Prof. dr hab. Dariusz Chruściński
Instytut Fizyki UMK

Toruń, 9.07.2024

Recenzja pracy doktorskiej mgra Tomasza Młynika

„Odwzorowania k-dodatnie w fizyce"

Praca doktorska mgra Tomasza Młynika spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane pracom doktorskim. Problemy postawione przez doktoranta uważam za bardzo ambitne, a uzyskane wyniki dowodzą, że doktorant posiada gruntowną wiedzę teoretyczną oraz solidny warsztat badawczy dotyczący matematycznych aspektów mechaniki kwantowej.

Motywem przewodnim pracy jest analiza odwzorowań dodatnich w algebrach macierzowych. Odwzorowania dodatnie stanowią niezbędne narzędzie matematyczne do analizy stanów złożonych układów kwantowych. Tym samym pełna klasyfikacja odwzorowań dodatnich jest w zasadzie równoważna klasyfikacji stanów układów dwu-cząstkowych. Niestety poza szczególnymi przypadkami odpowiadającymi odwzorowaniom $M_2 \rightarrow M_2$ oraz $M_2 \rightarrow M_3$, gdzie wszystkie odwzorowania dodatnie są rozkładalne (słynny wynik Woronowicza) nie znamy ogólnej konstrukcji takich odwzorowań. W szczególności poza kilkoma szczególnymi konstrukcjami znanymi w literaturze nie jest znana ogólna metoda konstrukcjo odwzorowań, które nie są rozkładalne. Odwzorowania nierozkładalne odgrywają istotną rolę w teorii splątania kwantowego ponieważ pozwalają rozstrzygać czy dany stan PPT jest separowalny czy splątany.

Autor rozprawy stawia bardziej ambitny problem: jak konstruować odwzorowania, które są k-dodatnie? Odwzorowania k-dodatnie pozwalają ustalić tzw. liczbę Schmidta stanu kwantowego reprezentowanego przez macierz gęstości. Tym samym dostarczają informacji o stopniu splątania danego stanu. Yang, Leung i Tang pokazali, że każde 2-dodatnie odwzorowanie $M_3 \to M_3$ jest rozkładalne. Oznacza to, że liczba Schmidta stanu PPT dwóch qutritów nie jest większa niż dwa. Mgr Młynik stawia w tym kontekście dwa naturalne pytania:

1. czy każdy stan układu NxN o maksymalnej liczbie Schmidta jest NPT?
2. czy każdy stan układu Nx(N+r) o maksymalnej liczbie Schmidta jest NPT?

Odpowiedź na powyższe pytania oznacza uogólnienie wyniku Yang, Leunga i Tanga. Nie ulega zatem wątpliwości, że analiza odwzorowań k-dodatnich jest istotna dla pełnej klasyfikacji stanów kwantowych układów złożonych. Problem ten jest również interesujący dla matematyków badających struktury algebr operatorowych.

Praca doktorska mgra Młynika składa się z sześciu rozdziałów i technicznego dodatku. Dobrze napisany wstęp (Rozdział 1) zawiera wprowadzenie do tematyki i motywację badań. Rozdział 2 wprowadza podstawowe pojęcia i obiekty matematyczne używane w dalszej części rozprawy. W szczególności autor wprowadza elementy analizy zbiorów wypukłych oraz dyskutuje różne normy w algebrach macierzowych. Rozdział 3 stanowi wprowadzenie do teorii odwzorowań dodatnich. Autor podaje kluczowe definicje oraz wylicza własności odwzorowań dodatnich i k-dodatnich. Prezentacja jest ilustrowana kilkoma znanymi przykładami z literatury.

Rozdział 4 zawiera główne wyniki rozprawy. Bazując na obserwacji Stormera autor analizuje ważną klasę odwzorowań zdefiniowaną w (4.30). Klasa ta jest zdefiniowana przez N wzajemnie ortogonalnych operatorów K_j oraz rzeczywisty parametr μ. Twierdzenie 4.6 podaje warunki konieczne i dostateczne aby odwzorowanie (4.30) było k-dodatnie. Potwierdzam, że dowód Twierdzenia 4.6 jest poprawny. Wynik ten bez wątpienia stanowi ważny i ciekawy przyczynek do teorii odwzorowań dodatnich. Autor analizuje następnie podklasę odwzorowań zadaną przez (4.58). W tym przypadku operatory K_j są izometriami V_j . Stwierdzenie 4.8 podaje warunki wystarczające aby odwzorowanie (4.58) było dodatnim odwzorowaniem rozkładalnym. W kolejnym kroku mgr Młynik analizuje przypadek odwzorowania $M_m \to M_{m+1}$. Gdy m=2, to wszystkie odwzorowania dodatnie tego typu są rozkładalne. Autor stawia ciekawe pytanie: czy pozostaje to prawdą dla m>2? Twierdzenie 4.10 dostarcza pełnej charakterystyki k-dodatniości w klasie (4.30). Twierdzenie 4.11 podaje warunek dostateczny 2-dodatniości w klasie (4.58). W końcu Stwierdzenie 4.12 zapewnia nas, że każde odwzorowanie 2-dodatnie w klasie (4.58) jest również rozkładalne.

