

dr hab. inż. Remigiusz Augusiak  
Centrum Fizyki Teoretycznej  
Polskiej Akademii Nauk  
al. Lotników 32/46, 02-668 Warszawa

**Recenzja rozprawy doktorskiej**  
**mgr. Giuseppe Violi**  
**pt. „Convex optimization methods for multipartite quantum experiments”**

**Uwagi ogólne.** Rozprawa pt. „Convex optimization methods for multipartite quantum experiments” została przygotowana w Instytucie Teorii Technologii Kwantowych Uniwersytetu Gdańskiego pod kierunkiem dr hab. inż. Marcina Pawłowskiego. Jest to w cykl trzech publikacji naukowych, których współautorem jest Kandydat, a które ukazały się drukiem w renomowanych czasopismach z fizyki, uwzględniając bardzo dobre *Physical Review A* czy *npj Quantum Information*. Cykl został opatrzony około trzydziestostronicowym tekstem, który składa się z wstępu, w którym w dużym skrócie nakreślono kontekst badań a także zaprezentowano wyniki. Po wstępie następuje dłuższy rozdział, nieco nieszczęśliwie nazwany „Podsumowaniem Rozprawy” w którym zawarto podstawowe informacje na temat scenariusza Bella czy programowania półokreślonego, a także opisano wyniki prac w sposób bardziej szczegółowy. Tekst wieńczy podsumowanie, w którym przeanalizowano otrzymane wyniki. Choć Autor nie uniknął pewnych potknięć językowych, rozdział drugi czyta się w miarę dobrze; co najważniejsze, pozwala on sprawnie zapoznać się z tematyką doktoratu oraz przedstawionymi w nim wynikami. Mam jednak kilka uwag do tego tekstu.

1. Czasami zbiór zdefiniowany w równaniu (2.1) nazywany jest funkcją rozkładu prawdopodobieństwa, a czasami rozkładem prawdopodobieństwa. Z formalnego punktu widzenia zbiór (2.1) to zbiór wielu rozkładów prawdopodobieństw; dla każdego wyboru  $x$  i  $y$  mamy bowiem inny rozkład.

2. W dość nietypowy sposób zdefiniowano programowanie półokreślone na stronach 7-8, bowiem problemy prymalny i dualny są ze sobą zamienione. W ten sposób problem prymalny nie oddaje faktu, że w SDP optymalizuje się funkcję liniową po operatorach dodatnich, co jest anonsowane na początku rozdziału 2.2.

3. Nieco niejasny jest opis hierarchii NPA na stronie 8, a w szczególności stwierdzenie „Level 1 of the NPA method is obtained when the combinations considered are each composed of a single element of  $S$  ...”. Sugeruje ono, że nie na pierwszym poziomie hierarchii nie można brać liniowych kombinacji elementów z  $S$ , co nie jest prawdą bo np. rozkład na sumy kwadratów dla wyrażenia CHSH uzyskany na tym levelu zawiera kombinacje pomiarów Alicji lub Boba.

**Badania.** Myślą przewodnią doktoratu jest zastosowanie programowania półokreślonego, które jest jedną z form optymalizacji wypukłej w analizie kilku wybranych problemów kwantowej informacji czy kwantowej komunikacji. Ze względu na swoją skuteczność, a także prostotę w sformułowaniu, programowanie półokreślone jest obecnie jedną z najpowszechniej stosowanych metod analityczno-numerycznych w dziedzinie. W istocie, umiejętne stosowanie tej techniki pozwoliło na rozwiązanie wielu ciekawych problemów, bądź też na sformułowanie ogólnych metod pozwalających badać korelacje w układach kwantowych jak np. używana w pracy hierarchia Navascués-Pironio-Acín (NPA) do charakteryzacji nielokalności Bella, czy też sformułowana wcześniej hierarchia Doherty-Parillo-Spedalieri (DPS) pozwalająca wykrywać splątanie kwantowe. O ile cel ten jest sam w sobie ważny, to mam wrażenie, że Autor nieco skromnie sklasyfikował swoją pracę. Cel ten nie oddaje bowiem w pełni zakresu tematycznego doktoratu, a w szczególności zaprezentowanych w nim wyników. W istocie, w pracy zaprezentowano szereg oryginalnych i ciekawych rezultatów naukowych, które dotyczą charakteryzacji korelacji kwantowych takich jak splątanie

kwantowej czy nielokalność Bella oraz ich zastosowań np. w komunikacji kwantowej. Poniżej postaram się przybliżyć wyniki zawarte w rozprawie, a także pokrótce je skomentować.

