daje się w łatwy sposób wyprowadzić wiele znanych uogólnień twierdzenia Oliviera, jak również otrzymać kilka nowych wniosków. We wszystkich przypadkach zbieżność ciągu $(na_n)_{n\in\omega}$ jest zastąpiona zbieżnością ideałową. W drugiej części artykułu badaliśmy wielkości rodzin ciągów, dla których zawodzą nasze twierdzenia – interesowało nas znalezienie dużych liniowych i algebraicznych podstruktur w tych rodzinach. Główną inspiracją tej części była praca [E12] napisana przez A. Bartoszewicza, S. Głąba i A. Widz.

4.2.4 Badania zbiorów mikroskopijnych

Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ nazywamy mikroskopijnym ($A \in \mathscr{Micro}$), gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg przedziałów $(I_n)_{n\in\omega\setminus\{0\}}$, taki że $A \subseteq \bigcup_{n\in\omega\setminus\{0\}} I_n$ oraz $\mathrm{lh}(I_n) \leq \varepsilon^n$ dla każdego $n \in \omega \setminus \{0\}$ (gdzie $\mathrm{lh}(I)$ oznacza długość przedziału I). $\mathscr{Micro}$ jest σ-ideałem zawartym w σ-ideale zbiorów miary Lebesgue'a zero (a nawet w σ-ideale zbiorów wymiaru Hausdorffa zero). Z drugiej strony, klasyczny trójkowy zbiór Cantora na prostej jest miary Lebesgue'a zero, ale nie należy do $\mathscr{Micro}$ (przykład zbioru wymiaru Hausdorffa zero nienależącego do $\mathscr{Micro}$ można znaleźć w [E2]). Zbiory mikroskopijne zostały wprowadzone w pracy [E3], a później były badane m.in. w pracach [E2] i [E26]

[11] Z charakteryzacją FinwQN-przestrzeni związana jest słynna hipoteza Scheepersa – zob. [E89].

oraz przez szereg łódzkich matematyków (zob. [E53]). Badania tych zbiorów są często inspirowane i związane z badaniami zbiorów silnie miary zero (każdy zbiór silnie miary zero jest mikroskopijny, natomiast przykład pokazujący, że przeciwna inkluzja nie zachodzi, można znaleźć w [E40]).

Do moich głównych wyników dotyczących tej tematyki należą:

- [O13, Theorem 3.2]: Addytywność $\mathscr{Micro}$ jest równa ω_1 (w ZFC), tzn. istnieje rodzina zbiorów mikroskopijnych mocy ω_1, której suma nie jest zbiorem mikroskopijnym – jest to zaskakująca odpowiedź (wcześniej sądzono, że, podobnie jak jest to w przypadku σ-ideału zbiorów silnie miary zero, addytywność $\mathscr{Micro}$ powinna być równa $\mathfrak{c}$ przy założeniu aksjomatu Martina) na pytanie postawione przez G. Horbaczewską podczas jej referatu na konferencji XXIV Summer Conference on Real Functions Theory (Stara Leśna, 2010).

- [O13, Proposition 4.5]: Pewna modyfikacja $\mathscr{Micro}$ (otrzymana przez zastąpienie $\mathrm{lh}(I_n) \leq \varepsilon^n$ w definicji $\mathscr{Micro}$ przez $\mathrm{lh}(I_n) \leq \varepsilon^{\ln(n+2)}$) ma addytywność $\mathfrak{c}$ przy założeniu aksjomatu Martina.

- [O14, Theorem 3.6]: Rodzina zbiorów nanoskopijnych (powstała przez zamianę w definicji $\mathscr{Micro}$ warunku $\mathrm{lh}(I_n) \leq \varepsilon^n$ na warunek $\mathrm{lh}(I_n) \leq \varepsilon^{2^n}$) nie jest ideałem (dokładniej: istnieją dwa zbiory borelowskie nanoskopijne, których suma nie jest nanoskopijna) – jest to odpowiedź na pytanie postawione przez G. Horbaczewską w [E51].

Badania zbiorów mikroskopijnych i ich uogólnień są kontynuowane w ośrodku łódzkim (zob. [E52], [E62], [E63], [E78] i [E79]).

4.2.5 Badania zbiorów Haar-małych

Jeśli $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(2^\omega)$ jest rodziną zbiorów zamkniętą na branie podzbiorów jej elementów, to mówimy, że podzbiór A abelowej grupy polskiej X jest Haar-$\mathcal{F}$, jeśli istnieją zbiór borelowski $B \supseteq A$ oraz funkcja ciągła $f : 2^\omega \to X$, takie że $f^{-1}[B + x] \in \mathcal{F}$ dla wszystkich $x \in X$.

W pracy [E8] zostało pokazane, że jeśli $\mathcal{F}$ jest σ-ideałem zbiorów miary Lebesgue'a zero na 2^ω (zbiorów pierwszej kategorii na 2^ω), to pojęcie Haar-$\mathcal{F}$ pokrywa się z dobrze znanym pojęciem zbiorów Haar-null (Haar-meager), wprowadzonym w pracach [E25] i [E58] (pracy [E30], odpowiednio). Ponadto, jak łatwo zauważyć, jeśli $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, to każdy zbiór Haar-$\mathcal{F}$ jest również Haar-$\mathcal{F}'$.

W swoich pracach badałem zbiory Haar-$\mathcal{F}$ dla następujących rodzin $\mathcal{F}$: $[2^\omega]^{<\omega_1}$, $[2^\omega]^{<\omega}$, $[2^\omega]^{\leq n}$ dla $n \in \omega$ (pojęcia blisko związane ze zbiorami Haar-$\mathcal{F}$ dla powyższych rodzin były wcześniej badane również przez U. B. Darjiego i T. Keletiego w [E31], M. Elekesa i J. Steprānsa w [E36], M. Balcerzaka w [E4], P. Zakrzewskiego w [E93] oraz T. Banakha, N. Lyaskovską i D. Repovša w [E10]). Do moich głównych wyników dotyczących tej tematyki należą:

- [O15, Proposition 3.1]: Wszystkie przeliczalne podzbiory abelowej grupy polskiej są Haar-$[2^\omega]^{\leq 1}$.

