

Recenzja rozprawy doktorskiej Pana mgr. Tomasza Młynika

pt. *Odwzorowania k -dodatnie w fizyce*

Rozprawa doktorska Pana mgr. Tomasza Młynika poświęcona jest zagadnieniom konstrukcji, analizy i geometrii odwzorowań dodatnich między algebrami skończeniowymiarowych macierzy. Z matematycznego punktu widzenia, pojęcie dodatniości odwzorowania jest dość naturalne. Odwzorowania takie przekształca, bowiem, operator dodatni (macierz dodatnio określona) na operator dodatni. Nie oznacza to jednak, że mamy do dyspozycji pełną charakterystykę odwzorowań dodatnich dla dowolnego wymiaru, tzn., że umiemy skonstruować w prosty sposób takie odwzorowania. Z punktu widzenia mechaniki kwantowej warunek dodatniości jest warunkiem koniecznym tego, aby odwzorowanie opisywało dozwoloną transformację kwantową: macierz gęstości (z definicji dodatnia) musi być odwzorowana na macierz gęstości. Jednak, aby odwzorowanie było możliwą transformacją kwantową musimy zażądać, aby jego rozszerzenie przez transformację tożsamościową na dowolną dodatkową przestrzeń było również dodatnie. Wyjściowy układ zawsze można, bowiem, traktować jako podukład układu większego („układ + otoczenie”), dana transformacja ograniczona jest tylko do układu wyjściowego, a w jego dowolnym „otoczeniu” nic się nie dzieje. Takie ograniczenie prowadzi do definicji odwzorowania całkowicie dodatniego i tylko takie odwzorowania są dopuszczalne przez mechanikę kwantową jako możliwe transformacje układów kwantowych. Ogólne odwzorowania dodatnie grają jednak istotną rolę w detekcji splątania kwantowego oraz klasyfikacji różnych rodzajów splątania. Otóż odwzorowania dodatnie, które nie są całkowicie dodatnie, pozwalają na konstrukcję tzw. świadków splątania wykrywających splątanie stanu poprzez oddzielenie go, za pomocą twierdzenia Hahna-Banacha, od stanów niesplątanych. Aby tego typu konstrukcja dawała subtelniejszą klasyfikację splątania, rozpatrujemy odwzorowania, które nie są całkowicie dodatnie, ale k -dodatnie, tzn. takie, które pozostają dodatnie po rozszerzeniu przez odwzorowanie jednostkowe na „otoczenie” co najwyżej k -wymiarowe. Pozwalają one na konstrukcję świadków splątania wykrywających stany o liczbie Schmidta k , która może służyć jako charakterystyka „ilości splątania”. Konstrukcje odwzorowań k -dodatnich i własności takich odwzorowań są więc bardzo istotne w teorii splątania kwantowego. Tym zagadnieniom poświęcona jest rozprawa doktorska mgr. Młynika.

Praca składa się z sześciu rozdziałów uzupełnionych dodatkiem zawierającym kody w programie *Matlab* używane w obliczeniach wykorzystanych w rozprawie. W rozdziale wstępnym autor przedstawia historię problemów, wokół których koncentrować się będzie dysertacja oraz motywacje leżące u podstaw przeprowadzonych badań. Rozdziały 2. i 3. stanowią część o charakterze monograficznym przedstawiającą podstawy geometrii zbiorów wypukłych i ich roli w badaniu problemów splątania oraz dość wyczerpująco prezentującą twierdzenia i fakty dotyczące odwzorowań dodatnich, k -dodatnich i całkowicie dodatnich, ich tzw. rozkładalności, a także znanych metod ich konstrukcji. Zakres omawianej problematyki, jej prezentacja, a także zachowana ścisłość podawanych rozumowań zasługują na pochwałę.

Oryginalne wyniki zawarte są w rozdziałach 4. i 5. rozprawy. W pierwszym z nich autor przedstawia bardzo interesujący pomysł konstrukcji i charakteryzacji odwzorowań k -dodatnich. Autor bada odwzorowania zapisane w postaci różnicy dwóch odwzorowań, z których pierwsze to odwzorowanie jednostkowe pomnożone przez ślad i pewien parametr μ , a drugim pewne odwzorowanie całkowicie dodatnie, wyrażone za pomocą operatorów Krausa (co zawsze da się zrobić). Najważniejszymi otrzymanymi wynikami są tu Stwierdzenie 4.5 i Twierdzenie 4.6 pozwalające określić wartości parametru μ , dla których odwzorowanie jest k -dodatnie. Wykorzystuje się tu *explicite* wymienione powyżej operatory Krausa. Ciekawym wynikiem jest też Stwierdzenie 4.8 pozwalające na konstrukcję k -dodatnich odwzorowań rozkładalnych. Autor zilustrował wyniki za pomocą kilku niskowymiarowych przykładów. W rozdziale 4.4 przedstawiono algorytm programowania półokreślonego dla sprawdzania rozkładalności odwzorowań k -dodatnich, w szczególności otrzymanych za pomocą metod opisanych wcześniej. Jest to o tyle ważne, że odwzorowania nierozkładalne pozwalają na konstrukcję efektywniejszych świadków splątania, co autor pokazuje na przykładzie stanów PPT i NPT. Wyniki i pomysły zaprezentowane w tym rozdziale są nowatorskie, interesujące z punktu widzenia matematycznego w ciągle rozwijającym się i dalekim od wyeksploatowaniu obszarze badań odwzorowań dodatnich na algebrach operatorów w skończeniowym wymiarach przestrzeni liniowych oraz ważne w fizyce w zastosowaniach do charakterystyki splątania.

