



UNIVERSITY  
OF WARSAW

Faculty of Physics

Warszawa, 26.07.2024 r.

dr hab. Marcin Napiórkowski  
Wydział Fizyki UW

**Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Rafała Perczyńskiego  
”Computational methods for highly oscillatory partial differential equations”**

**Wstęp**

Rozprawa doktorska mgr. Rafała Perczyńskiego dotyczy analizy numerycznej rozwiązań równań różniczkowych postaci

$$\partial_t u = \mathcal{L}u + f(x, t)u \quad (1)$$

z warunkiem początkowym  $u_0$  i warunkami brzegowymi Dirichleta, w którym operator  $\mathcal{L}$  jest liniowym operatorem różniczkowym, zaś funkcja  $f$  jest (silnie) oscylująca:

$$f(x, t) = \sum_{n=-N, n \neq 0}^N \alpha_n(x) e^{in\omega t}, \quad \omega \gg 1.$$

Głównymi narzędziami, którym posługuje się doktorant są teoria półgrup, zmodyfikowane rozwinięcie Fouriera oraz metoda Filona.

Praca oparta jest na dwóch powiązanych tematycznie artykułach z których jeden jest jak na razie dostępny na arXiv, zaś drugi opublikowany został w *Numerical Algorithms*. Obie te publikacje są dwu autorskie: pierwsza z nich pt. ”Asymptotic expansions for the solution of a linear PDE with a multifrequency highly oscillatory potential” napisana została wraz z Antonim Augustynowiczem (promotorem), zaś druga - pt. ”Numerical integrator for highly oscillatory differential equations based on the Neumann series” - napisana została wraz z Grzegorzem Madejskim. Warto zaznaczyć, że pierwsza z powyższych prac jest uogólnieniem wyników uzyskanych przez Doktoranta wraz z Karoliną Kropielnicką w artykule ”Asymptotic expansions for the linear PDEs with oscillatory input terms; Analytical form and error analysis” opublikowanym w *Computers and Mathematics with Applications*, w którym autorzy rozważają to samo zagadnienie w prostszym przypadku w którym funkcja  $f(x, t)$  zawiera tylko jeden człon odpowiadający  $n = 1$ .

Doktorat napisany jest w języku angielskim, liczy 80 stron i podzielony jest na 5 rozdziałów oraz dodatek. Bibliografia liczy 35 pozycji.



## Omówienie pracy

Rozdział pierwszy stanowi wstęp w którym Doktorant wyjaśnia skąd się wziął problem badawczy i dlaczego istniejące metody (takie jak np. schemat Rungego-Kutty) nie są wystarczająco dobre do badania równań z silnie oscylującymi źródłami. W oparciu o tę dyskusję Autor prezentuje pokrótce na czym polegają główne wyniki doktoratu.

Rozdział drugi poświęcony jest przypomnieniu podstawowych informacji z teorii równań różniczkowych cząstkowych, w szczególności z teorii półgrup. Jak wiadomo, przy odpowiednich założeniach, operator  $\mathcal{L}$  jest generatorem półgrupy  $e^{t\mathcal{L}}$  rozwiązań równania (1) (z  $f = 0$ ) postaci  $e^{t\mathcal{L}}u_0$ . Istotne jest zatem efektywne numerycznie implementowanie operatora  $e^{t\mathcal{L}}$  - to zagadnienie jest również omówione w drugim rozdziale. Ponadto Autor prezentuje bardzo zwięźle metodę rozwinięcia w szereg Neumanna oraz omawia pokrótce dwie podstawowe metody obliczania całek oscylujących: metodę rozwinięć asymptotycznych oraz metodę Filona.