I. W pierwszej pracy Autor zmagają się z problemem detekcji splątania kwantowego poprzez pomiar świadków splątania w eksperymentach optycznych, w sytuacji, w której detektory fotonów nie działają w sposób optymalny. Jest to problem o zasadniczym znaczeniu dla eksperymentu, ponieważ straty na detektorach mogą prowadzić do fałszywie pozytywnej konkluzji, że badany stan jest splątany, choć w rzeczywistości jest on separowalny. W pracy Autor przedstawia dwa podejścia do radzenia sobie ze stratami na detektorach, które są zaczerpnięte z obszaru detekcji nielokalności typu Bella: przypisywania (ang. *assignment*) i odrzucania (ang. *discard*), a następnie formułuje programy półkresłone pozwalające wyznaczyć minimalną wartość oczekiwaną świadka splątania dla stanów separowalnych. Użycie tych programów zostało zilustrowane na pewnych wybranych dwukubitowych świadkach splątania i na tej podstawie sformułowano szereg obserwacji. W szczególności wraz ze spadkiem wydajności detektorów spada również zdolność świadka do wykrywania splątania, choć spadek ten jest nieciągły w tym sensie, że poniżej pewnej wartości krytycznej wydajności detekcja nie jest już możliwa. Co ciekawe, w zależności od wyboru strategii przypisywania minimalna wartość oczekiwana świadka dla stanów separowalnych może wzrastać albo maleć wraz ze spadkiem wydajności detektorów, co zostało zilustrowane na rysunku 3.2. W pracy wyznaczono również analitycznie wartość krytyczną wydajności detektorów dla świadka Bella, a także sformułowano również program półkresłony pozwalający wyznaczyć minimalną widzialność krytyczną, co pozwala uwzględnić w eksperymencie fakt, że badany stan jest zaszumiony.

Wyniki te uważam za bardzo cenne bo podają ogólny przepis na uwzględnianie strat na detektorach w eksperymentach optycznych mających na celu detekcję splątania kwantowego. Co więcej, uważam to za dość zaskakujący fakt, że w literaturze nie zaprezentowano dotychczas tak kompleksowego podejścia pozwalającego rozwiązać ten problem. Mam jednak parę uwag.

1. Autor wspomina w pracy, że programy półkresłone (2.24) oraz (2.27) można uogólnić na przypadek układów kwantowych o wyższym wymiarze podukładu niż dwa. Wówczas należy zastąpić warunek separowalności (2.24b) przez np. wspomnianą wyżej hierarchię DPS. To jednak sprawia, że programy te będą zwracały tylko ograniczenia dolne na minimalne wartości oczekiwane dla stanów separowalnych oraz będą bardziej złożone. Zabrakło mi tutaj kilku zdań dyskusji jak fakt ten wpływa na efektywność obu programów.

2. Na stronie 9 publikacji pod wzorem (20) napisano, że wydajność krytyczna dla świadka Bella w przypadku, gdy Alicja i Bob używają strategii przypisania (1,0,0) wynosi  $\frac{1}{2}$ . To jednak nie znajduje odzwierciedlenia na wykresie 3, który sugeruje, że owa widzialność krytyczna jest bliższa 0.6. Autor mógłby skomentować ten fakt w trakcie obrony.

