

Autoreferat

Anita Magdalena Dąbrowska

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki

Uniwersytet Gdański

Gdańsk

2024

Spis treści

1	Imiona i nazwisko	2
2	Posiadane dyplomy, stopnie naukowe lub artystyczne	2
3	Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych	2
4	Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.).	3
4.1	Cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych, zgodnie z art. 219 ust. 1. pkt 2b ustawy	3
4.2	Cele badawcze, wyniki i opis opartych na nich publikacji	4
4.2.1	Wstęp i motywacja badań	4
4.2.2	Podsumowanie otrzymanych wyników	7
4.2.3	Wprowadzenie	11
4.2.4	Równania filtracji i trajektorie kwantowe dla układu otwartego oddziałującego z polem w stanie jednofotonowym	19
4.2.5	Niemarkowska dynamika kubitu oddziałującego z polem jednofotonowym	32
4.2.6	Równania filtracji i trajektorie kwantowe dla układu otwartego oddziałującego z polem w stanie Focka	39
4.2.7	Równania filtracji i trajektorie kwantowe dla układu otwartego oddziałującego z polem w superpozycji stanów koherentnych	46
4.2.8	Równania filtracji i trajektorie kwantowe dla układu otwartego oddziałującego z polem w ściśniętym stanie Focka	52
4.3	Inne osiągnięcia	58
5	Pozostałe osiągnięcia po doktoracie	60
6	Aktualne badania	65
7	Bibliografia	67
8	Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej.	75
9	Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę	75
9.1	Działalność dydaktyczna	75
9.2	Promotorstwo prac magisterskich i doktorskich	78
9.3	Praca organizacyjna	79
9.4	Popularyzacja nauki	79
10	Nagrody i wyróżnienia	80

1 Imiona i nazwisko

Anita Magdalena Dąbrowska

Nazwisko panieńskie: Rezmerska

2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe lub artystyczne

- 2008 r. stopień doktora nauk fizycznych
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu (UMK)
Tytuł rozprawy: *Ewolucja stochastyczna obserwowanych układów kwantowych*
Promotor: dr hab. Przemysław Staszewski, prof. UMK
Recenzenci: prof. dr hab. Dariusz Chruściński, prof. dr hab. Karol Życzkowski
- 2000 r. tytuł magistra fizyki, specjalność: fizyka teoretyczna
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu (UMK)
Tytuł pracy: *Rola widma ciągłego w procesach przenoszenia populacji w polu silnego promieniowania laserowego*
Promotor: prof. dr hab. Jarosław Zaremba
Ocena: Bardzo dobry
- 1998 r. tytuł licencjata fizyki, specjalność: fizyka teoretyczna
Tytuł pracy: *Czas życia stanów wzbudzonych atomu ze względu na emisję spontaniczną*
Promotor: prof. dr hab. Jarosław Zaremba
Ocena: Bardzo dobry

3 Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych

- od 01.10.2019 adiunkt (grupa badawczo-dydaktyczna) w Zakładzie Metod Matematycznych Fizyki, Instytut Fizyki Teoretycznej i Astrofizyki, Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Uniwersytet Gdański,
- 20.11.2018 – 30.09.2019 starszy wykładowca w Zakładzie Modelowania Matematycznego w Naukach Biomedycznych, Katedra Podstaw Teoretycznych Nauk Biomedycznych i Informatyki Medycznej, Wydział Farmaceutyczny, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
- 01.02.2012 – 19.11.2018 adiunkt w Zakładzie Modelowania Matematycznego w Naukach Biomedycznych, Katedra Podstaw Teoretycznych Nauk Biomedycznych i Informatyki Medycznej, Wydział Farmaceutyczny, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

- 11.2004 – 31.01.2012 asystent w Zakładzie Modelowania Matematycznego w Naukach Biomedycznych, Katedra Podstaw Teoretycznych Nauk Biomedycznych i Informatyki Medycznej, Wydział Farmaceutyczny, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
- 01.10.2000 – 11.2004 asystent w Zakładzie Modelowania Matematycznego w Naukach Biomedycznych, Katedra Podstaw Teoretycznych Nauk Biomedycznych i Informatyki Medycznej, Wydział Farmaceutyczny, Akademia Medyczna im. Ludwika Rydygiera w Bydgoszczy

4 Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.).

4.1 Cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych, zgodnie z art. 219 ust. 1. pkt 2b ustawy

Tytuł osiągnięcia: *Równania filtracji oraz trajektorie kwantowe poza reżimem Markowa*

Artykuły wchodzące w skład osiągnięcia

[H1] **Anita Dąbrowska**, Gniewomir Sarbicki, and Dariusz Chruściński. Quantum trajectories for a system interacting with environment in a single photon state: counting and diffusive processes. *Physical Review A*, 96, 053819-1-053819-11, 2017.

[H2] **Anita Dąbrowska**. From a posteriori to a priori solutions for a two-level system interacting with a single-photon wavepacket. *Journal of the Optical Society of America B*, 37(4), 1240-1248, 2020.

[H3] **Anita Dąbrowska**. Photon counting probabilities of the output field for a single-photon input. *Journal of the Optical Society of America B*, 40(5), 1299-1310, 2023.

[H4] **Anita Dąbrowska**, Dariusz Chruściński, Sagnik Chakraborty, and Gniewomir Sarbicki. Eternally non-Markovian dynamics of a qubit interacting with a single-photon wavepacket. *New Journal of Physics*, 23, 123019-1-123019-18, 2021.

[H5] **Anita Dąbrowska**, Gniewomir Sarbicki, and Dariusz Chruściński. Quantum trajectories for a system interacting with environment in N -photon state. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 52(10), 105303-1-105303-21, 2019.

[H6] **Anita Dąbrowska**. Quantum trajectories for environment in superposition of coherent states. *Quantum Information Processing*, 18, 224-1-224-22, 2019.

[H7] **Anita Dąbrowska**, Marcin Marciniak. Stochastic approach to evolution of a quantum system interacting with environment in squeezed number state, *Quantum Information Processing*, 22, 385, 2023.

Artykuły [H1, H4, H5, H7] są pracami zbiorowymi. Artykuły [H2, H3, H6] to prace jednoautorskie. Opis wkładu poszczególnych autorów znajduje się w dołączonych do wniosku oświadczeniach. Opis mojego wkładu znajduje się w załączonym wykazie osiągnięć naukowych. Prace

[H1, H5, H6] powstały, gdy byłam pracownikiem Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu. Pozostałe powstały po tym jak otrzymałam zatrudnienie na Uniwersytecie Gdańskim.

4.2 Cele badawcze, wyniki i opis opartych na nich publikacji

4.2.1 Wstęp i motywacja badań

Teoria filtracji wykorzystuje narzędzia rachunku prawdopodobieństwa do estymacji procesów stochastycznych. Rozważamy w niej następujący problem. Wyobraźmy sobie pewien proces stochastyczny $\{X_t; t \in T\}$, $T = \mathbb{R}_+$, którego nie możemy mierzyć bezpośrednio. Zamiast niego mierzymy pewien inny proces $\{Y_t; t \in T\}$ powiązany z procesem wyjściowym $\{X_t; t \in T\}$. Problem filtracji polega na estymacji procesu X na podstawie pomiaru Y przy zakładanym kryterium optymalizacji. Oznacza to dokładniej, że dysponując wynikami dla $\{Y_s; s \leq t\}$ chcemy estymować X_t . Najczęstszym kryterium optymalizacji jest minimalizacja błędu średniokwadratowego [1, 2]. Z punktu widzenia fizyki, teoria filtracji jest zbiorem metod estymacji stanu układu dynamicznego na podstawie jego właściwości stochastycznych. Klasyczna teoria filtracji jest stosowana między innymi w inżynierii i matematyce finansowej.