- [O15, Theorem 4.1]: Klasyczny trójkowy zbiór Cantora na prostej jest Haar-$[2^\omega]^{\leq 2}$, ale nie jest Haar-$[2^\omega]^{\leq 1}$.

- [O16, Theorem 2.2]: Zbiór $\mathcal{SD}[0,1]$ funkcji rzeczywistych określonych na $[0,1]$, które są różniczkowalne w przynajmniej jednym punkcie, nie jest zbiorem Haar-$[2^\omega]^{<\omega_1}$ w przestrzeni $C[0,1]$ – wynik ten jest w pewnym sensie w kontrze do szeregu wyników mówiących, że $\mathcal{SD}[0,1]$ jest zbiorem małym w przestrzeni $C[0,1]$ (np. w klasycznej już pracy [E7] S. Banach udowodnił, że $\mathcal{SD}[0,1]$ jest pierwszej kategorii w $C[0,1]$, natomiast w [E57] B. Hunt pokazał, że $\mathcal{SD}[0,1]$ jest Haar-null w $C[0,1]$).

- [O15, Theorem 6.1]: Rodzina zbiorów Haar-$[2^\omega]^{<\omega}$ na prostej nie jest ideałem (dokładniej: istnieją dwa zwarte Haar-$[2^\omega]^{<\omega}$ podzbiory $\mathbb{R}$, których suma nie jest Haar-$[2^\omega]^{<\omega}$) – jest to odpowiedź na pytanie postawione przez T. Banakha, S. Głąba, E. Jabłońską i J. Swaczynę w pierwszych wersjach [E8] (dostępnych na ArXiv[12]) i przez J. Swaczynę podczas jego

[12] Praca [E8] przeszła bardzo długi proces redakcyjny, w trakcie którego zaszły w niej liczne zmiany. Ja swój wynik uzyskałem na początkowym etapie tego procesu i zdążyłem go opublikować przed ukazaniem się ostatecznej wersji [E8]. Ponieważ autorzy wiedzieli o mojej odpowiedzi na ich pytanie, zdecydowali się w opublikowanej wersji artykułu nie umieszczać tego pytania, a zamiast tego zacytować mój wynik.

referatu na konferencji XLI Summer Symposium in Real Analysis (Wooster, 2017), natomiast drobna modyfikacja tego wyniku (zob. [O15, Corollary 6.2]) odpowiada na pytanie postawione w pierwszej wersji [E9] (dostępnej na ArXiv[13]) i przez T. Banakha podczas jego referatu na konferencji Frontiers of Selection Principles (Warszawa, 2017).

Ponadto, rozróżniłem rodziny Haar-$[2^\omega]^{<\omega_1}$, Haar-$[2^\omega]^{<\omega}$ oraz Haar-$[2^\omega]^{\leq n}$, dla $n \in \omega$, w każdej przestrzeni postaci $\mathbb{R} \times X$, gdzie X jest abelową grupą polską ([O15, Proposition 2.5, Theorem 5.1, Corollary 6.3 oraz Theorem 7.1]).

4.2.6 Badania atraktorów iterowanych układów funkcyjnych

Przypomnijmy, że funkcję $f : X \to X$, gdzie (X, d) jest zwartą przestrzenią metryczną, nazywamy:

- kontrakcją, gdy istnieje stała $c \in [0, 1)$, taka że $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ dla wszystkich $x, y \in X$, $x \neq y$;
- słabą kontrakcją, gdy $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ dla wszystkich $x, y \in X$, $x \neq y$.

Zbiór zwarty $A \subseteq X$ jest atraktorem iterowanego układu funkcyjnego ($A \in \mathcal{A}(X)$), gdy istnieją $n \in \omega$ oraz kontrakcje $f_0, \ldots, f_n : X \to X$, takie że $A = \bigcup_{i \leq n} f_i[A]$.[14] Jeśli w powyższej definicji kontrakcje zastąpimy słabymi kontrakcjami, to otrzymamy atraktor słabego iterowanego układu funkcyjnego[15] – wówczas napiszemy: $A \in \mathcal{A}_w(X)$. Oczywiście, $\mathcal{A}(X) \subseteq \mathcal{A}_w(X)$ w każdej zwartej przestrzeni metrycznej X.

W swoich pracach zająłem się badaniem własności $\mathcal{A}(X)$ i $\mathcal{A}_w(X)$ jako podzbiorów przestrzeni $\mathcal{K}(X)$ wszystkich zwartych niepustych podzbiorów X z metryką Hausdorffa. Punktem wyjścia był wynik mówiący, że $\mathcal{A}([0, 1]^d)$ jest zbiorem klasy $\mathbf{\Sigma^0_2}$ i pierwszej kategorii dla wszystkich $d \in \omega \setminus \{0\}$ (zob. [E27], [E28] i [E87]). Poniższe moje wyniki dotyczące tej tematyki są prawdziwe dla wszystkich $d \in \omega \setminus \{0\}$:

- [O17, Theorem 3.1 i Theorem 3.5]: $\mathcal{A}_w([0, 1])$ jest zbiorem analitycznym, ale nie jest klasy $\mathbf{\Sigma^0_2}$.
- [O18, Theorem 4.1]: $\mathcal{A}_w([0, 1]^d)$ jest zbiorem pierwszej kategorii – jest to wzmocnienie faktu, że $\mathcal{A}([0, 1]^d)$ jest pierwszej kategorii; wynik ten został również uzyskany niezależnie przez E. D'Aniello i T. H. Steele'a w [E29, Theorem 4.1], a następnie uogólniony na wszystkie doskonałe przestrzenie polskie przez K. Leśniaka, N. Snigirevą i F. Strobina w [E72, Theorem 4.2].
- [O18, Theorem 3.1]: $\mathcal{A}([0, 1]^d)$ jest zbiorem σ-porowatym[16] – jest to inne wzmocnienie faktu, że $\mathcal{A}([0, 1]^d)$ jest pierwszej kategorii.
- [O19, Theorem 4.1]: $\mathcal{A}([0, 1])$ nie jest zbiorem σ-silnie porowatym.[17]
- [O20, Theorem 3.4]: Istnieje zbiór $A \in \mathcal{K}([0, 1]^d) \setminus A_w([0, 1]^d)$, który jest granicą pewnego ciągu atraktorów iterowanych układów funkcyjnych złożonych z tylko dwóch kontrakcji.