Trzeci rozdział jest najważniejszą częścią doktoratu. Jego pierwsze podrozdziały poświęcone są pokazaniu, że rozwiązanie równania (1) zapisać można w postaci

$$u(x, t) = p_{0,0}(x, t) + \sum_{r=1}^R \frac{1}{\omega^r} \sum_{s=0}^S p_{r,s}(x, t) e^{is\omega t} + \frac{1}{\omega^{R+1}} E_{R,S}. \quad (2)$$

Dowód opiera się na przedstawieniu rozwiązania za pomocą szeregu Neumanna. Wyznaczenie wyrazów tego szeregu opiera się na iterowaniu wzoru Duhamela. W Twierdzeniu 10. Doktorant pokazuje zbieżność tak skonstruowanego szeregu

$$\sum_{d=0}^{\infty} T^d e^{t\mathcal{L}} u_0$$

do rozwiązania równania (1) co jest dość standardowym faktem w teorii operatorów. W podrozdziale 3.2 Autor pokazuje, jak każdy wyraz  $T^d e^{t\mathcal{L}}$  zapisać można w postaci całek wielokrotnych co z kolei w kolejnych podrozdziałach pozwala Doktorantowi, przy założeniu braku rezonansów, przedstawić wspomniane całki wielokrotne w postaci prowadzącej wyrażenia postaci (2), czyli w postaci zmodyfikowanego rozwinięcia Fouriera. Podrozdział 3.5 poświęcony jest analizie rozwinięć asymptotycznych w sytuacji, gdy warunek braku rezonansów nie jest spełniony. W Twierdzeniu 13. Doktorant pokazuje, że pewne szczególne sumy całek oscylujących zawierających rezonanse łącznie wciąż są małe (dla dużych  $\omega$ ). W podrozdziale 3.6 Autor pokazuje jak w dość oczywisty sposób metody wyprowadzone dla równania (1) można zastosować dla równania falowego. Ostatnia część trzeciego rozdziału zawiera przykłady numeryczne.

Wadą podejścia zaprezentowanego w trzecim rozdziale jest jego użyteczność tylko dla bardzo dużych oscylacji. W czwartym rozdziale omawianego doktoratu prezentowane jest inne podejście do wyjściowego zagadnienia - wprowadza ono krok czasowy  $h$ , który staje się drugim obok częstotliwości  $\omega$  parametrem problemu. Dokładniej, w czwartym rozdziale rozważany jest szereg Neumanna postaci  $T_t^d e^{h\mathcal{L}}$ , którego



suma zadaje lokalne w czasie przesunięcie  $u(t+h)$ . Otrzymane w tym rozwinięciu całki analizowane są metodą Filona. Doktorant pokazuje w Twierdzeniu 14, że dla źródła postaci (2), gdzie występują tylko  $n \geq 1$ , proponowany schemat gwarantuje zbieżność daną przez  $\min\{h^4, h^2\omega^{-2}, \omega^{-3}\}$ . Końcowa część rozdziału poświęcona jest przykładom numerycznym.

Rozdział piąty zawiera krótką listę dalszych problemów badawczych związanych z tematyką omawianego doktoratu. Dodatek zawiera dowody Twierdzenia 11. i Lematu 9. oraz rachunki związane z metodą Filona użyte w rozdziale czwartym.

### Uwagi i opinia

Uważam, że omawiana praca doktorska stoi na przyzwoitym poziomie. Temat badawczy jest uzasadniony, zaś kolejne publikacje i zawarte w nich rezultaty stanowią spójną całość rozwijającą program badawczy.

Do samej pracy ma jednak kilka zastrzeżeń, o których chciałbym teraz wspomnieć. Mam nadzieję, że Doktorant ustosunkuje się do nich podczas publicznej obrony.

