UNIVERSITY
OF WARSAW
Faculty of Physics

Warszawa, 26.07.2024 r.

dr hab. Marcin Napiórkowski
Wydział Fizyki UW

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Rafała Perczyńskiego
"Computational methods for highly oscillatory partial differential equations"

Wstęp

Rozprawa doktorska mgr. Rafała Perczyńskiego dotyczy analizy numerycznej rozwiązań równań różniczkowych postaci

$$\partial_t u = \mathcal{L}u + f(x,t)u \tag{1}$$

z warunkiem początkowym u_0 i warunkami brzegowymi Dirichleta, w którym operator $\mathcal{L}$ jest liniowym operatorem różniczkowym, zaś funkcja f jest (silnie) oscylująca:

$$f(x,t) = \sum_{n=-N, n\neq 0}^{N} \alpha_n(x) e^{in\omega t}, \qquad \omega \gg 1.$$

Głównymi narzędziami, którym posługuje się doktorant są teoria półgrup, zmodyfikowane rozwinięcie Fouriera oraz metoda Filona.

Praca oparta jest na dwóch powiązanych tematycznie artykułach z których jeden jest jak na razie dostępny na arXiv, zaś drugi opublikowany został w *Numerical Algorithms*. Obie te publikacje są dwu autorskie: pierwsza z nich pt. "Asymptotic expansions for the solution of a linear PDE with a multifrequency highly oscillatory potential" napisana została wraz z Antonim Augustynowiczem (promotorem), zaś druga - pt. "Numerical integrator for highly oscillatory differential equations based on the Neumann series" - napisana została wraz z Grzegorzem Madejskim. Warto zaznaczyć, że pierwsza z powyższych prac jest uogólnieniem wyników uzyskanych przez Doktoranta wraz z Karoliną Kropielnicką w artykule "Asymptotic expansions for the linear PDEs with oscillatory input terms; Analytical form and error analysis" opublikowanym w *Computers and Mathematics with Applications*, w którym autorzy rozważają to samo zagadnienie w prostszym przypadku w którym funkcja $f(x,t)$ zawiera tylko jeden człon odpowiadający $n = 1$.

Doktorat napisany jest w języku angielskim, liczy 80 stron i podzielony jest na 5 rozdziałów oraz dodatek. Bibliografia liczy 35 pozycji.

Pasteura 5, 02-093 Warsaw
tel.: +48 22 55 32 935
e-mail: dziekfiz@fuw.edu.pl
FACULTY OF PHYSICS

Omówienie pracy

Rozdział pierwszy stanowi wstęp w którym Doktorant wyjaśnia skąd się wziął problem badawczy i dlaczego istniejące metody (takie jak np. schemat Rungego-Kutty) nie są wystarczająco dobre do badania równań z silnie oscylującymi źródłami. W oparciu o tę dyskusję Autor prezentuje pokrótce na czym polegają główne wyniki doktoratu.

Rozdział drugi poświęcony jest przypomnieniu podstawowych informacji z teorii równań różniczkowych cząstkowych, w szczególności z teorii półgrup. Jak wiadomo, przy odpowiednich założeniach, operator $\mathcal{L}$ jest generatorem półgrupy $e^{t\mathcal{L}}$ rozwiązań równania (1) (z $f = 0$) postaci $e^{t\mathcal{L}}u_0$. Istotne jest zatem efektywne numerycznie implementowanie operatora $e^{t\mathcal{L}}$ - to zagadnienie jest również omówione w drugim rozdziale. Ponadto Autor prezentuje bardzo zwięźle metodę rozwinięcia w szereg Neumanna oraz omawia pokrótce dwie podstawowe metody obliczania całek oscylujących: metodę rozwinięć asymptotycznych oraz metodę Filona.