[13] Autorzy [E9] wiedzieli o mojej odpowiedzi na ich pytanie przed ukazaniem się ostatecznej wersji ich artykułu, więc w ostatecznej wersji [E9] zamast pytania jest zacytowany mój wynik.

[14] Każdy iterowany układ funkcyjny, tj. ciąg kontrakcji $f_0, \ldots, f_n : X \to X$, posiada atraktor, który jest wyznaczony jednoznacznie (na mocy twierdzenia Banacha o kontrakcji zastosowanego do przestrzeni $\mathcal{K}(X)$ wszystkich zwartych niepustych podzbiorów X oraz tzw. operatora Hutchinsona $\mathcal{F} : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ danego wzorem $\mathcal{F}(A) = \bigcup_{i \leq n} f_i[A]$).

[15] W tym przypadku również każdy ciąg słabych kontrakcji posiada atraktor wyznaczony jednoznacznie - zob. [E35].

[16] Definicja σ-porowatości pochodzi od E. P. Dolženki ([E34]). Każdy zbiór σ-porowaty jest pierwszej kategorii, ale implikacja przeciwna nie zachodzi. Od czasu pojawienia się tej definicji ukazało się wiele prac, których celem było użycie σ-porowatości do wzmocnienia klasycznych wyników mówiących, że jakiś zbiór jest pierwszej kategorii (np. wspomniany w rozdziale 4.2.5 klasyczny wynik S. Banacha z [E7] mówiący, że zbiór $\mathcal{SD}[0, 1]$ jest pierwszej kategorii w $C[0, 1]$ został wzmocniony przez V. Anisiu w [E1] oraz przez P. M. Gandiniego i A. Zucco w [E49]: $\mathcal{SD}[0, 1]$ jest również σ-porowaty w $C[0, 1]$).

[17] Definicję σ-silnej porowatości można znaleźć w [O19] lub [E74]. Więcej o porównaniu różnych rodzajów porowatości w abstrakcyjnych przestrzeniach znajduje się w pracy [E92].

5 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej

Od stycznia 2015 roku jestem zatrudniony w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego (UG), natomiast studia doktoranckie odbyłem w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk (IMPAN). Ponadto, podczas studiów doktoranckich odbyłem dwa staże naukowe na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego (UW):

1. Staż w ramach Środowiskowych Studiów Doktoranckich z Nauk Matematycznych: 1 semestr akademicki (luty – maj 2012 r.).

2. Staż dla doktorantów przyznany przez Warszawskie Centrum Nauk Matematycznych w ramach konkursu: 1 semestr akademicki (październik 2013 r. – styczeń 2014 r.).

W okresie, w którym byłem związany z IMPAN, uzyskałem wyniki zawarte w czterech artykułach naukowych: [O1] wspólnym z prof. I. Recławem z UG, [O2] wspólnym z dr. M. Sabokiem (który później został promotorem pomocniczym mojego doktoratu) z IMPAN, [O3] napisanym samodzielnie i [O4] wspólnym z prof. P. Zakrzewskim (który był głównym promotorem mojego doktoratu) z UW. W artykułach [O1] i [O2] mam afiliację IMPAN, a w [O3] i [O4] mam afiliację UG, gdyż prace nad nimi kończyłem w okresie, gdy byłem już zatrudniony na UG.

Wszystkie moje wyniki uzyskane przed doktoratem dotyczyły kombinatorycznych i deskryptywnych własności ideałów na zbiorach przeliczalnych, a więc zagadnień blisko związanych z tematem serii habilitacyjnej. Dla przykładu, w artykule [O2] (którego główne wyniki powstały podczas pierwszego z powyższych staży) używaliśmy pewnej gry ideałowej podobnej do tych wykorzystywanych w serii habilitacyjnej. Z kolei w pracy [O3] (której główne wyniki powstały podczas drugiego z powyższych staży – stosowna informacja znajduje się na tytułowej stronie artykułu) uzyskałem swoje pierwsze wyniki dotyczące porządku Katětova – scharakteryzowałem przy jego pomocy tzw. ideały słabo ramseyowskie (szerzej jest to opisane w rozdziale 4.2.1). Seria habilitacyjna jest daleko idącym rozwinięciem tej metody badania ideałów na zbiorach przeliczalnych. Doświadczenie i wiedza zdobyte w tym okresie w znacznym stopniu przyczyniły się do powstania serii habilitacyjnej.

Podczas studiów doktoranckich otrzymałem grant z Narodowego Centrum Nauki (przyznany w konkursie Preludium). Grant ten realizowałem w IMPAN w okresie od 19 sierpnia 2013 r. do 18 lutego 2016 r. (a więc również po doktoracie, będąc zatrudnionym na UG). W ramach grantu powstały 4 publikacje: [O2], [O3] i [O4] napisane przed doktoratem oraz [O9] napisana już po doktoracie wspólnie z M. Staniszewskim z UG (praca [O9] weszła w skład jego doktoratu, którego byłem promotorem pomocniczym) – stosowne informacje znajdują się na tytułowych stronach tych artykułów. W ostatniej z tych prac użyłem gry ideałowej $G'(\mathcal{I})$ opisanej w rozdziałach 4.1.4 i 4.1.6.

6 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę

6.1 Osiągnięcia dydaktyczne

Prowadzone kursy akademickie po uzyskaniu stopnia doktora:

1. Kurs *Pracownia analizy danych* na kierunku *Modelowanie matematyczne i analiza danych* (II rok studiów I stopnia), Uniwersytet Gdański, wykład (30 godz.) w latach akademickich 2017/2018–2022/2023 oraz ćwiczenia laboratoryjne (30 godz.) w latach akademickich 2017/2018–2020/2021.

