prof. dr hab. Andrzej Kisielewicz
Politechnika Wrocławska

Wrocław, 9 stycznia 2025r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Bartłomieja Pawelskiego

Rozprawa doktorska mgra Bartłomieja Pawelskiego zatytułowana „Counting and generating monotone Boolean functions" składa się z czterech prac o wspólnej tematyce:

(A) B. Pawelski. On the number of inequivalent monotone Boolean functions of 8 variables. *J. Integer Sequences* 25 (2022)

(B) B. Pawelski, A. Szepietowski. Divisibility properties of Dedekind numbers. *J. Integer Sequences* 26 (2023)

(C) B. Pawelski, On the number of inequivalent monotone Boolean functions of 9 variables. *IEEE Trans. Inf. Theory* 70 (2024)

(D) B. Pawelski, A. Szepietowski. Counting self-dual monotone Boolean functions. Arxiv preprint (2024)

Powyższe prace w całości stanowią części rozprawy doktorskiej i poprzedzone są obszernym dziesięciostronicowym wprowadzeniem do tematyki prac i omówieniem ich wyników.

Tematyka rozprawy.

Motywacją do badań prezentowanych w rozprawie jest problem sformułowany swego czasu przez samego Dedekinda znalezienia wzoru na liczbę d_n antyłańcuchów w zbiorze podzbiorów n-elementowego zbioru. Liczba ta ma kilka równoważnych definicji: w szczególności jest to liczba monotonicznych funkcji boolowskich n zmiennych lub moc wolnej kraty dystrybutywnej z n generatorami. (Przypomnijmy, że funkcja *boolowska* n zmiennych to funkcja $f(x_1, \dots, x_n)$, w której argumenty i wartości należą do zbioru $\mathbf{2} = \{0, 1\}$, czyli funkcja postaci $f : \mathbf{2}^n \to \mathbf{2}$. Taka funkcja jest monotoniczna, jeśli w porządku produktowym na ciągach $\mathbf{2}^n$, $\mathbf{x}_1 \leqslant \mathbf{x}_2$ implikuje $f(\mathbf{x}_1) \leqslant f(\mathbf{x}_2)$.)

Do roku 1985, gdy autor tej recenzji zainteresował się problemem, znane były wzory asymptotyczne pokazujące z jak wielką liczbą mamy do czynienia oraz wartości liczby d_n dla $n \leqslant 7$ (pierwsze kilka wartości wyliczył sam Dedekind w swojej pracy na ten temat). Autorowi recenzji udało się napisać pewien arytmetyczny wzór na te liczbę, którego jedyną zaletą był fakt, że mieścił się w jednej linijce (wynik został opublikowany w 1988 w *J. Reine Angew. Math.*)

Ze względu na powszechne przekonanie, że elementarny wzór (*closed formula*) na liczbę d_n nie istnieje, podobnie jak w przypadku wielu innych liczb z kombinatorycznymi definicjami, część badaczy zajmuje się próbami obliczenia kolejnych nieznanych wartości. Badania te sytuują się na pograniczu matematyki i informatyki, bo wymagają zazwyczaj odpowiedniego zaprogramowania obliczeń w oparciu o specjalnie znajdowane w tym celu matematyczne zależności. Ściśle związana z tymi badaniami jest *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS), gdzie kolejne odkrywane wartości są odnotowywane oraz *Journal of Integer Sequences* publikujący rezultaty badań w tym zakresie.

W roku 1991 obliczona została wartość D_8, a ostatnio, w 2023 roku wartość liczby $D_9 = 286386577668298411128469151667598498812366$ (42 cyfry). Ta ostatnia wartość została obliczona niezależnie różnymi metodami przez Christiana Jäkela z TU Drezno oraz przez zespół z Uniwersytetu Paderborn, w obu przypadkach z użyciem nowoczesnej technologii obliczeniowej: w pierwszym – procesora graficznego (GPU), a w drugim – bezpośrednio programowalnej macierzy bramek (FPGA).

Badania mgra Pawelskiego sytuują się dokładnie w opisanej dziedzinie. Z liczbą d_n monotonicznych funkcji boolowskich n zmiennych można związać kolejne liczby: r_n – liczba nierównoważnych monotonicznych funkcji boolowskich n zmiennych, λ_n – liczba funkcji boolowskich n zmiennych samo-dualnych, oraz q_n – liczba nierównoważnych funkcji boolowskich n zmiennych samo-dualnych.