Kwantowa teoria filtracji [3–10], sformułowana w latach osiedziątych ubiegłego wieku w ramach *kwantowego rachunku stochastycznego Itô* [11, 12], dostarcza opisu ewolucji otwartego układu kwantowego warunkowanej wynikami ciągłej w czasie obserwacji otoczenia tego układu. Rozpatrujemy w niej układ kwantowy oddziałujący z otoczeniem będącym zwykle polem bozonowym (biegnącym polem elektromagnetycznym). Sformułowano także wersję kwantowej teorii filtracji dla otoczenia fermionowego [13–15], ale nie była ona jak dotąd przedmiotem moich badań i dlatego nie będę jej omawiać. Model kwantowej filtracji wygodnie jest przedstawić odwołując się do *formalizmu pola wejściowego i wyjściowego* [16, 17], czyli pola przed i po oddziaływaniu z układem kwantowym. Pole bozonowe zaburza ewolucję swobodną układu kwantowego, ale jednocześnie pomiar pola wyjściowego dostarcza nam informacji o układzie. Ewolucję zależną od wyników pomiaru określa się jako warunkową. Z pomiarem prowadzonym w czasie możemy związać pewien proces stochastyczny. Należy zaznaczyć, że kwantowa teoria filtracji została sformułowana w ramach przybliżeń, które pozwalają opisać pomiar pola wyjściowego poprzez rodzinę operatorów, dla których istnieje wspólna miara spektralna.

Ewolucję otwartego układu kwantowego warunkowaną wynikami ciągłego w czasie pomiaru pola wyjściowego opisuje równanie różniczkowe nazywane *równaniem filtracji* lub *stochastycznym równaniem master*. Ogólna postać tego równania zależy od rodzaju pomiaru (wyboru obserwabli pola) oraz stanu pola wejściowego. Rozwiązania tego równania nazywane są *trajektoriami kwantowymi*.

W wielu przypadkach stochastyczne równanie master zachowuje czystość stanu, czyli stan czysty przekształca w stan czysty. W takiej sytuacji równanie dla operatora gęstości można zastąpić równaniem dla warunkowego wektora stanu. Ewolucja układu opisana jest wówczas przez równanie nazywane *stochastycznym równaniem Schrödingera*, które jest postawą algorytmu Monte Carlo [18, 19]. Wyznaczając średnią po wszystkich możliwych realizacjach rozważanego procesu stochastycznego, przechodzimy do ewolucji bezwarunkowej układu otwartego, opisaną przez zredukowany operator gęstości, który dla pola wejściowego w stanie gaussowskim

spełnia równanie master Goriniego-Kossakowskiego-Sudarshana-Lindblada (GKSL) [20, 21]. W tym przypadku ewolucja układu otwartego jest *ewolucją markowską* [22]. Należy zaznaczyć, że nie każde stochastyczne równanie master jest równaniem filtracji. Równań stochastycznych używa się także do rozwiązywania równania master bez kontekstu związanego z pomiarem. Metody stochastyczne mogą służyć nie tylko do rozwiązywania równania master, które w ogólnym przypadku nie zachowuje stanu czystego, ale pozwalają nam lepiej zrozumieć ewolucję układu otwartego, a także dostarczają narzędzi umożliwiających efektywne wyznaczanie własności pola wyjściowego. Są także punktem wyjścia modelu sterowania układem kwantowym [10, 23].

Pierwotnie kwantowy odpowiednik klasycznej teorii filtracji stworzono dla pól w stanach gaussowskich. W podstawowej wersji modelu przyjmuje się, że pole wejściowe znajduje się w stanie próżni. Rozwój technik wytwarzania pakietów falowych w *stanach nieklasycznych* takich jak superpozycja stanów koherentnych [24–26], stany o ustalonej liczbie fotonów, ściśnięte stany N -fotonowe [27–35], oraz rosnący obszar zastosowań takich stanów, przyniosły potrzebę stworzenia narzędzi stochastycznych pozwalających opisać oddziaływanie układu kwantowego ze światłem nieklasycznym. Zaznaczymy, że mówimy tutaj o nieklasycznych stanach pola ciągłomodowego [36–40]. Korelacje czasowe pola wejściowego sprawiają, że w tym przypadku zredukowana ewolucja układu otwartego nie jest opisana równaniem master GKSL. W pracach [41–47] można znaleźć uogólnione równania master dla otwartych układów kwantowych wzbudzanych przez pakiet falowy w stanie jednofotonowym lub N -fotonowym. W przypadku, gdy układ oddziałuje z polem w stanie N -fotonowym, ewolucja układu nie jest opisana przez jedno równanie master, ale przez układ sprzężonych równań różniczkowych. Wyprowadzenie ogólnej postaci układu sprzężonych równań master określających ewolucję zredukowaną układu kwantowego oddziałującego z polem w stanie N -fotonowym podano w [46].

Metod wyznaczania ewolucji stochastycznej dla pola wejściowego w stanach gaussowskich, nie można bezpośrednio zastosować do określenia równań stochastycznych dla pól nieklasycznych. Analizę stochastyczną dla układu otwartego oddziałującego z polem w stanie nieklasycznym można znaleźć w pracach [48–60], a także w [H1-H3, H5-H7, P2]. Pierwsza historycznie metoda wyznaczania równań filtracji dla pola w stanie nieklasycznym polega na rozszerzeniu przestrzeni Hilberta właściwego układu kwantowego o przestrzeń Hilberta układu dodatkowego (pomocniczego), który wraz z polem wejściowym w stanie klasycznym pełni rolę generatora pola bozonowego w wybranym stanie [9, 53, 61–64]. Mówimy wówczas, że układ właściwy połączony jest *kaskadowo* z układem pomocniczym [61]. Pole wejściowe dla układu pomocniczego jest polem w stanie klasycznym. Pole po oddziaływaniu z układem pomocniczym jest polem wejściowym dla układu właściwego. Zakłada się, że w chwili rozpoczęcia oddziaływania nie ma korelacji między układem właściwym i pomocniczym. W pierwszej kolejności wyznacza się stochastyczne równanie master dla układu złożonego z układów właściwego oraz pomocniczego, następnie bierze się ślad częściowy po układzie pomocniczym eliminując z opisu stopnie swobody tego układu. Korzystając z tej metody wyznaczono w pracy [48] układ sprzężonych równań stochastycznych określających ewolucję warunkową dla układu kwantowego oddziałującego ze światłem w stanie jednofotonowym. W [52] otrzymano, w podobny sposób, równania filtracji dla światła w stanie wielofotonowym. Wspomniana metoda wyznaczenia równań filtracji ma jednak pewne wady i ograniczenia. Należy zaznaczyć, że zaproponowany model generowania pola nieklasycznego po-

przez układ pomocniczy nie może być traktowany dosłownie jako przepis na przeprowadzenie eksperymentu. Jest to pewien zabieg matematyczny pozwalający wyznaczyć trajektorie kwantowe dla pól nieklasycznych. W zależności od złożoności stanu nieklasycznego, zdefiniowanie odpowiedniego układu pomocniczego może być bardzo trudne. Inną koncepcję zastosowano w pracach [49,51,55]. Tutaj przestrzeń Hilberta właściwego układu kwantowego rozszerzono o przestrzeń Hilberta układu pomocniczego w taki sposób, że dla układu kwantowego otrzymuje się zakładaną ewolucję niemarkowską, stąd nazwa metody – niemarkowskie osadzenie (ang. non-Markovian embedding). W tej metodzie układ pomocniczy oraz pole bozonowe w chwili początkowej znajdują się w stanie splątanym. W ten sposób wyznaczono równania filtracji dla pola bozonowego w stanach jednofotonowym, superpozycji stanów koherentnych oraz stanu wielofotonowego. W roku 2017 ukazała się praca [57], której autorzy wyznaczyli układ równań filtracji dla pola w stanie N -fotonowym używając metody opartej o rozkład czasowy stanu pola wejściowego. W podobny sposób otrzymano układ równań stochastycznych master dla układu oddziałującego z polem w ściśniętym stanie N -fotonowym w pracy [60].

