Prof. dr hab. Jarosław Grytczuk
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska, 00-662 Warszawa
E-mail: jaroslaw.grytczuk@pw.edu.pl

Warszawa, 7.01.2025

Recenzja rozprawy doktorskiej Bartłomieja Pawelskiego

Counting and generating monotone Boolean functions

Rozprawa doktorska Bartłomieja Pawelskiego dotyczy słynnego problemu Dedekinda z roku 1897, który polega na wyznaczeniu liczby monotonicznych funkcji Boolowskich przy ustalonej liczbie zmiennych. Niech n będzie liczbą naturalną i niech B^n oznacza zbiór wszystkich ciągów binarnych (zero-jedynkowych) długości n. Monotoniczna funkcja Boolowska to dowolna funkcja $f : B^n \to \{0, 1\}$ taka, że $x \leqslant y$ pociąga $f(x) \leqslant f(y)$, dla wszystkich $x, y \in B^n$ (nierówność $x \leqslant y$ oznacza nierówność na każdej współrzędnej). Liczbę wszystkich takich funkcji oznaczamy przez d_n i nazywamy n-tą *liczbą Dedekinda*. Liczby Dedekinda posiadają wiele kombinatorycznych interpretacji (np. d_n to liczba antyłańcuchów w rodzinie podzbiorów zbioru n-elementowego). Warto także wspomnieć, że znana jest asymptotyka ciągu d_n, a nawet istnieją jawne wzory na liczby d_n (np. elegancka formuła Kisielewicza). Niestety informacje te są mało przydatne do efektywnego wyznaczania poszczególnych liczb Dedekinda. Jak dotąd znanych jest tylko dziewięć pierwszych wyrazów ciągu d_n. Największa znana liczba Dedekinda, $d_9 = 286386577668298411128469151667598498812366$, została obliczona dopiero w roku 2023. Wyzwanie w problemach tego typu polega na umiejętnym zastosowaniu teorii do opracowania skutecznego algorytmu, jego odpowiedniej implementacji, a także wiarygodnej weryfikacji wyników. Nie bez znaczenia jest też dostęp do maszyn o dużej mocy obliczeniowej.

Na rozprawę doktorską Bartłomieja Pawelskiego składają się cztery artykuły oznaczone literami A, B, C, D. Dotyczą one pewnych wariantów liczb Dedekinda, a także pewnych własności oryginalnego ciągu d_n. Poniżej omówię je skrótowo.

Artykuły A i C poświęcone są następującemu wariantowi liczb Dedekinda. Niech D_n oznacza zbiór wszystkich monotonicznych funkcji Boolowskich n zmiennych. Mamy zatem $d_n = |D_n|$. W zbiorze D_n możemy wprowadzić naturalną relację równoważności, w której dwie funkcje, $f, g \in D_n$ są równoważne jeżeli dla pewnej permutacji π zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ zachodzi $f(x) = g(\pi(x))$, dla każdego $x \in B^n$. Zbiór klas równoważności tej relacji oznaczamy przez R_n, a jego moc przez $r_n = |R_n|$. Skala trudności obliczania liczb r_n jest oczywiście podobna jak w przypadku liczb d_n. W artykułach A i C wyznaczono dwie z nich, a mianowicie $r_8 = 1392195548889993358$ i $r_9 = 789204635842035040527740846300252680$. Metody dowodowe są elementarne, acz całkiem pomysłowe. Bazują głównie na lemacie Burnside'a (o liczbie orbit grupy działającej na zbiorze) oraz odpowiednich reprezentacjach funkcji Boolowskich (w postaci liczb lub ciągów zero-jedynkowych), co pozwala na efektywne wyliczanie punktów stałych w zbiorze D_n przy działaniu permutacji na zmienne. W wyznaczeniu liczby r_9 wykorzystano uzyskaną niedawno wartość liczby d_9. Artykuł A ukazał się w czasopiśmie *Journal of Integer Sequences*, zaś artykuł C w czasopiśmie *IEEE Transactions of Information Theory*.

Praca B dotyczy oryginalnych liczb Dedekinda d_n. Autorzy dowodzą w niej kongruencji $d_9 \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 210)$. Oczywiście, wynik ten został uzyskany zanim obliczono d_9. Posłużył on wówczas do dodatkowej weryfikacji poprawności obliczeń. Metody dowodowe są elementarne, bazują na Chińskim Twierdzeniu o Resztach ($210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$) oraz na pomysłowych redukcjach wykorzystujących izomorfizmy i rozmaite zależności pomiędzy zbiorami funkcji z B^k do D^n. Prowadzi to do konstrukcji efektywnych algorytmów (w ograniczonym zakresie liczbowym) obliczających potrzebne składniki całości. Ostateczny sukces wymagał także pewnych umiejętności implementacyjnych. Praca B ukazała się w *Journal of Integer Sequences*.

W pracy D zajęto się z kolei funkcjami samodualnymi. Funkcja $f \in D_n$ jest *samodualna* jeżeli reprezentujący ją ciąg binarny nie zmienia się przy odwróceniu i dopełnieniu. Na przykład, ciąg 0011 jest samodualny ponieważ po odwróceniu daje 1100, a po dopełnieniu wraca do wyjściowej postaci 0011. Zbiór samodualnych elementów D_n oznaczamy przez Λ_n, a jego liczność przez $\lambda_n = |\Lambda_n|$. W pracy D wyliczono wartość $\lambda_9 = 423295099074735261880$ potwierdzając wynik z roku 2013 uzyskany przez innych autorów. Ponadto wyliczono liczbę $q_8 = 6001501$, gdzie q_n oznacza liczbę klas równoważności w zbiorze Λ_n. Metody dowodowe są podobne do stosowanych w poprzednich pracach z uwzględnieniem dodatkowych własności wynikających z samodualności. Praca z tymi wynikami została wysłana do publikacji.

Podsumowując stwierdzam, że rozprawa doktorska Bartłomieja Pawelskiego zawiera szereg nowych i ciekawych rezultatów dotyczących intrygującej, klasycznej tematyki. Ich uzyskanie świadczy o dobrym opanowaniu warsztatu badawczego oraz sporej intuicji i erudycji autora. Prace wchodzące w skład rozprawy są dobrze zredagowane, z odpowiednią dbałością o przedstawienie kontekstu, metod, oraz szczegółów obliczeniowych. Warto podkreślić, że większość wyników została opublikowana w trzech pracach, z których jedna ukazała się w sztandarowym, renomowanym czasopiśmie z teorii informacji. Ponadto, wszystkie liczbowe wyniki zostały odnotowane w kultowej Encyklopedii Ciągów Neila Sloane'a (OEIS). Pewien lekki niedosyt pozostawia niezbyt urozmaicony repertuar stosowanych metod. Być może w przyszłości warto byłoby sięgnąć po bardziej zaawansowane techniki, nawet kosztem nieco mniej dokładnych rezultatów.

Konkludując, uważam, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wymogi ustawowe i wnoszę o dopuszczenie Bartłomieja Pawelskiego do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia naukowego doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka.

J. Grytczuk

Jarosław Grytczuk