dr hab. Piotr Kalita, prof. UJ,
Wydział Matematyki i Informatyki,
Uniwersytet Jagielloński,
ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków,
piotr.kalita@ii.uj.edu.pl

Kraków, 25 października 2024

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Rafała Perczyńskiego pt. "Computational methods for highly oscillatory partial differential equations"

Praca doktorska magistra Rafała Perczyńskiego została przygotowana pod kierunkiem dr hab. Antoniego Augustynowicza, prof. UG.

Jej wyniki dotyczą metod numerycznych dla zagadnień opisanych równaniami cząstkowymi zawierającymi nieautonomiczne człony szybko oscylujące w czasie. Ze względu na te szybkie oscylacje, standardowe metody, oparte o różnice skończone albo elementy skończone zawodzą, lub też wymagają bardzo małych kroków czasowych. Wymagana jest konstrukcja metod odpowiednio dostosowanych, pozwalających na efektywną aproksymację w takiej sytuacji szybkiej oscylacji.

Praca przedstawia wyniki zawarte w dwóch artykułach: jednym napisanym przez doktoranta wspólnie z promotorem, A. Augustynowiczem, dostępnej jako preprint

[1] *Rafał Perczyński, Antoni Augustynowicz, Asymptotic expansions for the solution of a linear PDE with a multifrequency highly oscillatory potential, arXiv:2310.14650*

oraz drugiej pracy wspólnej z G. Madejskim, opublikowanej w czasopismie Numerical Algorithms

[2] *Rafał Perczyński, Grzegorz Madejski, Numerical integrator for highly oscillatory differential equations based on the Neumann series, Numerical Algorithms, https://doi.org/10.1007/s11075-024-01841-9*

Ponadto doktorant jest współautorem dwóch artykułów, jednego wspólnego z K. Kropielnicką (praca [3]), a drugiego z M. Condon, K. Kropielnicką i K. Lademann (praca [4]) których wyniki nie zostały włączone w skład rozprawy.

[3] *Karolina Kropielnicka, Rafał Perczyński, Asymptotic expansions for the linear PDEs with oscillatory input terms; Analytical form and error analysis, Computers & Mathematics with Applications 156, 2024, 16–27*
[4] *Marissa Condon, Karolina Kropielnicka, Karolina Lademann, Rafał Perczyński, Asymptotic numerical solver for the linear Klein–Gordon equation with space- and time-dependent mass, Applied Mathematics Letters 115, 2021, 106935.*

Wyniki zawarte w pracach składających się na rozprawę doktorską są uogólnieniem i istotnym ulepszeniem wyników z artykułu [3], który jest dla nich punktem wyjścia. Zarówno w [3] jak i w [1,2] rozważane jest zagadnienie postaci

$$u_t = \mathcal{L}u + f(t,x)u,$$

gdzie f jest funkcją szybko oscylującą względem t, przy czym w [3] funkcja f ma postać

$$f(x,t) = a(x)e^{i\omega t},$$

dla pewnej 'dużej' częstotliwości ω, natomiast w [1,2] i w rozprawie jest rozważana ogólniejsza postać: w [1] mamy

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(x)e^{in\omega t},$$

a w [2] mamy postać

$$f(x,t) = \sum_{n=-N,n\neq 0}^{N} \alpha_n(x)e^{in\omega t}.$$

Operator $-\mathcal{L}$ jest silnie eliptycznym operatorem różniczkowym rzędu parzystego na dziedzinie ograniczonej z gładkim brzegiem, zatem $\mathcal{L}$ generuje silnie ciągłą półgrupę, a rozwiązanie można reprezentować poprzez wzór Duhamela

$$u(t) = e^{t\mathcal{L}}u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)t\mathcal{L}} f(\tau)u(\tau)\, d\tau.$$

Fakt, że u występuje po lewej i po prawej stronie powyższej równości motywuje metodę numeryczną jaką formułuje Doktorant, opartą o szereg Neumanna, którego suma częściowa dana jest wzorem

$$u^{[n]}(t) = \sum_{d=0}^{n} T^d e^{t\mathcal{L}} u_0, \tag{0.1}$$

gdzie

$$Tu(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)\mathcal{L}} f(\tau)u(\tau)\, d\tau.$$

Złożenie ze sobą d-krotnie operatora T prowadzi do wyrażeń zawierających iterowane całki czasowe.