Ewolucja układów otwartych oddziałujących z pakietem falowym w stanie nieklasycznym jest dość skomplikowana. Wyprowadzenia podane w pracach [48, 49, 51, 52, 55] odwołują się do narzędzi matematycznych, które nie są szeroko znane wśród fizyków. Zrozumienie metod zastosowanych w cytowanych pracach wymaga od czytelnika znajomości kwantowego rachunku stochastycznego Itô. Zwłaszcza prace [49, 51] mają bardzo formalny i nieintuicyjny charakter. Użycie rozwiązań opartych o układy pomocnicze utrudnia zrozumienie trajektorii kwantowych i wyznaczenie ogólnej postaci rozwiązań równań filtracji.

Moją motywacją do napisania prac [H1-H3, H6-H7] była chęć otrzymania bardziej podstawowej niż zaproponowane wcześniej metody wyznaczania stochastycznej ewolucji układu kwantowego oddziałującego z polem w stanie nieklasycznym, pokazującej strukturę splątania otoczenia z układem. Moim celem była także popularyzacja narzędzi stochastycznych, które pozwalają efektywnie wyznaczać ewolucję układów kwantowych oddziałujących z polem w stanie nieklasycznym oraz analizować własności pól wyjściowych. Motywacją do napisania pracy [H5] była chęć przedstawienia ogólnej analizy niemarkowskiego charakteru ewolucji atomu dwupoziomowego oddziałującego z polem jednofotonowym.

W pracach [H1-H3, H5-H7], składających się na osiągnięcie habilitacyjne, wyznaczono ewolucję stochastyczną otwartego układu kwantowego oddziałującego z polem w stanie nieklasycznym w oparciu o *model powtarzających się oddziaływań*, nazywany także *modelem zderzeniowym* [65–87]. O procedurze dyskretyzacji czasu prowadzącej do modelu zderzeń w optyce kwantowej, jej związku z formalizmem pola wejściowego i wyjściowego oraz przybliżeniach fizycznych modelu, można przeczytać między innymi w [71, 74, 80–82]. W modelu zderzeniowym otoczenie przybliżane jest poprzez pewien ciąg podukładów. W przypadku, gdy podukłady otoczenia są początkowo nieskorelowane, nie oddziałują ze sobą a z układem kwantowym oddziałują tylko raz, model powtarzających się oddziaływań prowadzi do markowskiej dynamiki i pozwala na otrzymanie z dowolną dokładnością ewolucji rządzonej przez równanie master GKSL [88]. Sformułowanie dyskretnego rachunku stochastycznego i opis dyskretnych trajektorii kwantowych dla pola wejściowego w stanach gaussowskich można znaleźć w [7, 66, 67, 69, 74, 84–87].

Ewolucja układu kwantowego oddziałującego z polem przygotowanym w stanie nieklasycz-

nym jest niemarkowska ze względu na korelacje czasowe pola wejściowego. Wpływ takich korelacji na ewolucję układów otwartych był analizowany z użyciem modelu zderzeń między innymi w [73, 76–79]. Niemarkowską ewolucję układu otwartego otrzymamy także, gdy założymy, że podukłady otoczenia oddziałują ze sobą lub gdy pozwolimy by oddziaływały z układem więcej niż raz, a także w przypadku, gdy w chwili początkowej układ będzie skorelowany z otoczeniem.

Poniższy referat zawiera krótkie wprowadzenie do kwantowej teorii filtracji w przypadku, gdy pole wejściowe jest w stanie próżni, przedstawienie przybliżeń oraz ogólny wstęp do modelu zderzeń w optyce kwantowej. Tych rozdziałów nie można jednak traktować jako wyczerpujących opracowań przedstawianych tematów.

4.2.2 Podsumowanie otrzymanych wyników

W pracach [H1-H4, H6-H7], składających się na osiągnięcie habilitacyjne, zaproponowano metodę wyznaczania równań filtracji i trajektorii kwantowych dla pól nieklasycznych opartą o model powtarzających się oddziaływań i pomiarów. Przedstawiony sposób wyznaczania ewolucji układu otwartego jest prostszy i bardziej intuicyjny od przedstawionych przez innych autorów. Podejście z dyskretnym czasem ułatwia zrozumienie własności stanów nieklasycznych, procesów zachodzących w czasie oddziaływania układu otwartego z polem nieklasycznym, a także tego w jaki sposób wyznaczane są trajektorie kwantowe i równania filtracji powiązane z pomiarem.

W publikacjach [H1-H3, H5-H7] ciągłą w czasie ewolucję układu kwantowego otrzymano z dynamiki generowanej przez dyskretną w czasie sekwencję (słabych) oddziaływań (zderzeń) układu kwantowego z układami tworzącymi jego otoczenie, które zdefiniowane jest jako łańcuch kubitów lub oscylatorów harmonicznym przygotowanych w stanie splątanym, będącym dyskretnym odpowiednikiem wybranego stanu ciągłomodowego pola wejściowego. Założono, że po każdej interakcji wykonywany jest pomiar na elemencie otoczenia, który oddziaływał z interesującym nas układem. Sekwencja pomiarów przeprowadzanych na elementach otoczenia prowadzi do dyskretnej w czasie ewolucji stochastycznej układu otwartego. W chwili początkowej nie ma korelacji między układem a otoczeniem.

Zasadniczym elementem każdego wyprowadzenia jest dyskusja dotycząca własności stanu pola wejściowego. Źródłem trudności z wyznaczeniem równań określających ewolucję układu otwartego jest splątanie podukładów otoczenia. W pracach [H1-H4, H6-H7] problem ewolucji warunkowej zdefiniowano na przestrzeni Hilberta obejmującej stany układu otwartego oraz pola wejściowego. Gdy śledzimy wyniki pomiarów pola wyjściowego, układ złożony z układu właściwego oraz pola wejściowego pozostaje w stanie czystym. Jednak, inaczej niż w przypadku pól gaussowskich, stan warunkowy nie jest stanem separowanym, ale stanem splątanym układu i pola wejściowego. W pracach wyznaczono ogólne formuły dla stanu *a posteriori* układu oraz pola wejściowego. Pokazano w jaki sposób stan ten można rozłożyć na sumę składników przedstawiających alternatywne równoległe realizujące się w doświadczeniu scenariusze. Zaproponowane w pracach podejście, różniące się od wcześniejszych, pozwala uprościć problem wyznaczenia ewolucji warunkowej układu otwartego. Zamiast formułować go za pomocą równań macierzonych, można użyć równań wektorowych. W pracach wyprowadzono układy sprzężonych równań dla wektorów warunkowych powiązanych z losowymi wynikami pomiarów. W przypadku, gdy otocze-

niem jest pole znajdujące się w stanie N -fotonowym otrzymujemy układ $(N + 1)^2$ sprzężonych równań dla operatorów warunkowych i tylko $N + 1$ równań dla wektorów.

Wychodząc od modelu dyskretnego otrzymano ostatecznie formuły dla ewolucji układu warunkowanej wynikami ciągłej w czasie obserwacji pola wyjściowego. W pracach rozważano dwa typy pomiaru: pomiar zliczający fotony oraz pomiar kwadratur optycznych. Model powtarzających się oddziaływań i pomiarów pozwolił w pracach [H1-H3, H5-H7] nie tylko na wyprowadzenie równań opisujących warunkową i bezwarunkową ewolucję układu, ale także na otrzymanie ogólnej struktury analitycznych rozwiązań dla powiązanych z pomiarem trajektorii kwantowych. W pracach obok formuł dla trajektorii podana została także ich interpretacja fizyczna. Wyznaczone formuły analityczne pozwalają otrzymać statystykę zliczeń fotonów pola wyjściowego a także podać analityczne rozwiązania uogólnionego równania master.