W rozdziale 5. zaprezentowano analizę pewnych zagadnień geometrii odwzorowań k -dodatnich. Otrzymane wyniki dotyczą odwzorowań ekstremalnych w stożku odwzorowań dodatnich w wymiarze 3. W szczególności podano warunki konieczne na to, aby odwzorowanie było ekstremalne w stożku odwzorowań 2-dodatnich (tylko odwzorowania 2-dodatnie stanowią interesującą klasę w wymiarze 3, bowiem 3-dodatnie są całkowicie dodatnie) Wyniki są interesujące z punktu teorii odwzorowań dodatnich, choć brak im dużej uniwersalności – nie jest jasne, czy można podobne wyniki otrzymywać w większych wymiarach.

Rozdział szósty zawiera bardzo dobre, zwarte podsumowanie otrzymanych wyników. Cierpliwym czytelnik z radością znajdzie jeszcze w Dodatku A dwa autorskie programy w *Matlabie* wykorzystywane do obliczeń referowanych w podrozdziale 4.4., o których wspomniałem powyżej. Z niejasnych względów informacja o tych kodach nie została podana w samym podrozdziale 4.4.

O ile, jak wspomniałem, część monograficzna rozprawy, tzn. rozdziały 2. i 3., została dobrze skonstruowana i napisana, to część oryginalna jest napisana mniej starannie. Dotyczy to zarówno spraw merytorycznych, jak i stylistyki, gramatyki i języka. Już na samym początku rozdziału sformułowanie Twierdzenia 4.1 nie jest jasne. Występuje tam odwzorowanie Φ , które jest „stowarzyszone” z odwzorowaniem Ψ zadany wzorem (4.1), w terminach którego sformułowane są warunki dodatniości odwzorowania Φ . Ponieważ nigdzie nie zostało zdefiniowane, co oznacza to „stowarzyszenie” (termin ten używany jest w pracy w wielu, mniej lub bardziej sformalizowanych znaczeniach) sens twierdzenia zanika. Na szczęście w dalszej części rozprawy nie jest ono w tej formie wykorzystywane. W tekście używana jest nazwa „Stwierdzenie”, natomiast odnośniki do takich stwierdzeń używają „Propozycji” (str. 32 – podpis pod Rysunkiem 2.6, str. 74, str. 78, str. 82) co jest mylące. Podejrzewam, że jest to skutek automatycznego tłumaczenia z angielskiego przy braku kontroli jego spójności.

Przechodzę do kilku uwag dotyczących spraw językowych. Przyznaję, że „świadkowie spotkania” sprawiają pewne trudności gramatyczne, bo nazwa taka sugeruje, że są rodzaju męskoosobowego, jednak nie są to osoby, więc sformułowań takich jak (str. 80), „...świadków splątania którzy...” (w dodatku bez przecinka) starałbym się unikać. Interpunkcja nie jest mocną stroną rozprawy, co jednak nie powoduje trudności ze zrozumieniem (choć np. zdanie na stronie 81 „Jedną z metod do weryfikacji czy odwzorowanie jest rozkładalne czy nie jest konstrukcją algorytmu przy pomocy programowania półokreślonego” wymaga uważnego czytania – NB raczej „za pomocą” niż „przy pomocy”). Nierówna walka z imiesłowem została tragicznie przegrana. Sformułowania „Posługując się wynikami numerycznymi, najniższy wymiar który spełnia Propozycję (4.14) dla odwzorowania postaci (4.58) są to wymiary $m = 3$ i $n = 7$ ” (str. 82) oraz „Badając k -dodatniość odwzorowania Φ_λ pozwoli nam poruszać się po odcinku między Tr a \emptyset pozwalając nam określać kiedy zaczyna się 2-dodatniość...”, są tu dobrymi przykładami.

Podsumowując stwierdzam, że rozprawa doktorska mgr. Tomasza Młynika pt. *Odwzorowania k -dodatnie w fizyce* zawiera szereg nowych, ciekawych i ważnych rezultatów dotyczących teorii i zastosowań odwzorowań algebr operatorów w skończeniowym wymiarowych przestrzeniach liniowych. Spełnia ona wszelkie formalne i zwyczajowe wymagania w stosunku do rozpraw doktorskich. Wnioskuje o dopuszczenie jej autora do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania mu stopnia doktora.

Warszawa, 16.07.2024

prof. dr hab. Marek Kuś