Trzeci rozdział jest najważniejszą częścią doktoratu. Jego pierwsze podrozdziały poświęcone są pokazaniu, że rozwiązanie równania (1) zapisać można w postaci

$$u(x,t) = p_{0,0}(x,t) + \sum_{r=1}^{R} \frac{1}{\omega^r} \sum_{s=0}^{S} p_{r,s}(x,t) e^{is\omega t} + \frac{1}{\omega^{R+1}} E_{R,S}. \tag{2}$$

Dowód opiera się na przedstawieniu rozwiązania za pomocą szeregu Neumanna. Wyznaczenie wyrazów tego szeregu opiera się na iterowaniu wzoru Duhamela. W Twierdzeniu 10. Doktorant pokazuje zbieżność tak skonstruowanego szeregu

$$\sum_{d=0}^{\infty} T^d e^{t\mathcal{L}} u_0$$

do rozwiązania równania (1) co jest dość standardowym faktem w teorii operatorów. W podrozdziale 3.2 Autor pokazuje, jak każdy wyraz $T^d e^{t\mathcal{L}}$ zapisać można w postaci całek wielokrotnych co z kolei w kolejnych podrozdziałach pozwala Doktorantowi, przy założeniu braku rezonansów, przedstawić wspomniane całki wielokrotne w postaci prowadzącej wyrażenia postaci (2), czyli w postaci zmodyfikowanego rozwinięcia Fouriera. Podrozdział 3.5 poświęcony jest analizie rozwinięć asymptotycznych w sytuacji, gdy warunek braku rezonansów nie jest spełniony. W Twierdzeniu 13. Doktorant pokazuje, że pewne szczególne sumy całek oscylujących zawierających rezonanse łącznie wciąż są małe (dla dużych ω). W podrozdziale 3.6 Autor pokazuje jak w dość oczywisty sposób metody wyprowadzone dla równania (1) można zastosować dla równania falowego. Ostatnia część trzeciego rozdziału zawiera przykłady numeryczne.

Wadą podejścia zaprezentowanego w trzecim rozdziale jest jego użyteczność tylko dla bardzo dużych oscylacji. W czwartym rozdziale omawianego doktoratu prezentowane jest inne podejście do wyjściowego zagadnienia - wprowadza ono krok czasowy h, który staje się drugim obok częstotliwości ω parametrem problemu. Dokładniej, w czwartym rozdziale rozważany jest szereg Neumanna postaci $T_t^d e^{h\mathcal{L}}$, którego suma zadaje lokalne w czasie przesunięcie $u(t+h)$. Otrzymane w tym rozwinięciu całki analizowane są metodą Filona. Doktorant pokazuje w Twierdzeniu 14, że dla źródła postaci (2), gdzie występują tylko $n \geqslant 1$, proponowany schemat gwarantuje zbieżność daną przez $\min\{h^4, h2\omega^{-2}, \omega^{-3}\}$. Końcowa część rozdziału poświęcona jest przykładom numerycznym.

Rozdział piąty zawiera krótką listę dalszych problemów badawczych związanych z tematyką omawianego doktoratu. Dodatek zawiera dowody Twierdzenia 11. i Lematu 9. oraz rachunki związane z metodą Filona użyte w rozdziale czwartym.

Uwagi i opinia

Uważam, że omawiana praca doktorska stoi na przyzwoitym poziomie. Temat badawczy jest uzasadniony, zaś kolejne publikacje i zawarte w nich rezultaty stanowią spójną całość rozwijającą program badawczy.

Do samej pracy ma jednak kilka zastrzeżeń, o których chciałbym teraz wspomnieć. Mam nadzieję, że Doktorant ustosunkuje się do nich podczas publicznej obrony.

- We wstępie rozprawy brakuje mi rysu historycznego zagadnienia i osadzenia omawianej rozprawy w szerszym kontekście. Które prace są w danej dziedzinie najistotniejsze? Które stanowiły inspirację?
- Kluczowym założeniem Twierdzenia 11 jest założenie o braku rezonansów, które w ogólności są obecne. Sytuację z rezonansami Autor analizuje w ramach Twierdzenia 13. Brakuje mi dyskusji jak interpretować wynik tego ostatniego twierdzenia w kontekście rozwinięć asymptotycznych dla pełnego równania.
- Twierdzenia aproksymacyjne udowadniane są dla normy $\|\cdot\|_2$. W szczególności w rozdziałach poświęconych przykładom numerycznym Autor prezentuje wyniki dla wielkości