W pracach [H1-H4] rozważono oddziaływanie układu kwantowego z polem w stanie jednofotonowym. W oparciu o model zderzeń, w pracy [H1] wyznaczono układy sprzężonych równań filtracji dla pola bozonowego w stanie jednofotonowym dla dwóch typów obserwacji pola wyjściowego. W pracy rozważono obserwację liczącą, w której bezpośrednio zliczane są fotony pola wejściowego oraz obserwację kwadratury optycznej pola. Pole rezerwuaru modelowane jest przez nieskończony ciąg kubitów. Praca zawiera formuły dla trajektorii kwantowych powiązanych z detekcją fotonów pola wyjściowego. Zauważmy, że w ogólnym przypadku mamy nieskończenie wiele scenariuszy zliczeń fotonów w polu wyjściowym. W pracy podano ogólne formuły dla gęstości prawdopodobieństwa zliczenia m fotonów w polu wyjściowym w chwilach t_1, t_2, \dots, t_m takich, że $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < t$ i żadnych innych fotonów w przedziale od 0 do t oraz przepis na prawdopodobieństwo braku zliczenia do danej chwili. Praca zawiera także formuły na warunkowe wartości średnie przyrostów procesów stochastycznych dla obserwacji liczącej i dyfuzyjnej. Otrzymane wyniki można zastosować do różnych układów kwantowych, takich jak atomy, jony, wnęki rezonansowe.

Wyniki pracy [H1] posłużyły w publikacji [H2] do wyznaczenia ewolucji warunkowej i bezwarunkowej atomu dwupoziomowego oddziałującego z jednokierunkowym polem w stanie jednofotonowym. W pracy wyznaczono ogólną postać stanu *a priori* atomu dwupoziomowego, dla dowolnego stanu początkowego atomu oraz dowolnego profilu czasowego pola jednofotonowego, poprzez uśrednienie trajektorii kwantowych dla obserwacji zliczającej. Wykorzystując formuły dla trajektorii kwantowych otrzymano statystykę zliczeń fotonów w polu wyjściowym. Podano ogólną postać dodatnio określonej miary powiązanej ze zliczeniami fotonów. Otrzymano formuły dla prawdopodobieństwa detekcji ustalonej liczby fotonów do danej chwili, średniej liczby zliczeń do danej chwili, średnich czasów zliczeń fotonów, a także parameteru Mandela.

W pracy [H3] użyto modelu zdarzeń do opisanego oddziaływania układu otwartego z dwukierunkowym polem elektromagnetycznym. Założono, że w jednym kierunku pole przygotowane jest w stanie jednofotonowym, w drugim w stanie próżni. Otoczenie układu modelowane jest przez dwa ciągi kubitów. W suplemencie do pracy podano wyprowadzenie układu równań filtracji dla ciągłej obserwacji liczącej pola dwukierunkowego, czyli rozważono dwuwymiarowy proces liczący. Praca zawiera wyprowadzenie ogólnych formuł dla wektorów warunkowych powiązanych ze zliczeniami fotonów przez dwa detektory. Otrzymane wyniki pozwalają określić stan pola wyjściowego dla dowolnego układu otwartego. W pracy otrzymano formuły na prawdopodobień-

stwa zliczeń fotonów w polu wyjściowym. Stąd wyznaczono prawdopodobieństwa rozproszenia pakietu falowego, odbicia i transmisji.

Jako przykład zastosowania otrzymanych wyników opisano rozproszenie impulsu jednofotonowego na atomie dwupoziomowym. Praca zawiera formuły analityczne dla dowolnego stanu początkowego atomu i dowolnego profilu czasowego fotonu. Szczegółowo opisano w niej wyniki dla fotonu o wykładniczo malejącym profilu. Interesujący jest wpływ interferencji destruktywnej i konstruktywnej nierozróżnialnych fotonów na proces rozproszenia. W pracy pokazano, że kluczowa w procesie rozpraszania jest relacja między średnim czasem życia stanu wzbudzonego atomu i szerokością impulsu.

Praca [H4] poświęcona jest analizie niemarkowskiego charakteru ewolucji układu dwupoziomowego (kubitu) oddziałującego z polem dwukierunkowym; w jednym kierunku pole wejściowe przygotowane jest w stanie jednofotonowym, a w drugim znajduje się w stanie próżni. Zredukowana ewolucja kubitów jest wówczas reprezentowana przez hierarchiczny układ równań master. Za wszystkie niemarkowskie efekty pamięciowe dynamiki kubitów odpowiedzialne są w tym przypadku korelacje czasowe pola. W pracy podano analityczne rozwiązanie hierarchicznego układu równań dla dowolnego stanu początkowego kubitów oraz dla dowolnego profilu czasowego stanu fotonu i wykorzystano je do wykazania, że układ tych równań jest równoważny jednemu lokalnemu w czasie równaniu master. W pracy wyznaczono zależne od czasu współczynniki definiujące procesy tłumienia (chłodzenia), pompowania i odfazowania. Współczynniki te są w pełni scharakteryzowane przez profil czasowy pakietu falowego. Bezpośrednią konsekwencją tej analizy jest obserwacja, że w ogólności odwzorowanie dynamiczne rządzące ewolucją kubitów nie jest odwracalne, co implikuje występowanie osobliwości współczynników, które definiują lokalne w czasie równanie master. Wykazano, że w przypadku rezonansu, gdy generator ewolucji lokalnej w czasie jest regularny (nie wykazuje osobliwości), ewolucja kubitów nigdy nie doświadcza zjawiska „cofania się informacji”. Jednak w ogólnym przypadku, generator może być wysoce osobliwy, co prowadzi do skomplikowanych efektów niemarkowskich.

W artykule [H5] uogólniono wyniki pracy [H1] poprzez rozważenie pola wejściowego w stanie N -fotonowym. Taki stan nazywany jest także stanem Focka. W pracy wyprowadzono układ równań filtracji dla układu kwantowego oddziałującego z otoczeniem przygotowanym w ciągłomodowym stanie N -fotonowym. Rozważano tutaj jednokierunkowe pole wejściowe z fotonami o takich samych profilach czasowych. Aby określić stochastyczną ewolucję układu kwantowego warunkowaną wynikami ciągłych w czasie pomiarów pola wyjściowego użyto modelu powtarzających się oddziaływań i pomiarów z otoczeniem zdefiniowanym jako nieskończony łańcuch oscylatorów harmoniczych. Założono, że oscylatory harmoniczne otoczenia nie oddziałują ze sobą i są przygotowane w stanie splątanim, będącym dyskretnym odpowiednikiem ciągłomodowego stanu N -fotonowego. Ciągła w czasie ewolucja warunkowa układu kwantowego dla obserwacji zliczającej fotony została wyznaczona poprzez wyprowadzenie w pierwszej kolejności dyskretnych w czasie równań rekurencyjnych dla $N + 1$ wektorów warunkowych. Następnie otrzymano układ rekurencyjnych równań filtracji dla operatorów układu zależnych od wyników obserwacji, by ostatecznie przejść do ewolucji stochastycznej z czasem ciągłym.