Rozdział 5 analizuje wysoce nietrywialną strukturę ścian w stożkach odwzorowań k-dodatnich. Detaliczna analiza tzw. odwzorowania Millera-Olkiewicza $M_3 \to M_3$ prowadzi do bardzo ciekawego wniosku, że istnieje wspólna ściana stożków odwzorowań 2-dodatnich i kompletnie dodatnich. Autor dysertacji podaje również warunki konieczne dla ekstremalności 2-dodatnich odwzorowań $M_3 \rightarrow M_3$ (Twierdzenie 5.2).

Uwagi krytyczne i pytania: w pracy znalazłem liczne usterki. Autor nie do końca zadbał o staranność prezentacji. Jest to o tyle istotne, że praca dotyczy fizyki matematycznej i powinna się cechować możliwie największą precyzją.

- W Twierdzeniu 2.20 zabrakło założenia o unormowaniu wektora.
- W Stwierdzeniu 2.21 zamiast Tr(XV) powinno być Tr(ZV).
- W (2.63) i (2.64-65) zabrakło unormowania wektorów.
- W (2.65) Tr ρ=1.
- Na str. 34 pkt 6. zamiast kombinacji liniowej powinna być kombinacja wypukła.
- W Przykładzie 3.6 ekstremalność zachodzi jedynie dla μ=1, tak?
- W (3.85) sumowanie jest po „i" a nie po „u"
- poniżej (3.85) autor używa terminy „wyznacznik odwzorowania". Tymczasem oblicza wyznacznik pewnego operatora.
- Razi również używanie nazwy „Choia". Autor raz używa Choi a w innych miejscach Choia.
- Na str. 55 autor pisze, że najmniejszy wymiar gdy transpozycja nie wykrywa wszystkich stanów splątanych odpowiada m=n=3, czyli przestrzeni Hilberta o wymiarze 9. Tymczasem to samo jest prawdą w wymiarze 8=2x4.
- W Przykładzie 3.26 powinna być odwrotna implikacja: jeśli stan jest separowalny, to zachodzi (3.103).
- W (3.153) i poniżej jest zamieszanie w oznaczeniach: w (3.153) „a" oznacza skalar, a poniżej i powyżej „a" oznacza operator. Jest również zamieszanie między małym i dużym lambda.
- W (4.1) brak argumentu „X".
- W Twierdzeniu 4.1 nie jest prawdą, że $X = C^m$ oraz $Y= C^n$.
- W (4.7) sumowanie jest od 1 do 10, a poniżej wyliczenie jest od 0 do 9.
- Czy w Twierdzeniu 4.10 zakładamy r=1? W przeciwnym wypadku dowód tego twierdzenia jest całkowicie niejasny. Czy w takim razie można uogólnić ten wynik dla r>1?
- Macierz Choi w (4.104) odpowiada tylko części odwzorowania (4.58).
- W (4.106) brak argumentu „X".
- Nie rozumiem wzoru (4.107).

Również warstwa językowa pozostawia wiele do życzenia

- Na str. 37 „używając innych metody następujący rozkład"
- Autor stosuje dosyć przypadkowe zasady interpunkcji, np. na str. 103

„Celem przedstawionej pracy było, podanie konstrukcji jak najogólniejszych klas odwzorowań k-dodatnich które nie są (k + 1)-dodatnie, w szczególności dla odwzorowań na niskowymiarowych algebrach macierzowych."

Jeśli autor planuje publikację dysertacji zalecałbym korektę językową.

Powyższe uwagi dotyczą prezentacji a nie samych wyników, które uważam za bardzo cenne.

Ocena końcowa: Pracę doktorską mgra Tomasza Młynika oceniam pozytywnie. Uważam, że spełnia wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane pracom doktorskim. Doktorant postawił szereg ambitnych problemów i uzyskał ważne i ciekawe rezultaty. Z pełnym przekonaniem wnoszę o dopuszczenie pana mgra Tomasza Młynika do dalszego etapu przewodu doktorskiego.

prof. dr hab. Dariusz Chruściński

Signature Not Verified

Dokument podpisany przez Dariusz Chruściński; UMK
Data: 2024.07.10 10:19:16 CEST