2. Kurs *Wnioskowanie statystyczne I* na kierunku *Modelowanie matematyczne i analiza danych* (II rok studiów I stopnia), Uniwersytet Gdański, wykład (30 godz.) w roku akademickim 2022/2023.

3. Kurs *Analiza matematyczna I* na kierunku *Modelowanie matematyczne i analiza danych* (I rok studiów I stopnia), Uniwersytet Gdański, ćwiczenia (60 godz.) w latach akademickich 2020/2021–2022/2023.
4. Kurs *Analiza matematyczna II* na kierunku *Modelowanie matematyczne i analiza danych* (I rok studiów I stopnia), Uniwersytet Gdański, ćwiczenia (60 godz.) w latach akademickich 2020/2021–2021/2022.
5. Kurs *Analiza matematyczna III* na kierunku *Modelowanie matematyczne i analiza danych* (II rok studiów I stopnia), Uniwersytet Gdański, ćwiczenia (60 godz.) w latach akademickich 2021/2022–2022/2023.
6. Kurs *Statystyka opisowa* na kierunku *Modelowanie matematyczne i analiza danych* (I rok studiów I stopnia), Uniwersytet Gdański, ćwiczenia laboratoryjne (30 godz.) w latach akademickich 2018/2019, 2019/2020 i 2021/2022.
7. Kurs *Analiza danych* na kierunku *Matematyka* (III rok studiów I stopnia), Uniwersytet Gdański, wykład (30 godz.) w latach akademickich 2015/2016–2020/2021 oraz ćwiczenia laboratoryjne (30 godz.) w latach akademickich 2015/2016–2020/2021.
8. Kurs *Matematyka* na kierunku *Chemia* (I rok studiów I stopnia), Uniwersytet Gdański, ćwiczenia (60 godz.) w roku akademickim 2020/2021.
9. Kurs *Oprogramowanie matematyczne* na kierunku *Matematyka* (I rok studiów I stopnia), Uniwersytet Gdański, ćwiczenia laboratoryjne (30 godz.) w latach akademickich 2015/2016–2019/2020.
10. Kurs *Rachunek prawdopodobieństwa* na kierunku *Informatyka* (II rok studiów I stopnia), Uniwersytet Gdański, ćwiczenia (60 godz.) w roku akademickim 2018/2019.
11. Kurs *Matematyka I* na kierunku *Biotechnologia* (I rok studiów I stopnia), Uniwersytet Gdański, ćwiczenia (45 godz.) w roku akademickim 2017/2018.
12. Kurs *Wstęp do matematyki* na kierunku *Matematyka* (I rok studiów I stopnia), Uniwersytet Gdański, ćwiczenia (30 godz.) w roku akademickim 2016/2017.
13. Kurs *Analiza matematyczna II* na kierunku *Matematyka* (I rok studiów I stopnia), Uniwersytet Gdański, ćwiczenia (60 godz.) w roku akademickim 2014/2015.
14. Kurs *Analiza matematyczna I* na kierunku *Fizyka* (I rok studiów I stopnia), Uniwersytet Gdański, ćwiczenia (60 godz.) w roku akademickim 2014/2015.
15. Kurs *Analiza matematyczna II* na kierunku *Fizyka* (I rok studiów I stopnia), Uniwersytet Gdański, ćwiczenia (60 godz.) w roku akademickim 2014/2015.
16. Kurs *Podstawy programowania* na kierunku *Matematyka* (I rok studiów I stopnia), Uniwersytet Gdański, ćwiczenia (30 godz.) w roku akademickim 2014/2015.

Prowadzone kursy akademickie przed uzyskaniem stopnia doktora:

1. Kurs *Algebra liniowa* na kierunku *Ekonomia* (I rok studiów I stopnia), Uniwersytet Warszawski (w ramach stażu Warszawskiego Centrum Nauk Matematycznych), ćwiczenia (60 godz.) w roku akademickim 2013/2014.
2. Kurs *Procesy stochastyczne* na kierunku *Matematyka* (III rok studiów I stopnia), Uniwersytet Gdański, ćwiczenia (30 godz.) w roku akademickim 2011/2012.
3. Kurs *Matematyka* na kierunku *Finanse i rachunkowość* (I rok studiów I stopnia), Uniwersytet Gdański, ćwiczenia (25 godz.) w roku akademickim 2010/2011.

Pełnienie funkcji promotora pomocniczego w zakończonych przewodach doktorskich:

1. *Imię i nazwisko doktoranta*: Jacek Tryba
   Instytucja: Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Uniwersytet Gdański
   Tytuł rozprawy doktorskiej: Analityczne własności ideałów
   Promotor główny: prof. UG, dr hab. Rafał Filipów
   Data nadania stopnia: czerwiec 2018 r.

2. *Imię i nazwisko doktoranta*: Marcin Staniszewski
   Instytucja: Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Uniwersytet Gdański
   Tytuł rozprawy doktorskiej: E-zbieżność ideałowa ciągów funkcyjnych
   Promotor główny: dr hab. Rafał Filipów
   Data nadania stopnia: listopad 2016 r.

Pełnienie funkcji promotora pomocniczego w otwartych przewodach doktorskich:

1. *Imię i nazwisko doktoranta*: Krzysztof Kowitz
   Instytucja: Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Uniwersytet Gdański
   Tytuł rozprawy doktorskiej: Wykorzystanie porządku Katětova w badaniach przestrzeni topologicznych i ultrafiltrów
   Promotor główny: prof. UG, dr hab. Rafał Filipów
   Przewidywany rok nadania stopnia: 2023 r.

Wypromowane prace magisterskie:

1. *Imię i nazwisko magistranta*: Wojciech Wołoszyn
   Instytucja: Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Uniwersytet Gdański
   Rok nadania tytułu: 2020 r.

2. *Imię i nazwisko magistranta*: Agnieszka Brzostek
   Instytucja: Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Uniwersytet Gdański
   Rok nadania tytułu: 2019 r.