W artykule zaprezentowano także rozwiązania układu równań stochastycznych. Wyznaczone trajektorie kwantowe wykorzystano do otrzymania analitycznych formuł określających staty-

stykę zliczeń fotonów w polu wyjściowym oraz podania rozwiązania układu sprzężonych równań master. Formuły dla trajektorii kwantowych w przypadku ciągłym są reprezentowane przez zaproponowaną w pracy technikę diagramową z bardzo przejrzystymi „zasadami Feynmana”. Ta technika znacznie upraszcza opisanie struktury rozwiązań równań filtracji, a także ułatwia podanie fizycznej interpretacji trajektorii kwantowych poprzez użycie kilku elementarnych procesów. Warto zaznaczyć, że wyniki zaprezentowane w pracy mają charakter ogólny i mogą być zastosowane do różnych układów otwartych.

W pracy [H6] wyznaczono układ równań filtracji opisujących ewolucję warunkową otwartego układu kwantowego oddziałującego z polem przygotowanym w superpozycji stanów koherentnych. Przedstawiono rozwiązania dla dwóch schematów pomiarowych pola wyjściowego: zliczania fotonów i detekcji homodynowej. Rozważono model zderzeń z otoczeniem reprezentowanym przez nieskończony łańcuch kubitów. Założono, że kubity otoczenia nie oddziałują ze sobą i są przygotowane w stanie splątanim, będącym dyskretnym odpowiednikiem superpozycji ciągłomodowych stanów koherentnych. Ze względu na nieklasyczne korelacje czasowe pola wejściowego ewolucja otwartego układu kwantowego staje się niemarkowska. Wychodząc od opisu problemu w czasie dyskretnym, uzyskano układy stochastycznych sprzężonych równań rekurencyjnych, a następnie otrzymano różniczkowe równania filtracji dla ciągłej obserwacji pola. Jako przykład zastosowania wyprowadzonych równań rozważono ewolucję warunkową pola we wnęce rezonansowej. Założono, że pole wnęki w chwili początkowej przygotowane jest w stanie koherentnym. W pracy przedstawiono formuły dla warunkowego stanu pola we wnęce, zarówno dla obserwacji liczącej jak i dyfuzyjnej.

W pracy [H7] wyznaczono układy równań filtracji i równań master dla układu kwantowego oddziałującego z biegnącym polem elektromagnetycznym w ściśniętym stanie N -fotonowym. Problem warunkowej ewolucji układu kwantowego został sformułowany tutaj przy użyciu modelu powtarzających się oddziaływań i pomiarów. Układ kwantowy podlega sekwencji interakcji z otoczeniem zdefiniowanym jako łańcuch oscylatorów harmonicznym. Założono, że otoczenie jest przygotowane w stanie splątanim, który jest dyskretnym odpowiednikiem ciągłomodowego ściśniętego stanu N -fotonowego. W pracy przedstawiono wyprowadzenie dyskretnej stochastycznej ewolucji układu, która zależy od wyników pomiarów pola wyjściowego. Stochastyczna dynamika została wyznaczona dla pomiaru liczącego. Poprzez przejście do granicy czasu ciągłego, ostatecznie otrzymano układ różniczkowych równań filtracji. Należy podkreślić, że w tym przypadku stochastyczna ewolucja układu jest opisana przez **układ nieskończenie wielu sprzężonych równań**. Praca zawiera ogólne rozwiązanie tego układu dla dowolnego układu otwartego. W pracy podano wzory analityczne dla trajektorii kwantowych oraz gęstości prawdopodobieństw zliczeń fotonów, które w pełni charakteryzują statystykę fotonów w polu wyjściowym.

Korzystając z narzędzi stochastycznych, w pracy [H7] rozwiązano problem optymalnego wzbudzenia oscylatora harmonicznego (pola we wnęce rezonansowej) przez biegnące pole w ściśniętym stanie N -fotonowym. Założono, że oscylator w chwili początkowej znajduje się w stanie próżni. W pracy podano warunek perfekcyjnego przeniesienia fotonów pola wejściowego do wnęki.

4.2.3 Wprowadzenie

Markowska i niemarkowska dynamika otwartych układów kwantowych

Teoria otwartych układów kwantowych zajmuje się opisem ewolucji układu kwantowego oddziałującego z jego otoczeniem. Oddziaływanie z otoczeniem jest powodem dekoherencji, dyssypacji energii i emisji spontanicznej. Analizując oddziaływanie z otoczeniem zakłada się zwykle, że ewolucja układu złożonego z układu kwantowego i jego otoczenia jest unitarna i w chwili początkowej układy nie są skorelowane. W tym przypadku zredukowany operator gęstości układu w chwili t określony jest poprzez

$$\varrho(t) = \Phi_t \varrho(0) := \text{Tr}_{\mathcal{E}}\{U(t)\varrho(0) \otimes \eta(0)U^\dagger(t)\}, \quad (1)$$

gdzie $U(t)$ jest operatorem unitarnym określającym ewolucję układu złożonego, $\varrho(0)$ oraz $\eta(0)$ reprezentują, odpowiednio, stan początkowy układu i jego otoczenia. Niech stan początkowy otoczenia $\eta(0)$ będzie ustalony. Dla danego $t \geq 0$ powyższe równanie definiuje odwzorowanie liniowe

$$\Phi_t : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H}), \quad (2)$$

na przestrzeni $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ stanów układu dla przestrzeni Hilberta \mathcal{H} , czyli odwzorowanie Φ_t przekształca dowolny stan początkowy układu w stan układu w chwili t

$$\varrho(0) \rightarrow \varrho(t) = \Phi_t \varrho(0). \quad (3)$$

Jednoparametrową rodzinę $\{\Phi_t; t \geq 0\}$ nazywamy kwantowym odwzorowaniem dynamicznym. Odwzorowanie dynamiczne zachowuje ślad i hermitowskość operatorów. Jest ono dodatnie, czyli dowolny operator dodatni odwzorowuje w operator dodatni. Ważną cechą odwzorowania dynamicznego jest to, że jest ono nie tylko dodatnie, ale jest także kompletnie dodatnie. Zachodząca dla dowolnych $t, s \geq 0$ własność

$$\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s} \quad (4)$$

określa strukturę półgrupy. Odwzorowanie dynamiczne mające własność półgrupy posiada generator \mathcal{L} taki, że

$$\Phi_t = \exp[\mathcal{L}t]. \quad (5)$$

W tym przypadku dla zredukowanego operatora gęstości układu otwartego otrzymujemy równanie

$$\dot{\varrho}(t) = \mathcal{L}\varrho(t). \quad (6)$$

Jak pokazano w [20, 21], najbardziej ogólna postać generatora półgrupy dynamicznej ma postać

$$\mathcal{L}\varrho = -i[H_S, \varrho] + \sum_k \gamma_k \left(R_k \varrho R_k^\dagger - \frac{1}{2} R_k^\dagger R_k \varrho - \frac{1}{2} \varrho R_k^\dagger R_k \right), \quad (7)$$

gdzie H_S jest operatorem samosprzężonym reprezentującym Hamiltonian układu kwantowego, R_k są operatorami układu, nazywanymi często operatorami Lindblada, $\gamma_k \geq 0, \forall k$. Równanie (6) z generatorem (7) nosi nazwę równania master Goriniego-Kossakowskiego-Sudarshana-Lindblada

(GKSL). Otrzymanie równania postaci (6) dla ewolucji zredukowanej układu wymaga wprowadzenia szeregu przybliżeń [8]. Jedno z najważniejszych z nich jest nazywane przybliżeniem Markowa. Gdy odwzorowanie dynamiczne jest różniczkowalne, wówczas stan zredukowany $\varrho(t)$ spełnia lokalne w czasie równanie

$$\dot{\varrho}(t) = \mathcal{L}_t \varrho(t) \quad (8)$$

z zależnym od czasu generatorem \mathcal{L}_t . Gdy $\{\Phi_t, t \geq 0\}$ jest odwracalne, wówczas $\mathcal{L}_t = \dot{\Phi}_t \circ \Phi_t^{-1}$. W przypadku, gdy odwzorowanie jest nieodwracalne w chwili $t = \tau$, wówczas Φ_t w chwili τ jest osobliwe. Dowolny lokalny w czasie generator \mathcal{L}_t ma strukturę (7), ale zarówno hamiltonian efektywny H_S , operatory R_k , jak i γ_k mogą zależeć od czasu. Generator \mathcal{L}_t wyznacza odwzorowanie dynamiczne

$$\Phi_t = \overleftarrow{T} \exp \left[\int_0^t \mathcal{L}_s ds \right], \quad (9)$$

gdzie \overleftarrow{T} oznacza operator porządku czasowego. Warto tutaj podkreślić, że w przypadku, gdy \mathcal{L}_t jest zależny od czasu, współczynniki γ_k nie muszą być nieujemne.