Dwie funkcje boolowskie $f(x_1, \ldots, x_n)$ i $g(x_1, \ldots, x_n)$ są *równoważne*, jeśli mogą być otrzymane jedna z drugiej przez permutację zmiennych:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

dla pewnej permutacji $\sigma \in S_n$. Funkcja *dualna* do $f(x_1, \ldots, x_n)$ to funkcja otrzymana przez zamianę we wszystkich argumentach i wartościach zer z jedynkami. Funkcja jest *samo-dualna* jeśli jest dualna sama do siebie. Co ciekawe, ponieważ definicje wszystkich monotonicznych funkcji boolowskich można wyrazić przy pomocy logicznych funkcji alternatywy i koniunkcji, dualizm można zdefiniować również przez zamianę ze sobą znaków alternatywy i koniunkcji w definicji (i od tego naturalnego *dualizmu* w algebrach Boole'a pochodzi nazwa).

W rozprawie obliczone zostały nieznane do tej pory wartości liczb r_8, r_9 i q_8 oraz wartość $d_9 \equiv 6$ modulo 210 (ostatni rezultat został osiągnięty zanim pojawiły się rezultaty z dokładna wartością d_9). Autor stosował raczej powszechnie dostępne urządzenia obliczeniowe skupiając się na zaprojektowaniu efektywnych algorytmów.

Najbardziej odpowiednia do obliczeń forma polega na zakodowaniu funkcji boolowskiej $f : \mathbf{2}^n \to \mathbf{2}$ jako ciągu bitów długości 2^n, gdzie k-ty bit interpretowany jest jako wartość funkcji na ciągu zero-jedynkowym długości n, k-tym w porządku leksykograficznym takich ciągów. Przykładowo, ciąg 0101 reprezentuje funkcję $f : \mathbf{2}^2 \to \mathbf{2}$, w którym kolejne bity to wartości funkcji dla argumentów, odpowiednio, $00, 01, 10, 11$. Dla $n = 8$ i $n = 9$ funkcje kodowane są zatem ciągami długości 256 i 512. Przedmiotem badań okazują się wtedy różne podstruktury naturalnego częściowego porządku na takich ciągach (indukowanego przez relację $0 \leqslant 1$).

Przechodząc do kilku uwag szczegółowych na temat rozprawy, warto w tym miejscu dodać jeszcze, że powyższa konwencja pozwala łatwo operować funkcjami boolowskimi monotonicznymi. Przede wszystkim na funkcjach boolowskich prezentowanych jako ciągi zero-jedynkowe mamy naturalny produktowy porządek, który tożsamy jest z porządkiem leksykograficznym. Dzięki temu, konkatenacja fg dwóch ciągów reprezentujących funkcje monotoniczne n zmiennych f i g daje funkcję monotoniczną $n+1$ zmiennych, i każda funkcja boolowska monotoniczna $n + 1$ zmiennych jest tej postaci. Przykładowo, z trzech funkcji boolowskich monotonicznych jednej zmiennej $00, 01, 11$ dostajemy sześć funkcji boolowskich monotonicznych dwóch zmiennych $0000, 0001, 0011, 0101, 0111, 1111$.

Uwagi szczegółowe.

str 11, linia 14: Definicja w tym akapicie jest niezbyt jasno napisana. Rozjaśniłaby ją odpowiednia wzmianka o porządku leksykograficznym. Fakt skomponowania rozprawy jako zestawu prac poprzedzonego wprowadzeniem warto było wykorzystać do głębszego naświetlenia tematyki i dokładniejszego przedstawienia podstawowych faktów i definicji, tak żeby udostępnić rozprawę czytelnikom mniej zorientowanym w tematyce.

str 11, linia -7: powinno być „$= 1$”; ta pomyłka wprowadza dodatkowe zamieszanie do wcześniejszej niejasnej definicji.

str 12, linia 9-10: problem postawiony przez Dedekinda to znalezienie wzoru na liczbę d_n.

str 12, linia -7: bez dokładniejszego wyjaśnienia skąd się bierze dualność nie jest jasne, że operacje odwrócenia i zanegowania funkcji monotonicznej dają funkcje monotoniczną.