6.2 Osiągnięcia popularyzujące naukę

- Wykład „Matematyka jest potrzebna” dla Szkoły Podstawowej nr 9 w Rumi, 2016 r.
- Pomoc w organizacji imprezy „Wielki Finał I edycji Pomorskich Meczów Matematycznych” – prowadzenie jednego z meczów, kwiecień 2016 r.
- Pomoc w organizacji imprezy „Matematyka jako ważny składnik kultury i cywilizacji – Matematyczne Mikołajki” na Uniwersytecie Gdańskim, grudzień 2016 r.

6.3 Osiągnięcia organizacyjne

Organizacja konferencji naukowych:

1. *Nazwa konferencji*: Gdańsk Logic Conference
   Daty: 5–7 maja 2023 r.
   Instytucja, miejsce: Uniwersytet Gdański, Gdańsk, Polska
   Rola: członek komitetu organizacyjnego

2. *Nazwa konferencji*: Workshop on Set Theory and its Applications to Topology and Real Analysis, in memory of Irek Recław
   Daty: 4–6 lipca 2013 r.
   Instytucja, miejsce: Uniwersytet Gdański, Gdańsk, Polska
   Rola: członek komitetu organizacyjnego

Pozostała działalność organizacyjna:

- W roku 2022 byłem przewodniczącym, a w roku 2021 – sekretarzem, komisji rekrutacyjnej na kierunki *Matematyka* oraz *Modelowanie matematyczne i analiza danych* na Uniwersytecie Gdańskim.
- W latach 2017–2019 byłem członkiem Rady Wydziału Matematyki, Fizyki i Informatyki oraz Rady Instytutu Matematyki na Uniwersytecie Gdańskim.

7 Oprócz kwestii wymienionych w pkt. 1-6, wnioskodawca może podać inne informacje, ważne z jego punktu widzenia, dotyczące jego kariery zawodowej

7.1 Dane naukometryczne (na dzień 8 maja 2023 r.)

Liczba cytowań:

- Web of Science: 95 cytowań łącznie (46 bez autocytowań);
  53 cytujących artykułów (34 bez autocytowań)
- MathSciNet: 86 cytowań łącznie (przez 48 autorów)
- Google Scholar: 151 cytowań łącznie (119 od 2018 roku)

Indeks Hirscha:

- Web of Science: 6
- Google Scholar: 7 (7 od 2018 roku)

Sumaryczna liczba punktów przyznanych przez MEiN:

- od 2020 r. (tzn. od zmiany na skalę do 200 pkt.):
  1610 (16 artykułów naukowych)
- do 2019 r. (tzn. do zmiany ze skali do 50 pkt. na skalę do 200 pkt.):
  280 (11 artykułów naukowych), w tym 110 przed nadaniem stopnia naukowego doktora (4 artykuły naukowe) oraz 170 po nadaniu stopnia naukowego doktora (7 artykułów)

Sumaryczny Impact Factor: 34,303 (27 artykułów naukowych)

7.2 Nagrody i granty

- Zespołowa Nagroda II stopnia JM Rektora Uniwersytetu Gdańskiego za osiągnięcia naukowe udokumentowane publikacjami w roku 2021.
- Grant badawczy dla doktorantów przyznany przez Narodowe Centrum Nauki w ramach konkursu Preludium.
  Tytuł projektu: Kombinatoryczne i deskryptywne własności ideałów na zbiorach przeliczalnych
  Kwota: 62 400 PLN
  Daty rozpoczęcia/zakończenia: 19 sierpnia 2013 r. – 18 lutego 2016 r.
  Rola: aplikant, kierownik grantu
- Granty badawcze dla młodych naukowców przyznane przez Uniwersytet Gdański:
  1. *Tytuł projektu*: Uogólnienia pojęcia gęstości podzbiorów zbioru liczb naturalnych
     Kwota: 8 000 PLN
     Rok: 2017
     Rola: aplikant, kierownik grantu
  2. *Tytuł projektu*: Zastosowania zbieżności ideałowych
     Kwota: 6 000 PLN
     Rok: 2016
     Rola: aplikant, kierownik grantu
  3. *Tytuł projektu*: Różne rodzaje zbieżności ideałowych
     Kwota: 4 000 PLN
     Rok: 2015
     Rola: aplikant, kierownik grantu

7.3 Odczyty na konferencjach i seminariach

Podczas swojej kariery wygłosiłem:

- 2 odczyty na zaproszenie na konferencjach międzynarodowych:
  - Set Theory Workshop in Vienna, zaplanowany na 12.06.2023, Wiedeń, Austria,
  - Frontiers of Selection Principles, 20.08–1.09.2017, Warszawa, Polska,
- 10 odczytów na konferencjach międzynarodowych:
  - European Set Theory Conference, 29.08–2.09.2022, Turyn, Włochy,
  - Set-theoretic methods in topology and real functions theory, 9.09–13.09.2019, Koszyce, Słowacja,
  - Winter School in Abstract Analysis, Section: Set Theory and Topology, 27.01–3.02.2018, Hejnice, Czechy,
  - Winter School in Abstract Analysis, Section: Set Theory and Topology, 28.01–4.02.2017, Hejnice, Czechy,
  - SETTOP 2016, 20.06–23.06.2016, Nowy Sad, Serbia,
  - European Set Theory Conference, 24.08–28.08.2015, Cambridge, Wielka Brytania,
  - Winter School in Abstract Analysis, Section: Set Theory and Topology, 25.01–1.02.2014, Hejnice, Czechy,
  - Workshop on Set Theory and its Applications to Topology and Real Analysis, in memory of Irek Recław, 4.07–6.07.2013, Gdańsk, Polska,
  - Winter School in Abstract Analysis, Section: Set Theory and Topology, 25.01–1.02.2013, Hejnice, Czechy,
  - Trends in set theory, 8.07–11.07.2012, Warszawa, Polska,
- 3 odczyty na krajowych konferencjach: Warsztaty z Analizy Rzeczywistej organizowane przez Politechnikę Łódzką w Konopnicy (w latach 2015, 2016 i 2018),
- 1 odczyt na zaproszenie na uczelni zagranicznej: seminarium Košice set theory & topology seminar na Uniwersytecie Pavla Jozefa Šafárika w Koszycach na Słowacji (w roku 2021),
- 8 odczytów na zaproszenie na polskich uczelniach:
  - 4 na Seminarium z teorii mnogości na Uniwersytecie Warszawskim (w latach 2015, 2016, 2020 i 2023),
  - 3 na Seminarium z analizy rzeczywistej na Politechnice Łódzkiej (w latach 2013, 2016 i 2021),
  - 1 na Seminarium z teorii mnogości na Uniwersytecie Wrocławskim (w roku 2021).