Odwzorowanie dynamiczne $\{\Phi_t; t \geq 0\}$ nazywamy podzielnym, jeśli dla dowolnego $t \geq s$ zachodzi

$$\Phi_t = V_{t,s} \circ \Phi_s, \quad (10)$$

gdzie $V_{t,s}$ jest kompletnie dodatnim propagatorem. Jeśli Φ_t jest odwracalne, wówczas

$$V_{t,s} = \Phi_t \circ \Phi_s^{-1}, \quad (11)$$

Zatem dowolne odwracalne odwzorowanie jest podzielne. Odwzorowanie $\{\Phi_t; t \geq 0\}$ nazywane jest P -podzielnym, jeśli $V_{t,s}$ jest dodatni i zachowuje ślad operatorów. Jeśli $V_{t,s}$ jest kompletnie dodatni i zachowuje ślad, nazywany jest CP-podzielny. Zgodnie z [89], ewolucję układu będziemy nazywać markowską, gdy $\{\Phi_t; t \geq 0\}$ jest CP-podzielne. Odwracalne odwzorowania są CP-podzielne wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie współczynniki γ_k są nieujemne. Wystąpienie ujemnych wartości tych współczynników traktowane jest wskaźnik ewolucji niemarkowskiej. Jeżeli ewolucja jest markowska, wówczas dla dowolnej pary stanów początkowych ρ_1 oraz ρ_2 zachodzi [90]

$$\frac{d}{dt} \|\Phi_t(\rho_1 - \rho_2)\|_1 \leq 0, \quad (12)$$

gdzie $\|X\|_1 = \text{Tr}|X|$ oznacza normę śladową z X . Zauważmy, że wielkość $\|\rho_1 - \rho_2\|_1$ opisuje rozróżnialność ρ_1 oraz ρ_2 . Powyższy warunek nosi nazwę warunku BLP, od nazwisk autorów pracy [90]: Breuera, Laine'a i Piila. W literaturze spotkać można różne koncepcje wskaźników niemarkowości ewolucji układów kwantowych. Dla dowolnej ewolucji markowskiej [91, 92]

$$\frac{d}{dt} |\det \Lambda_t| \leq 0. \quad (13)$$

Wielkość $\text{Vol}(t) = |\det \Lambda_t| \text{Vol}(0)$ określa objętość dostępnych stanów w chwili t , stąd (13) oznacza warunek monotonicznego spadku $\text{Vol}(t)$. Każde P -podzielne (a więc także CP-podzielne) odwzorowanie dynamiczne spełnia (13).

Kwantowy rachunek stochastyczny Itô i kwantowa teoria filtracji

Rozdział zawiera przypomnienie podstawowych reguł kwantowego rachunku stochastycznego sformułowanego przez Hudsona i Parthasarathiego [11, 12]. Niech \mathcal{F} będzie symetryczną przestrzenią Focka określoną nad przestrzenią Hilberta $\mathcal{K} = \mathbb{C}^n \otimes L^2(\mathbb{R}_+)$ wszystkich całkowalnych z kwadratem funkcji z \mathbb{R}_+ w \mathbb{C}^n . Dla dowolnego $f \in \mathcal{K}$ możemy zdefiniować wektor koherentny

$$e(f) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|f\|_{\mathcal{K}}^2\right) \left(1, f, (2!)^{-1/2}f \otimes f, (3!)^{-1/2}f \otimes f \otimes f, \dots\right). \quad (14)$$

W szczególności, $e(0) = (1, 0, 0, \dots) \in \mathcal{F}$ jest wektorem próżni. Na powłoce liniowej zbioru wektorów koherentnych w \mathcal{F} definiujemy procesy anihilacji, kreacji oraz liczby cząstek: $B_j(t)$, $B_j^\dagger(t)$ and $\Lambda_{ij}(t)$ następująco [11, 12]:

$$B_j(t)e(f) = \int_0^t f_j(s)ds e(f), \quad (15)$$

$$B_j^\dagger(t)e(f) = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon_j} e(f + \epsilon \chi_{[0,t]}) \right|_{\epsilon=0}, \quad (16)$$

$$\Lambda_{ij}(t)e(f) = \left. -i \frac{d}{d\lambda} e(\exp(i\lambda P_{ij} \chi_{[0,t]}) f) \right|_{\lambda=0}, \quad (17)$$

gdzie $\chi_{[0,t]}$ jest funkcją charakterystyczną zbioru $[0, t)$, $\epsilon \equiv (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ oraz $(P_{ij}f)_k = \delta_{ik}f_j$. Operatory $B_j(t)$, $B_j^\dagger(t)$, $\Lambda_{ij}(t)$ spełniają relacje komutacji postaci

$$[B_i(t), B_j(t')] = [B_i^\dagger(t), B_j^\dagger(t')] = 0, \quad [B_i(t), B_j^\dagger(t')] = \delta_{ij} t \wedge t', \quad (18)$$

$$[\Lambda_{ij}(t), \Lambda_{kl}(t')] = \delta_{jk} \Lambda_{il}(t \wedge t') - \delta_{il} \Lambda_{kj}(t \wedge t'), \quad (19)$$

$$[B_j(t), \Lambda_{kl}(t')] = \delta_{jk} B_l(t \wedge t'), \quad [\Lambda_{kl}(t), B_j^\dagger(t')] = \delta_{lj} B_k^\dagger(t \wedge t'), \quad (20)$$

gdzie $t \wedge t' = \min(t, t')$. Operatory $B_j(t)$, $B_j^\dagger(t)$, $\Lambda_{ij}(t)$ można zapisać w postaci

$$B_j(t) = \int_0^t b_j(s)ds, \quad B_j^\dagger(t) = \int_0^t b_j^\dagger(s)ds, \quad \Lambda_{ij}(t) = \int_0^t b_i^\dagger(s)b_j(s)ds, \quad (21)$$

gdzie $b_j(t)$, $b_j^\dagger(t)$ są operatorami spełniającymi kanoniczne relacje komutacji postaci

$$[b_j(t), b_i(t')] = [b_j^\dagger(t), b_i^\dagger(t')] = 0, \quad [b_j(t), b_i^\dagger(t')] = \delta_{ji} \delta(t - t'). \quad (22)$$

Przestrzeń Focka \mathcal{F} ma strukturę ciągłego iloczynu tensorowego tzn.