II. Druga z prac przedstawia schemat pozwalający na dystrybucję nielokalności kwantowej na znacznie większe odległości niż w standardowych eksperymentach Bella, w których straty na światłowodach i na detektorach mocno wpływają na dostępne odległości. W schemacie rozważono dodatkowy układ pomiarowy po stronie Alicji lub Boba (lub po obu stronach), a także przełącznika, który w sposób losowy wybiera układ, który wykona pomiar na fotonie. Dodatkowy układ umieszczony jest blisko źródła cząstek splątanych, tak aby niwelować straty w światłowodach i służy on do certyfikacji nielokalności pochodzącej z par splątanych. W pracy sformułowano analityczne warunki na to, aby korelacje wytwarzane przez oddalone od siebie układy pomiarowe były nielocalne w funkcji wydajności detektorów, widzialności, a także nielokalności wytworzonej na detektorach znajdujących się blisko źródła, przy czym za miarę nielokalności użyto wyrażenia CHSH. Co ważne, im większa wartość wyrażenia Bella obserwowana jest blisko źródła, tym większa odległość na jaką można dystrybuować nielokalność przy zadanych parametrach opisujących straty w światłowodach lub na detektorach (ew. większe straty można tolerować na detektorach). W szczególnym przypadku, gdy na bliższych detektorach obserwowana jest maksymalna wartość wyrażenia CHSH, dystrybucja nielokalności możliwa jest na dowolnych odległościach.

Muszę przyznać, że ten schemat ten zrobił na mnie największe wrażenie spośród wszystkich wyników zaprezentowanych w rozprawie. Idea leżąca u jego podstaw jest bardzo prosta, a jednocześnie bardzo

oryginalna. Uważam, że schemat będzie miał duże znaczenie dla możliwości wykorzystania nielokalności Bella w praktyce, np. do dystrybucji klucza kryptograficznego w wersji niezależnej od urządzeń. Co prawda, Autorzy w pracy podkreślają, że nie jest on odporny na pewne ataki, niemniej jest to znaczący krok w stronę pokonania ograniczeń związanych z szumami i stratami o różnej naturze występującymi w eksperymencie Bella.

III. W trzeciej pracy, napisanej bez udziału promotora, stosowano programowanie półokreślone do badania, czy splątanie kwantowe pozwala uzyskać przewagę nad strategiami klasycznymi w realizacji dwóch zadań zaczerpniętych z teorii grafów: zadania spotkania (ang. *rendezvous task*) oraz zadania dominowania (ang. *domination task*). W obu mamy dwóch lub wielu uczestników rozmieszczonych na zadanym grafie, którzy mogą przejść przez ustaloną liczbę krawędzi. W przypadku pierwszego z zadań celem uczestników jest spotkanie się w tym samym wierzchołku, podczas gdy celem drugiego zadania jest dominacja w grafie, tzn. pokrycie jak największej liczby wierzchołków lub ich sąsiadów. Co istotne, uczestnicy nie mogą się ze sobą komunikować podczas wykonywania zadania, mogą jednak przed rozpoczęciem zadania ustalić wspólną strategię. Wymóg ten został oczywiście zaczerpnięty ze scenariusza Bella. W istocie, we wcześniejszej pracy [6] pokazano, że w przypadku zadania spotkania w szczególnym przypadku, w którym uczestnicy mogą poruszyć się na grafie tylko raz, uśrednione prawdopodobieństwo wykonania zadania można traktować jak wyrażenie typu Bella. Tutaj poszerzenie analizę o zadanie dominowania. Splątanie kwantowe pozwala uzyskać przewagę jeżeli odpowiednia nierówność Bella jest łamana.