Zaprezentowałem też jeden poster na konferencji międzynarodowej (New directions in the higher infinite, 10–14.07.2017, Edynburg, Wielka Brytania).

Literatura

[E1] Valeriu Anisiu, *Porosity and continuous, nowhere differentiable functions*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **2** (1993), no. 1, 5–14.

[E2] Jürgen Appell, Emma D'Aniello, and Martin Väth, *Some remarks on small sets*, Ricerche Mat. **50** (2001), no. 2, 255–274. MR 1909968

[E3] Jürgen Appell, *Insiemi ed operatori "piccoli" in analisi funzionale*, Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste **33** (2001), 127–199.

[E4] Marek Balcerzak, *Can ideals without ccc be interesting?*, Topology Appl. **55** (1994), no. 3, 251–260. MR 1259508

[E5] Marek Balcerzak, Pratulananda Das, Małgorzata Filipczak, and Jarosław Swaczyna, *Generalized kinds of density and the associated ideals*, Acta Math. Hungar. **147** (2015), no. 1, 97–115. MR 3391516

[E6] Marek Balcerzak, Szymon Głąb, and Jarosław Swaczyna, *Ideal invariant injections*, J. Math. Anal. Appl. **445** (2017), no. 1, 423–442. MR 3543775

[E7] Stefan Banach, *Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen*, Studia Math. **3** (1931), 174–179.

[E8] Taras Banakh, Szymon Głąb, Eliza Jabłońska, and Jarosław Swaczyna, *Haar-$\mathcal{I}$ sets: looking at small sets in Polish groups through compact glasses*, Dissertationes Math. **564** (2021), 105. MR 4309848

[E9] Taras Banakh and Eliza Jabłońska, *Null-finite sets in topological groups and their applications*, Israel J. Math. **230** (2019), no. 1, 361–386. MR 3941151

[E10] Taras Banakh, Nadya Lyaskovska, and Dušan Repovš, *Packing index of subsets in Polish groups*, Notre Dame J. Form. Log. **50** (2009), no. 4, 453–468 (2010). MR 2598874

[E11] Paweł Barbarski, Rafał Filipów, Nikodem Mrożek, and Piotr Szuca, *When does the Katětov order imply that one ideal extends the other?*, Colloq. Math. **130** (2013), no. 1, 91–102. MR 3034318

[E12] Artur Bartoszewicz, Szymon Głąb, and Agnieszka Widz, *Olivier's theorem: ideal convergence, algebrability and Borel classification*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM **115** (2021), no. 4, Paper No. 200, 10. MR 4317877

[E13] James E. Baumgartner, *Ultrafilters on ω*, J. Symbolic Logic **60** (1995), no. 2, 624–639. MR 1335140

[E14] Andreas Blass and Heike Mildenberger, *On the cofinality of ultrapowers*, J. Symbolic Logic **64** (1999), no. 2, 727–736. MR 1777781

[E15] Piotr Borodulin-Nadzieja and Barnabás Farkas, *Analytic P-ideals and Banach spaces*, J. Funct. Anal. **279** (2020), no. 8, 108702, 31. MR 4124855

[E16] Piotr Borodulin-Nadzieja, Barnabás Farkas, and Grzegorz Plebanek, *Representations of ideals in Polish groups and in Banach spaces*, J. Symb. Log. **80** (2015), no. 4, 1268–1289. MR 3436368

[E17] Ahmed Bouziad, *The point of continuity property, neighbourhood assignments and filter convergences*, Fund. Math. **218** (2012), no. 3, 225–242. MR 2982776

[E18] Jörg Brendle and Jana Flašková, *Generic existence of ultrafilters on the natural numbers*, Fund. Math. **236** (2017), no. 3, 201–245. MR 3600759

[E19] Zuzana Bukovská, *Quasinormal convergence*, Math. Slovaca **41** (1991), no. 2, 137–146. MR 1108577

[E20] Lev Bukovský, Pratulananda Das, and Jaroslav Šupina, *Ideal quasi-normal convergence and related notions*, Colloq. Math. **146** (2017), no. 2, 265–281. MR 3622377

[E21] Lev Bukovský, Ireneusz Recław, and Miroslav Repický, *Spaces not distinguishing convergences of real-valued functions*, **112** (2001), 13–40.

[E22] Michael Canjar, *Countable ultraproducts without CH*, Ann. Pure Appl. Logic **37** (1988), no. 1, 1–79. MR 924678

[E23] ———, *Cofinalities of countable ultraproducts: the existence theorem*, Notre Dame J. Formal Logic **30** (1989), no. 4, 539–542. MR 1036675

[E24] Henri Cartan, *Filtres et ultrafiltres*, C. R. Acad. Sci., Paris **205** (1937), 777–779.