Kluczowe wyniki rozprawy znajdują się w Rozdziałach 3 i 4. Rozdział 3 zawiera wyniki z pracy [1]. Pierwszy istotnym wynikiem rozprawy jest Twierdzenie 10 z Rodziału 3.1, w którym pokazana jest zbieżność szeregu Neumanna do poszukiwanego rozwiązania łagodnego. Jest to ulepszenie wyniku z pracy [3] gdyż tu uzyskana jest zbieżność w przestrzeni Sobolewa. W realizacji metody numerycznej opartej o szereg Neumanna istotną trudnością jest policzenie iterowanych całek występujących w T^d. Doktorant za pomocą odpowiednich całkowań przez części przedstawia je jako wyrażenia w których ω do pewnej potęgi znajduje się w mianowniku, co prowadzi go do rozwinięcia asymptotycznego znanego jako Modulowane Rozwinięcie Fourierowskie (MFE). Zaletą takiego podejścia jest to, że dla dużych częstotliwości oscylacji, szeregi są szybko zbieżne. W Rozdziałach 3.3 i 3.5 Doktorant wyprowadza wzory na wyrażenia pojawiające się w rozwinięciu, reprezentując je jako sumy częściowe, z pewnym błędem aproksymacji. Są one dane w Twierdzeniu 11, a w trudniejszym, rezonansowym, przypadku są oszacowane w Twierdzeniu 13. Z kolei Rozdział 3.2 zawiera oszacowania błędu względem ω dla sumy częściowej szeregu Neumanna, oraz dodatkowo dla błędów obcięcia w sumach częściowych reprezentujących poszczególne wyrażenia w szeregu. Błąd jest oszacowany jako $\mathcal{O}(\omega^{-r-1})$ dla r-tej sumy częściowej, czyli maleje wraz ze wzrostem częstości oscylacji ω. Rozdział jest zakończony ciekawymi przykładami numerycznymi które demonstrują jak maleje błąd przy zwiększaniu ω i przy zwiększaniu poziomu odcięcia szeregu Neumanna. Wyniki numeryczne potwierdzają teoretyczne obserwacje.

Kolejny, czwarty, rozdział zawiera wyniki z pracy [2]. Istotne jest tutaj, że Doktorant zamiast całkować przez części w czasie człony jakie uzyskuje w szeregu Neumanna, stosuje kwadratury Filona, których idea opiera się na interpolacji wyrażenia wolniej oscylującego i bezpośredniego scałkowania szybko oscylującej eksponenty. W wyniku tej procedury uzyskujemy ten sam co w poprzednim rozdziale efekt dzielenia przez częstotliwość, co sprawia że dla wysoko oscylujących wyrażeń metoda daje lepsze wyniki. Wyprowadzenie metody numerycznej opartej na kwadraturze Filona znajduje się w Rozdziale 4.1. Zastosowanie kwadratury prowadzi do dodatkowego błędu numerycznego, gdyż poza błędem biorącym się z obcięć szeregów, mamy dodatkowy błąd kwadratury. Doktorant szacuje oba te błędy w Rozdziale 4.2, uzyskuje oszacowanie błędu względem ω i kroku h siatki użytej do kwadratury. Rozumowanie jest przeprowadzone dla czterech pierwszych wyrażeń w szeregu Neumanna. Rozdział zawiera także przykłady numeryczne ilustrujące zależność błędu od ω i h odpowiadające uzyskanym teoretycznym oszacowaniom, oraz porównanie z innymi metodami numerycznymi.

Kilka technicznych dowodów z rozprawy zostało przeniesionych do Appendixu.

Klasa metod numerycznych badanych w rozprawie dotyczy problemów ważnych i trudnych. Są to metody niestandardowe, dostosowane do konkretnych problemów, z wyrażeniami wysoko oscylującymi w czasie. Rozprawa bez wątpienia stanowi oryginalny wkład w rozwój teorii metod numerycznych dla równań cząstkowych. Zaproponowane w rozprawie metody, choć są rozszerzeniem podejścia stosowanego wcześniej przez K. Kropielnicką i współautorów, więc nie dostarczają nowych przełomowych narzędzi, to są istotnym, niebanalnym, rozszerzeniem które wymagało od Doktoranta kreatywności i ciekawych pomysłów. Wyniki rozprawy uważam za zaawansowane i interesujące. Nadto sama praca jest napisana poprawnie, nie mam uwag technicznych do jej treści.

Oceniam pozytywnie recenzowaną rozprawę. Bez wątpienia stanowi ona oryginalne rozwiązanie interesującego problemu badawczego. Wnoszę o jej dopuszczenie do dalszych etapów postępowania o nadanie stopnia naukowego doktora.