- We wstępie rozprawy brakuje mi rysu historycznego zagadnienia i osadzenia omawianej rozprawy w szerszym kontekście. Które prace są w danej dziedzinie najistotniejsze? Które stanowiły inspirację?
- Kluczowym założeniem Twierdzenia 11 jest założenie o braku rezonansów, które w ogólności są obecne. Sytuację z rezonansami Autor analizuje w ramach Twierdzenia 13. Brakuje mi dyskusji jak interpretować wynik tego ostatniego twierdzenia w kontekście rozwinięć asymptotycznych dla pełnego równania.
- Twierdzenia aproksymacyjne udowodnione są dla normy  $\|\cdot\|_2$ . W szczególności w rozdziałach poświęconych przykładom numerycznym Autor prezentuje wyniki dla wielkości

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_2 \quad (3)$$

dla pewnej chwili  $t$ , gdzie  $u$  jest jawnym rozwiązaniem zaś  $\tilde{u}(t)$  wynikiem omawianego schematu aproksymującego. O ile w przypadku ewolucji unitarnych analizowanie takiej różnicy jest dobrze uzasadnione, o tyle w przypadku ewolucji, na przykład, dysypatywnych nie jestem przekonany dlaczego analizowanie akurat wielkości (3) jest tym co mówi nam coś o użyteczności danej metody. Wyobraźmy sobie sytuację dysypatywnej ewolucji dla której  $\|u(0)\|_2 = 1$ , ale już  $\|u(t)\|_2 = \epsilon^2$ , dla  $\epsilon \ll 1$ . W takiej sytuacji oszacowanie typu  $\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_2 \leq \epsilon$  niewiele nam mówi o jakości naszego przybliżenia. Czy nie powinno się zastąpić (3) przez

$$\frac{\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} \quad ?$$

- We wstępie Autor wspomina, że prezentowane metody nadają się do analizy także równania Schrödingera.



Niestety żaden z przykładów numerycznych tego nie robi. W kontekście mojej wcześniejszej uwagi byłoby to z pewnością pożądane.

- Wszystkie przykłady dotyczą sytuacji jednowymiarowej przestrzeni fizycznej. Czy doktorant rozważał przykłady wielowymiarowe?
- Nie jestem zwolennikiem umieszczania dowodów twierdzeń w dodatku. W szczególności dowód istotnego dla rozprawy Twierdzenia 11. powinien być w głównym tekście i powinien mieć także więcej szczegółów.
- Lemat 6. zakłada, że  $n_1$  i  $n_2$  są dodatnie. W dowodzie mamy jednak tylko przypadek  $n_1 = n_2 = 1$ . Uważam, że w takiej sytuacji Autor powinien skomentować jak uogólnić analizę tak by udowodniony został lemat w pierwotnej formie.
- Doktorant nie ustrzegł się drobnych błędów natury redakcyjnej. I tak na przykład na stronie 13. w pierwszej linijce  $h$  oznacza funkcję a chwilę dalej we wzorze (2.16) oznacza krok czasowy; poniżej wzoru (1.4) jest mowa o  $u_0$  choć we wzorze ono nie występuje; poniżej wzoru (2.1) mowa jest o półgrupie na przestrzeni Hilberta podczas, gdy linijkę później wszystko jest już dla przestrzeni Banacha; na końcu wzoru (2.14) brakuje kropki, etc. W kilku miejscach widać, że przeniesienie treści artykułu naukowego do rozprawy doktorskiej prowadzi do drobnych zgrzytów: np. użycie słowa "manuscript" w odniesieniu do rozprawy doktorskiej albo powtórzenie kilku argumentacji zarówno na początku rozprawy jak i w kolejnych rozdziałach. Generalnie jednak praca napisana jest dość starannie.

### Konkluzja

Powyższe uwagi nie wpływają na moją pozytywną ocenę omawianej pracy. Doktorant wykazał w niej, że dysponuje ogólną wiedzą teoretyczną wymaganą do otrzymania stopnia doktora w dyscyplinie matematyka. Zaprezentowane w rozprawie i opublikowane rozwiązanie problemu badawczego pokazuje, że potrafi on samodzielnie prowadzić pracę naukową.

W związku z powyższym stwierdzam, że przedstawiona mi do recenzji rozprawa mgr. Rafała Perczyńskiego "Computational methods for highly oscillatory partial differential equations" spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim, i wnoszę o dopuszczenie jej do dalszej części postępowania.

dr hab. Marcin Napiórkowski