[E25] Jens Peter Reus Christensen, *On sets of Haar measure zero in abelian Polish groups*, Israel J. Math. **13** (1972), 255–260 (1973). MR 326293

[E26] Emma D'Aniello and Martina Maiuriello, *On some generic small Cantor spaces*, Z. Anal. Anwend. **39** (2020), no. 3, 277–288. MR 4122477

[E27] Emma D'Aniello and Timothy H. Steele, *Attractors for iterated function schemes on* $[0,1]^N$ *are exceptional*, J. Math. Anal. Appl. **424** (2015), no. 1, 537–541. MR 3286578

[E28] ______, *Attractors for iterated function systems*, J. Fractal Geom. **3** (2016), no. 2, 95–117. MR 3501343

[E29] ______, *Attractors for classes of iterated function systems*, Eur. J. Math. **5** (2019), no. 1, 116–137. MR 3918837

[E30] Udayan B. Darji, *On Haar meager sets*, Topology Appl. **160** (2013), no. 18, 2396–2400. MR 3120654

[E31] Udayan B. Darji and Tamás Keleti, *Covering* $\mathbb{R}$ *with translates of a compact set*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 8, 2598–2596. MR 1974660

[E32] Pratulananda Das and Debraj Chandra, *Spaces not distinguishing pointwise and* $\mathcal{I}$*-quasinormal convergence*, Comment. Math. Univ. Carolin. **54** (2013), no. 1, 83–96. MR 3038073

[E33] Gabriel Debs and Jean Saint Raymond, *Filter descriptive classes of Borel functions*, Fund. Math. **204** (2009), no. 3, 189–213. MR 2520152

[E34] Evgeniĭ Prokof'evich Dolženko, *Boundary properties of arbitrary functions*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **31** (1967), 3–14. MR 0217297

[E35] Michael Edelstein, *On fixed and periodic points under contractive mappings*, J. London Math. Soc. **37** (1962), 74–79. MR 133102

[E36] Márton Elekes and Juris Steprāns, *Less than* 2^ω *many translates of a compact nullset may cover the real line*, Fund. Math. **181** (2004), no. 1, 89–96. MR 2071696

[E37] Ilijas Farah, *Analytic quotients: theory of liftings for quotients over analytic ideals on the integers*, Mem. Amer. Math. Soc. **148** (2000), no. 702, xvi+177. MR 1711328

[E38] ______, *How many Boolean algebras* $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathcal{I}$ *are there?*, Illinois J. Math. **46** (2002), no. 4, 999–1033. MR 1988247

[E39] Barnabás Farkas and Lajos Soukup, *More on cardinal invariants of analytic P-ideals*, Comment. Math. Univ. Carolin. **50** (2009), no. 2, 281–295. MR 2537837

[E40] Małgorzata Filipczak and Elżbieta Wagner-Bojakowska, *Remarks on small sets on the real line*, Tatra Mt. Math. Publ. **42** (2009), 73–80. MR 2543905

[E41] Rafał Filipów, Nikodem Mrożek, Ireneusz Recław, and Piotr Szuca, *Ideal convergence of bounded sequences*, J. Symbolic Logic **72** (2007), no. 2, 501–512. MR 2320288

[E42] ______, *Ideal version of Ramsey's theorem*, Czechoslovak Math. J. **61(136)** (2011), no. 2, 289–308. MR 2905404

[E43] ______, $\mathcal{I}$*-selection principles for sequences of functions*, J. Math. Anal. Appl. **396** (2012), no. 2, 680–688. MR 2961261

[E44] Rafał Filipów and Marcin Staniszewski, *Pointwise versus equal (quasi-normal) convergence via ideals*, J. Math. Anal. Appl. **422** (2015), no. 2, 995–1006. MR 3269495

[E45] Rafał Filipów and Piotr Szuca, *Three kinds of convergence and the associated* $\mathcal{I}$*-Baire classes*, J. Math. Anal. Appl. **391** (2012), no. 1, 1–9. MR 2899832

[E46] Jana Flašková, *Ideals and sequentially compact spaces*, Topology Proc. **33** (2009), 107–121. MR 2471564

[E47] David H. Fremlin, *The partially ordered sets of measure theory and Tukey's ordering*, Note Mat., vol. 11, 1991, Dedicated to the memory of Professor Gottfried Köthe, pp. 177–214. MR 1258546

[E48] Hillel Furstenberg and Benjamin Weiss, *Topological dynamics and combinatorial number theory*, J. Analyse Math. **34** (1978), 61–85 (1979). MR 531271

[E49] Pier Mario Gandini and Andreana Zucco, *Porosity and typical properties of real-valued continuous functions*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **59** (1989), 15–21. MR 1049878

[E50] Osvaldo Guzmán-González and David Meza-Alcántara, *Some structural aspects of the Katětov order on Borel ideals*, Order **33** (2016), no. 2, 189–194. MR 3513296

[E51] Grażyna Horbaczewska, *Microscopic sets with respect to sequences of functions*, Tatra Mt. Math. Publ. **58** (2014), 137–144. MR 3242549

[E52] ———, *General approach to microscopic-type sets*, J. Math. Anal. Appl. **461** (2018), no. 1, 51–58. MR 3759529

[E53] Grażyna Horbaczewska, Aleksandra Karasińska, and Elżbieta Wagner-Bojakowska, *Properties of the σ-ideal of microscopic sets*, Traditional and present-day topics in real analysis, Łódź University Press, University of Łódź, Faculty of Mathematics and Computer Science, Łódź, 2013, Dedicated to Professor Jan Stanisław Lipiński on the occasion of his 90th birthday, pp. 325–343. MR 3204595

[E54] Michael Hrušák, *Combinatorics of filters and ideals*, Set theory and its applications, Contemp. Math., vol. 533, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 29–69. MR 2777744

[E55] ———, *Katětov order on Borel ideals*, Arch. Math. Logic **56** (2017), no. 7-8, 831–847. MR 3696069

[E56] Michael Hrušák, David Meza-Alcántara, Egbert Thümmel, and Carlos Uzcátegui, *Ramsey type properties of ideals*, Ann. Pure Appl. Logic **168** (2017), no. 11, 2022–2049. MR 3692233

[E57] Brian R. Hunt, *The prevalence of continuous nowhere differentiable functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), no. 3, 711–717. MR 1260170

[E58] Brian R. Hunt, Tim Sauer, and James A. Yorke, *Prevalence: a translation-invariant "almost every" on infinite-dimensional spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **27** (1992), no. 2, 217–238. MR 1161274

[E59] John R. Isbell, *Seven cofinal types*, J. London Math. Soc. (2) **4** (1972), 651–654. MR 294185

[E60] Albin L. Jones, *A brief remark on van der Waerden spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 8, 2457–2460. MR 2052425

[E61] Winfried Just and Adam Krawczyk, *On certain Boolean algebras $\mathcal{P}(\omega)/I$*, Trans. Amer. Math. Soc. **285** (1984), no. 1, 411–429. MR 748847