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_{[t,\infty)}, \quad (23)$$

gdzie $\mathcal{F}_{[0,t]}$ oraz $\mathcal{F}_{[t,\infty)}$ są przestrzeniami symetrycznymi Focka nad przestrzeniami, odpowiednio $\mathbb{C}^n \otimes L^2([0, t])$ i $\mathbb{C}^n \otimes L^2([t, \infty))$. Niech \mathcal{H} będzie przestrzenią Hilberta związaną z pewnym układem kwantowym. Rodzina operatorów $\{M(t), t \geq 0\}$ określona na przestrzeni $\mathcal{H} \otimes \mathcal{F}$ definiuje kwantowy procesem adaptowany (nieantycypujący), gdy $M(t)$ działa w $\mathcal{F}_{[t,\infty)}$ jak operator jednostkowy i może działać nietrywialnie w $\mathcal{H} \otimes \mathcal{F}_{[0,t]}$. Hudson i Parthasarathy zdefiniowali kwantowe równanie różniczkowe typu [11, 12]

$$dM(t) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n F_{ji}(t) d\Lambda_{ji}(t) + E_j(t) dA_j(t) + D_j(t) dA_j^\dagger(t) \right) + C(t)dt, \quad (24)$$

gdzie $M(t)$, $F_{ji}(t)$, $E_j(t)$, $D_j(t)$, $C(t)$ są procesami adoptowanymi na $\mathcal{H} \otimes \mathcal{F}$. Przyrosty $dB_j(t) = B_j(t+dt) - B_j(t)$, $dB_j^\dagger(t) = B_j^\dagger(t+dt) - B_j^\dagger(t)$, $d\Lambda_{ij}(t) = \Lambda_{ij}(t+dt) - \Lambda_{ij}(t)$ komutują z dowolnym procesem adoptowanym $N(t)$ w $\mathcal{H} \otimes \mathcal{F}$. Niech $M'(t)$ będzie procesem spełniającym kwantowe równanie stochastyczne typu Itô (24), wówczas $d(M(t)M'(t))$ dane jest przepisem [11, 12]

$$d(M(t)M'(t)) = dM(t)M'(t) + M(t)dM'(t) + dM(t)dM'(t), \quad (25)$$

gdzie $dM(t)dM'(t)$ obliczamy za pomocą tablicy mnożenia Itô:

$$\begin{aligned} dB_i(t)dB_j^\dagger(t) &= \delta_{ij}dt, & dB_i(t)d\Lambda_{kj}(t) &= \delta_{ik}dB_j(t), \\ d\Lambda_{kj}(t)dB_i^\dagger(t) &= \delta_{ji}dB_k^\dagger(t), & d\Lambda_{ij}(t)d\Lambda_{kl}(t) &= \delta_{jk}d\Lambda_{il}(t) \end{aligned} \quad (26)$$

i wszystkie inne iloczyny są równe zeru. Od tego miejsca ograniczymy nasze rozważania do jednokierunkowego pola bozonowego, czyli przyjmiemy, że $\mathcal{K} = \mathbb{C} \otimes L^2(\mathbb{R}_+)$.

Zakładamy, że pole bozonowe oddziałuje z pewnym układem kwantowym. Będziemy go nazywać układem \mathcal{S} . Niech $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ będzie przestrzenią Hilberta układu \mathcal{S} i $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$ jest przestrzenią ograniczonych operatorów liniowych na $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$. Aby uprościć zapis, zazwyczaj nie będziemy przedstawiać mnożenia tensorowego przez operatory jednostkowe. Przyjmujemy, że ewolucja układu złożonego składającego się z układu \mathcal{S} oraz pola bozonowego opisana jest poprzez operator unitarny $U(t)$, który spełnia kwantowe stochastyczne równanie różniczkowe typu Itô postaci [11, 12, 17]

$$\begin{aligned} dU(t) &= \left[LdB^\dagger(t) - L^\dagger SdB(t) + (S - I)d\Lambda(t) - \left(iH_{\mathcal{S}} + \frac{1}{2}L^\dagger L \right) dt \right] U(t), \\ U(0) &= I, \end{aligned} \quad (27)$$

gdzie operatory L , S należą do $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$, $H_{\mathcal{S}}$ jest Hamiltonianem układu \mathcal{S} , S jest unitarnym operatorem opisującym proces bezpośredniego rozpraszania światła przez układ \mathcal{S} . Z fizycznego punktu widzenia, (27) jest równaniem dla operatora ewolucji układu złożonego zapisanym w obrazie interakcji eliminującym ewolucję swobodną pola. Operator unitarny $U(t)$ działa nietrywialnie w $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{F}_{[0,t]}$ i komutuje z przyrostami $dB(t)$, $dB^\dagger(t)$, $d\Lambda(t)$. Zgodnie z interpretacją podaną przez Gardinera i Colleta [16] operatory $B(t)$, $B^\dagger(t)$ oraz $\Lambda(t)$ opisują pole wejściowe, czyli pole przed oddziaływaniem z układem \mathcal{S} .

Dowolny operator ograniczony X układu \mathcal{S} zapisany w obrazie Heisenberga,

$$j_t(X) = U^\dagger(t)(X \otimes \mathbb{1})U(t) \quad (28)$$

jest procesem adaptowanym, co oznacza, że działa jak operator jednostkowy w przestrzeni $\mathcal{F}_{[t,+\infty)}$. Aby wyznaczyć równanie różniczkowe dla $j_t(X)$ stosujemy reguły kwantowego rachunku stochastycznego Itô. W ten sposób otrzymujemy równanie

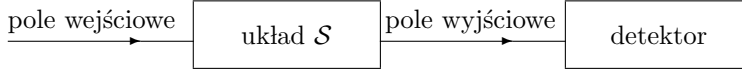
$$dj_t(X) = j_t(\mathcal{L}^*X)dt + j_t\left(S^\dagger[X, L]\right)dB_t^\dagger + j_t\left([L^\dagger, X]S\right)dB_t + j_t(S^\dagger XS - X)d\Lambda_t, \quad (29)$$

gdzie

$$\mathcal{L}^*X = i[H_{\mathcal{S}}, X] + L^\dagger XL - \frac{1}{2}L^\dagger LX - \frac{1}{2}XL^\dagger L. \quad (30)$$

Zakładamy, że w chwili początkowej stan układu złożonego jest stanem produktowym

$$\rho(0) \otimes \rho_{field}. \quad (31)$$



Rysunek 1: Schemat pomiarowy dla zliczeń fotonów pola wyjściowego

gdzie $\rho(0)$ oznacza stan początkowy układu \mathcal{S} i ρ_{field} jest stanem pola wejściowego. Zredukowany operator gęstości dla układu \mathcal{S} zdefiniowany jest poprzez ślad częściowy jako

$$\varrho(t) = \text{Tr}_{\mathcal{F}} \left(U(t)\rho(0) \otimes \rho_{field}U^\dagger(t) \right). \quad (32)$$

Można pokazać, że gdy wejściowe pole bozonowe znajduje się w stanie próżni, wówczas $\rho(t)$ spełnia równanie różniczkowe postaci

$$\dot{\varrho}(t) = \mathcal{L}\varrho(t), \quad (33)$$

gdzie

$$\mathcal{L}\varrho = -i[H_{\mathcal{S}}, \varrho] + L\varrho L^\dagger - \frac{1}{2}L^\dagger L\varrho - \frac{1}{2}\varrho L^\dagger L. \quad (34)$$

Nazywane polem wyjściowym, pole bozonowe po oddziaływaniu z układem \mathcal{S} opisane jest przez operatory

$$B^{out}(t) = U^\dagger(t)B(t)U(t), \quad B^{out\dagger}(t) = U^\dagger(t)B^\dagger(t)U(t), \quad \Lambda^{out}(t) = U^\dagger(t)\Lambda(t)U(t). \quad (35)$$

Korzystając z metod kwantowego rachunku stochastycznego można pokazać, że

$$dB^{out}(t) = j_t(S)dB(t) + j_t(L)dt, \quad dB^{out\dagger}(t) = j_t(S^\dagger)dB^\dagger(t) + j_t(L^\dagger)dt, \quad (36)$$

$$d\Lambda^{out}(t) = d\Lambda(t) + j_t(L^\dagger S)dB(t) + j_t(S^\dagger L)dB^\dagger(t) + j_t(L^\dagger L)dt. \quad (37)$$

W kwantowej teorii filtracji rozważamy ciągle w czasie pomiar pola wyjściowego. Zauważmy, że pole wyjściowe niesie informację o układzie \mathcal{S} i z tego powodu pole bozonowe pełni rolę narzędzia pomiarowego. W podstawowej wersji teorii zakłada się, że do pomiaru używamy detektorów działających w sposób natychmiastowy o 100% efektywności. Dwa najczęściej rozważane w literaturze schematy pomiarowe to pomiar obserwabli $\Lambda^{out}(t)$, w którym fotony pola wyjściowego zliczane są bezpośrednio, oraz pomiar kwadratury optycznej

$$Y(t) = B^{out}(t) + dB^{out\dagger}(t). \quad (38)$$

Pomiar operatora liczby cząstek zilustrowano na Rysunku 1. Schemat detekcji heterodynowej przedstawiono na Rysunku 2. W tym drugim przypadku pole wyjściowe trafia na płytkę światłodzielną, a na drugim wejściu płytki mamy silne pole w stanie koherentnym [17, 93, 94].