  $$\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_2 \tag{3}$$

  dla pewnej chwili t, gdzie u jest jawnym rozwiązaniem zaś $\tilde{u}(t)$ wynikiem omawianego schematu aproksymującego. O ile w przypadku ewolucji unitarnych analizowanie takiej różnicy jest dobrze uzasadnione, o tyle w przypadku ewolucji, na przykład, dysypatywnych nie jestem przekonany dlaczego analizowanie akurat wielkości (3) jest tym co mówi nam coś o użyteczności danej metody. Wyobraźmy sobie sytuację dysypatywnej ewolucji dla której $\|u(0)\|_2 = 1$, ale już $\|u(t)\|_2 = \epsilon^2$, dla $\epsilon \ll 1$. W takiej sytuacji oszacowanie typu $\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_2 \leqslant \epsilon$ niewiele nam mówi o jakości naszego przybliżenia. Czy nie powinno się zastąpić (3) przez

  $$\frac{\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} \qquad ?$$

- We wstępie Autor wspomina, że prezentowane metody nadają się do analizy także równania Schrödingera.

Pasteura 5, 02-093 Warsaw
tel.: +48 22 55 32 935
e-mail: dziekfiz@fuw.edu.pl

Niestety żaden z przykładów numerycznych tego nie robi. W kontekście mojej wcześniejszej uwagi byłoby to z pewnością pożądane.

- Wszystkie przykłady dotyczą sytuacji jednowymiarowej przestrzeni fizycznej. Czy doktorant rozważał przykłady wielowymiarowe?
- Nie jestem zwolennikiem umieszczania dowodów twierdzeń w dodatku. W szczególności dowód istotnego dla rozprawy Twierdzenia 11. powinien być w głównym tekście i powinien mieć także więcej szczegółów.
- Lemat 6. zakłada, że n_1 i n_2 są dodatnie. W dowodzie mamy jednak tylko przypadek $n_1 = n_2 = 1$. Uważam, że w takiej sytuacji Autor powinien skomentować jak uogólnić analizę tak by udowodniony został lemat w pierwotnej formie.
- Doktorant nie ustrzegł się drobnych błędów natury redakcyjnej. I tak na przykład na stronie 13. w pierwszej linijce h oznacza funkcję a chwilę dalej we wzorze (2.16) oznacza krok czasowy; poniżej wzoru (1.4) jest mowa o u_0 choć we wzorze ono nie występuje; poniżej wzoru (2.1) mowa jest o półgrupie na przestrzeni Hilberta podczas, gdy linijkę później wszystko jest już dla przestrzeni Banacha; na końcu wzoru (2.14) brakuje kropki, etc. W kilku miejscach widać, że przeniesienie treści artykułu naukowego do rozprawy doktorskiej prowadzi do drobnych zgrzytów: np. użycie słowa "manuscript" w odniesieniu do rozprawy doktorskiej albo powtórzenie kilku argumentacji zarówno na początku rozprawy jak i w kolejnych rozdziałach. Generalnie jednak praca napisana jest dość starannie.

Konkluzja

Powyższe uwagi nie wpływają na moją pozytywną ocenę omawianej pracy. Doktorant wykazał w niej, że dysponuje ogólną wiedzą teoretyczną wymaganą do otrzymania stopnia doktora w dyscyplinie matematyka. Zaprezentowane w rozprawie i opublikowane rozwiązanie problemu badawczego pokazuje, że potrafi on samodzielnie prowadzić pracę naukową.

W związku z powyższym stwierdzam, że przedstawiona mi do recenzji rozprawa mgr. Rafała Perczyńskiego "Computational methods for highly oscillatory partial differential equations" spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim, i wnoszę o dopuszczenie jej do dalszej części postępowania.

Podpisany elektronicznie przez
Marcin Napiórkowski; Uniwersytet Warszawski
26.07.2024
14:36:04 +02'00'

dr hab. Marcin Napiórkowski

Pasteura 5, 02-093 Warsaw
tel.: +48 22 55 32 935
e-mail: dziekfiz@fuw.edu.pl