[E62] Aleksandra Karasińska, *Remarks on some generalization of the notion of microscopic sets*, Math. Slovaca **70** (2020), no. 6, 1349–1356. MR 4185783

[E63] Aleksandra Karasińska, Adam Paszkiewicz, and Elżbieta Wagner-Bojakowska, *A generalization of the notion of microscopic sets*, Lith. Math. J. **57** (2017), no. 3, 319–330. MR 3685162

[E64] Miroslav Katětov, *Products of filters*, Comment. Math. Univ. Carolinae **9** (1968), 173–189. MR 250257

[E65] ______, *On descriptive classes of functions*, Theory of sets and topology (in honour of Felix Hausdorff, 1868–1942), VEB Deutsch. Verlag Wissensch., Berlin, 1972, pp. 265–278. MR 0345060

[E66] ______, *On descriptive classification of functions*, General topology and its relations to modern analysis and algebra, III (Proc. Third Prague Topological Sympos., 1971), Academia, Prague, 1972, pp. 235–242. MR 0355956

[E67] Menachem Kojman, *Hindman spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 6, 1597–1602. MR 1887003

[E68] ______, *van der Waerden spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 3, 631–635. MR 1866012

[E69] Menachem Kojman and Saharon Shelah, *van der Waerden spaces and Hindman spaces are not the same*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 5, 1619–1622. MR 1950294

[E70] Miklós Laczkovich and Ireneusz Recław, *Ideal limits of sequences of continuous functions*, Fund. Math. **203** (2009), no. 1, 39–46. MR 2491780

[E71] Claude Laflamme, *Filter games and combinatorial properties of strategies*, Set theory (Boise, ID, 1992–1994), Contemp. Math., vol. 192, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, pp. 51–67.

[E72] Krzysztof Leśniak, Nina Snigireva, and Filip Strobin, *Weakly contractive iterated function systems and beyond: a manual*, J. Difference Equ. Appl. **26** (2020), no. 8, 1114–1173. MR 4164084

[E73] Adrian R. D. Mathias, *Happy families*, Ann. Math. Logic **12** (1977), no. 1, 59–111. MR 491197

[E74] Maria E. Mera, Manuel Morán, David Preiss, and Luděk Zajíček, *Porosity, σ-porosity and measures*, Nonlinearity **16** (2003), no. 1, 247–255. MR 1950786

[E75] David Meza-Alcántara, *Ideals and filters on countable set*, Ph.D. thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2009.

[E76] Heike Mildenberger, *There may be infinitely many near-coherence classes under $\mathfrak{u} < \mathfrak{d}$*, J. Symbolic Logic **72** (2007), no. 4, 1228–1238. MR 2371203

[E77] Tomasz Natkaniec and Piotr Szuca, *On the ideal convergence of sequences of quasi-continuous functions*, Fund. Math. **232** (2016), no. 3, 269–280. MR 3453774

[E78] Adam Paszkiewicz, *On microscopic sets and Fubini property in all directions*, Math. Slovaca **68** (2018), no. 5, 1041–1048. MR 3869249

[E79] Adam Paszkiewicz and Elżbieta Wagner-Bojakowska, *Fubini property for microscopic sets*, Tatra Mt. Math. Publ. **65** (2016), 143–149. MR 3529313

[E80] Miroslav Repický, *Spaces not distinguishing ideal convergences of real-valued functions*, Real Anal. Exchange **46** (2021), no. 2, 367–394. MR 4336563

[E81] Walter Rudin, *Homogeneity problems in the theory of Čech compactifications*, Duke Math. J. **23** (1956), 409–419. MR 80902

[E82] Marcin Sabok and Jindřich Zapletal, *Forcing properties of ideals of closed sets*, J. Symbolic Logic **76** (2011), no. 3, 1075–1095. MR 2849260

[E83] Hiroshi Sakai, *On Katětov and Katětov-Blass orders on analytic P-ideals and Borel ideals*, Arch. Math. Logic **57** (2018), no. 3-4, 317–327. MR 3778962

[E84] Sławomir Solecki, *Analytic ideals and their applications*, Ann. Pure Appl. Logic **99** (1999), no. 1-3, 51–72. MR 1708146

[E85] Sławomir Solecki and Stevo Todorčević, *Avoiding families and Tukey functions on the nowhere-dense ideal*, J. Inst. Math. Jussieu **10** (2011), no. 2, 405–435. MR 2787694

[E86] Viera Šottová and Jaroslav Šupina, *Principle* $\mathrm{S}_1(\mathcal{P},\mathcal{R})$*: ideals and functions*, Topology Appl. **258** (2019), 282–304. MR 3924519

[E87] László L. Stachó and László I. Szabó, *A note on invariant sets of iterated function systems*, Acta Math. Hungar. **119** (2008), no. 1-2, 159–164. MR 2400802

[E88] Hugo Steinhaus, *Comptes rendus: Société Polonaise de Mathématique. Section de Wroclaw. Septembre 1948-Mars 1949*, Colloquium Math. **2** (1951), 63–78.

[E89] Jaroslav Šupina, *Ideal QN-spaces*, J. Math. Anal. Appl. **435** (2016), no. 1, 477–491. MR 3423409

[E90] Jacek Tryba, *Different kinds of density ideals*, J. Math. Anal. Appl. **498** (2021), no. 1, Paper No. 124930, 18. MR 4199804

[E91] Edward L. Wimmers, *The Shelah P-point independence theorem*, Israel J. Math. **43** (1982), no. 1, 28–48. MR 728877

[E92] Luděk Zajíček, *On* σ*-porous sets in abstract spaces*, Abstr. Appl. Anal. (2005), no. 5, 509–534. MR 2201041

[E93] Piotr Zakrzewski, *On Borel sets belonging to every invariant ccc* σ*-ideal on* $2^{\mathbb{N}}$, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), no. 3, 1055–1065. MR 3003696

[E94] Jindřich Zapletal, *Reducibility invariants in higher set theory*, `https://people.clas.ufl.edu/zapletal/files/turbulence7.pdf`.