Do badania łamania otrzymanych nierówności Bella użyto metody huśtawkowej w połączeniu z programowaniem półokreślonym, natomiast do badania wysycalności maksymalnej kwantowej wartości hierarchii NPA. W pracy przebadano zadania spotkania oraz dominacji dla wielu grafów o relatywnie niskiej liczbie wierzchołków, przy czym nakładano także różne więzy na uczestników, jak np. to, że muszą oni używać tych samych strategii. Otrzymane wyniki w zależności od nałożonych więzów są zaprezentowane w szeregu tabel. Ogólna konkluzja płynąca z tej analizy jest taka, że w wielu przypadkach splątanie kwantowe pozwala uzyskać przewagę nad strategiami klasycznymi, a w przypadku niektórych zadań przewaga ta jest bardzo duża. Jednocześnie, dość zaskakujący wydaje się fakt, że w przypadku trzech graczy nie udało się zaobserwować przewagi.

O ile podejście oparte na hierarchii NPA i metodzie huśtawkowej do badania łamania nierówności Bella jest już powszechnie stosowane w literaturze, to najważniejszym osiągnięciem pracy jest w mojej ocenie identyfikacja nowych zadań, w realizacji których splątanie kwantowe staje się kluczowym zasobem. Ponadto, podano w niej także bardzo ciekawy przepis na konstrukcje nietrywialnych nierówności Bella z grafów, które mogą znaleźć zastosowania w innym kontekście. Nasuwa się tutaj pytanie, czy odwracając tę relację można z innych, znanych z literatury nierówności Bella skonstruować zadane spotkania lub dominacji na pewnym grafie. Należy wreszcie dodeńić ogólność i dogłębność analizy przeprowadzonej w pracy; poza wynikami numerycznymi, autorom udało się również uzyskać szereg wyników analitycznych.

1. Myślę, że Autor, czy to w referacie, czy w samej pracy mógł dodać kilka zdań dotyczących możliwości odwrócenia zadań spotkania czy dominacji w przypadku, gdy uczestnicy mogą przejść więcej niż jedną krawędź na scenariusz typu Bella. Na pierwszy rzut oka wydaje się, że należałoby rozważyć scenariusz sekwencyjny, w którym na jednym podukładzie stanu wykonuje się sekwencję pomiarów tak jak ma to miejsce w pracy [R. Gallego et al., *New J. Phys.* **16** (2014) 033037]. Autor może skomentować ten aspekt w trakcie obrony.

2. O ile uważam, że przykłady podane w części V.C publikacji bardzo pomagają w zrozumieniu pracy, to wydaje mi się, że niektóre z operatorów pomiaru wymienionych na stronie 12 są błędnie zdefiniowane. Np na tej samej stronie jest napisane: „The first two cases are when one of the parties starts at node 0 and the other one at node 4. Then with probability 0.5 they both move to node 1 ...”. Z drugiej strony wartość oczekiwana iloczynu tensorowego operatorów pomiaru  $M(1,0)$  i  $M(1,4)$ , które realizują te ruchy wynosi zero bo operator  $M(1,0)$  jest zdefiniowany na podprzestrzeni rozpiętej przez wektory  $|1\rangle$  i  $|2\rangle$ , a lokalna macierz gęstości stanu splątanego na podprzestrzeni rozpiętej przez  $|0\rangle$  i  $|3\rangle$ . Zapewne jest to kwestia błędnego ponumerowania wektorów.

**Konkluzja.** Uważam, że praca doktorska Giuseppe Violi zawiera szereg ciekawych i nowatorskich wyników naukowych, przy czym wynik, który wywarł na mnie największe wrażenie to niezwykle prosty, a jednocześnie wysoce oryginalny schemat pozwalający na dystrybucję nielokalności kwantowej na duże odległości, w sytuacji, w której uwzględnione są straty w światłowodach i na detektorach. Jednocześnie, Autor udowodnił, że posiadał wiedzę teoretyczną w dziedzinie niezbędną do uzyskania stopnia doktora w dyscyplinie nauki fizyczne. Z drugiej strony, wszystkie uwagi krytyczne poczynione powyżej są małego kalibru i nie umniejszają mojej i tak pozytywnej oceny pracy. W związku z tym uważam, że rozprawa doktorska Giuseppe Violi spełnia wymogi ustawowe i wnoszę o dopuszczenie Kandydata do dalszych etapów postępowania doktorskiego, uwzględniając publiczną obronę.