Streszczenie

W niniejszej rozprawie zajmujemy się problemem aproksymacji rozwiązania wysoko oscylującego równania różniczkowego cząstkowego z silnie eliptycznym operatorem różniczkowym. Rozważamy równania ewolucyjne z pierwszą lub drugą pochodną względem zmiennej czasowej. Oscylacje są wywoływane przez funkcję potencjału równania. Takie równania są trudne w aproksymacji numerycznej, ponieważ standardowe i dobrze znane metody są dla nich zazwyczaj nieskuteczne.

W pierwszej części rozprawy wyprowadzamy analitycznie zmodyfikowane rozwinięcie Fouriera dla liniowego równania różniczkowego cząstkowego z wysoko oscylującą funkcją potencjału z wieloma częstotliwościami. Zmodyfikowane rozwinięcie Fouriera (w skrócie piszemy MFE) jest ważnym narzędziem w matematyce obliczeniowej, które jest wykorzystywane między innymi do badania zachownania rozwiązania wysoko oscylującego równania Hamiltona na długim przedziale czasowym. Ponadto MFE może być również wykorzystywane w numeryczno-asymptotycznym podejściu jako ansatz w celu znalezienia przybliżonego rozwiązania liniowego lub nieliniowego wysoko oscylującego równania różniczkowego. Aby analitycznie wyprowadzić zmodyfikowane rozwinięcie Fouriera dla rozważanego problemu na początku pokazujemy, że rozwiązanie równania może być przedstawione jako suma zbieżnego szeregu Neumanna w odpowiedniej przestrzeni Sobolewa. Następnie, korzystając z całkowania przez części i teorii półgrup, rozwijamy asymptotycznie wyrazy szeregu Neumanna w sumy o znanych współczynnikach. Grupując odpowiednio wyrazy otrzymujemy poszukiwane rozwinięcie asymptotyczne równania. Proponowane podejście umożliwia po pierwsze wyznaczenie współczynników MFE, a po drugie oszacowanie błędu wynikającego z aproksymacji rozwiązania przez zmodyfikowane rozwinięcie Fouriera.

W drugiej części rozprawy wykorzystujemy wyniki z pierwszej części pracy i przedstawiamy metodę numeryczną tworzoną w oparciu o szereg Neumanna i kwadraturę Filona. Metoda może być stosowana do równań które nie oscylują, jednakże wbrew intuicji duże oscylacje zwiększają dokładność schematu numerycznego. Proponowane podejście pozwala na łatwe szacowanie błędu metody i umożliwia poprawę rzędu zbieżności w prosty sposób.

Metody obliczeniowe które prezentujemy w rozprawie, są ilustrowane wieloma przykładami. Dla każdego równania w przykładach numerycznych znamy rozwiązanie analityczne. Nie musimy więc obliczać rozwiązań referencyjnych za pomocą superkomputera. Możemy dokładnie porównać aproksymację numeryczną przy użyciu proponowanych metod z funkcją spełniającą równanie.