str. 14, linia -6: oznaczenie Y^X na zbiór funkcji monotonicznych jest nieco niefortunne, gdy zwykle oznacza to zbiór wszystkich funkcji.

str. 15, linia -6: tutaj A_n oznacza zbiór $\{1,2,\ldots,n\}$, w poprzednim podrozdziale oznaczało antyłańcuch n-elementowy, a poprzedzające to oznaczenie S_n przywołuje najpierw na myśl grupę alternujacą. Niezbyt trafne oznaczenie.

str 16, wzór (1.1): wzór Burnside'a jest tu oczywistym narzędziem, skoro zliczamy klasy obiektów nierównoważnych pod działaniem grupy, a sam wzór (1.1) można uznać za jedną z form wzoru Nurnside'a. Odwoływanie się do innych prac w tym miejscu sugeruje, że zastosowanie tego wzoru to jakaś oryginalna idea warta odnotowania, a tak nie jest.

str 16, linia -5: Jeśli dostępna jest praca po chińsku, to chyba dałoby się dziś użyć automatycznego tłumacza?

str 17, linia 3: zamiast „exists" ma być „for every ... exists"

str 17, linia 10: W tym miejscu nasuwa się pytanie o sposób reprezentacji „downset'ów" i możliwości usprawnienia zliczania, np. przez użycie tablic haszujących? Sposób zliczania nie jest opisany ani w tym miejscu, ani w pracy źródłowej.

str 18, linia -5; Co jest R_n? W tym miejscu powinno być wyjaśnione (tak jak w pracy źródłowej), że chodzi o zbiór reprezentantów.

Uwag do opublikowanych artykułów nie robię, bo zostały one z pewnością dopracowane w procesie przyjmowania do druku. Do czwartego nieopublikowanego artykułu nie mam uwag technicznych (wydaje się dość starannie napisany i dobrze prezentujący matematyczną bazę pracy.

Ocena.

Kierując się zaleceniami Rady Doskonałości Naukowej dokonam oceny w trzech punktach.

1) Rozprawa doktorska mgra Pawelskiego niewątpliwie prezentuje ogólną wiedzę matematyczną kandydata do stopnia doktora niezbędną do rozumienia problemów i prowadzenia badań w tej tematyce. Wskazane przeze

mnie problemy i wątpliwości dotyczą prostych pomyłek lub subiektywnych odczuć, a nie braków warsztatowych.

2) Rozprawa wykazuje umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej przez kandydata. Szczególnie przekonujący jest fakt, że większość prac w zestawie jest indywidualnego autorstwa.

3) W rozprawie zawarte są oryginalne wyniki nieznane do tej pory w literaturze przedmiotu. Dowody są poprawne i odpowiadające światowym standardom publikacji w dziedzinie matematyki.

Stosownie do tego mogę stwierdzić, że rozprawa spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim i w związku z tym wnoszę o dopuszczenie mgra Bartłomieja Pawelskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

W kwestii ewentualnego wyróżnienia rozprawy nie sądzę, żebyśmy mieli do czynienia z przypadkiem, że wyróżnia się ona zdecydowanie na tle typowych rozpraw doktorskich w dziedzinie matematyki w Polsce, i że w związku z tym powinna być wyróżniona na każdej krajowej uczelni. Nie znam natomiast kryteriów wyróżniania rozpraw doktorskich w dyscyplinie matematyka na Uniwersytecie Gdańskim. A widzę jeden powód, dla którego uchwała o wyróżnieniu rozprawy mogłaby być podjęta. Jest to fakt, że jedna z prac wchodzących w skład rozprawy opublikowana została w czasopiśmie *IEEE Transactions on Information Theory*, któremu wykaz MEiN przypisuje 200 punktów. Nie jest to codzienność w praktyce publikacji polskich naukowców, nie mówiąc o kandydatach do stopnia doktora. Więc chociaż sam mam pewne wątpliwości co do trafności ocen punktowych czasopism na liście MEiN (szczególnie gdy w grę wchodzą porównania czasopism w różnych dziedzinach nauki), to mamy do czynienie niewątpliwie z wyróżniającym się osiągnięciem autora rozprawy. Dlatego składam wniosek o rozważenie przez Radę Dyscypliny możliwości wyróżnienia tej rozprawy.

Andrzej Kisielewicz