Proces $\{\Lambda^{out}(t), t \geq 0\}$ nazywany jest samonieniszczącym, co oznacza to, że operatory tej rodziny komutują ze sobą [3, 4]:

$$[\Lambda^{out}(t), \Lambda^{out}(t')] = 0, \quad \forall t, t' \geq 0, \quad (39)$$

a zatem istnieje dla nich wspólna miara spektralna. Proces $\{Y(t), t \geq 0\}$ także jest procesem samonieniszczącym. Pomiary tych obserwabli nazywamy nieniszczącymi z tego powodu, że dla dowolnego operatora X układu \mathcal{S} spełnione są relacje komutacji [3, 4]

$$[\Lambda^{out}(t'), U^\dagger(t)(X \otimes \mathbb{1})U(t)] = 0, \quad [Y(t'), U^\dagger(t)(X \otimes \mathbb{1})U(t)] = 0, \quad 0 \leq t' \leq t. \quad (40)$$

Zgodnie z (40), pomiar danego procesu wyjściowego nie zakłóca ani obecnego, ani przyszłego stanu układu \mathcal{S} .

Kwantowa teoria filtracji opisuje estymację stanu układu \mathcal{S} na podstawie obserwacji procesów wyjściowych. Poniżej przedstawię równania filtracji dla dwóch typów obserwacji. Podane równania odpowiadają sytuacji, gdy $S = \mathbb{1}$ i wejściowe pole bozonowe znajduje się w stanie próżni. W przypadku pomiaru procesu $\Lambda^{out}(t)$, otrzymujemy równanie filtracji postaci

$$d\rho(t) = \mathcal{L}\rho(t) + \left(\frac{L\rho(t)L^\dagger}{\text{Tr}\{L^\dagger L\rho(t)\}} - \rho(t) \right) dN(t), \quad (41)$$

gdzie \mathcal{L} jest superoperatorem określonym przez formułę (34), $N(t)$ jest procesem liczącym z przyrostem

$$dN(t) = d\Lambda^{out}(t) - \text{Tr}\{L^\dagger L\rho(t)\}dt. \quad (42)$$

Wartość oczekiwana przyrostu $d\Lambda^{out}(t)$ warunkowana wynikami obserwacji do chwili t dana jest formułą

$$\mathbb{E}[d\Lambda^{out}(t)|\rho(t)] = \text{Tr}\{L^\dagger L\rho(t)\}dt. \quad (43)$$

Dla pomiaru kwadratury optycznej otrzymujemy stochastyczne równanie różniczkowe

$$d\rho(t) = \mathcal{L}\rho(t) + \left(L\rho(t) + \rho(t)L^\dagger - \rho(t)\text{Tr}\{(L + L^\dagger)\rho(t)\} \right) dW(t), \quad (44)$$

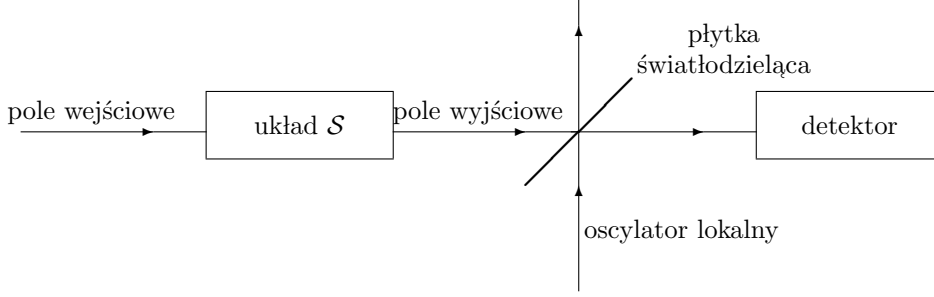
gdzie $W(t)$ jest procesem Wienera powiązany z $Y(t)$ relacją

$$dW(t) = dY(t) - \text{Tr}\{(L + L^\dagger)\rho(t)\}dt. \quad (45)$$

Warunkowa wartość średnia dla przyrostu $dY(t)$ wynosi

$$\mathbb{E}[dY(t)|\rho(t)] = \text{Tr}\{(L + L^\dagger)\rho(t)\}dt. \quad (46)$$

Stan $\rho(t)$ zależy od wyników pomiarów danego procesu do chwili t i nazywany jest stanem *a posteriori*. Rozwiązania równań filtracji nazywane są także trajektoriami kwantowymi. Uśrednienie operatora $\rho(t)$ po wszystkich możliwych realizacjach rozważanego procesu stochastycznego do chwili t daje stan *a priori*, który spełnia równanie master (33).



Rysunek 2: Schemat detekcji kwadratury optycznej pola

Przybliżenia

Rozważamy układ kwantowy \mathcal{S} , który oddziałuje z biegnącym polem elektromagnetycznym. Ograniczymy się tutaj do jednowymiarowego przypadku. W tym opracowaniu przyjęłam $\hbar = 1$. Układu \mathcal{S} nie będziemy tutaj specyfikować. Hamiltonian układu złożonego z układu \mathcal{S} oraz jego otoczenia można zapisać jako

$$H = H_S + H_{\mathcal{E}} + H_{int}, \quad (47)$$

gdzie H_S jest hamiltonianem układu \mathcal{S} , $H_{\mathcal{E}}$ jest hamiltonianem pola, H_{int} reprezentuje hamiltonian oddziaływania między układami. Hamiltonian generujący ewolucję swobodą pola ma postać

$$H_{\mathcal{E}} = \int_0^{+\infty} \omega b^\dagger(\omega) b(\omega) d\omega, \quad (48)$$

gdzie $b(\omega)$ oraz $b^\dagger(\omega)$ to odpowiednio operatory anihilacji i kreacji pola zapisane w dziedzinie częstotliwości. Operatory pola spełniają kanoniczne relacje komutacji

$$[b(\omega), b(\omega')] = [b^\dagger(\omega), b^\dagger(\omega')] = 0, \quad [b(\omega), b^\dagger(\omega')] = \delta(\omega - \omega'). \quad (49)$$

Zakładamy, że hamiltonian oddziaływania ma postać liniową

$$H_{int} = i \int_0^{+\infty} \kappa(\omega) [b^\dagger(\omega) + b(\omega)] [R - R^\dagger] d\omega, \quad (50)$$

gdzie R jest operatorem układu \mathcal{S} , a $\kappa(\omega)$ jest funkcją rzeczywistą charakteryzującą sprzężenie układów. Stosując przybliżenie wirującej fali (ang. *rotating wave approximation* – RWA) i przechodząc do obrazu oddziaływania eliminującego swobodną ewolucję pola otrzymujemy

$$\tilde{H}_{int}(t) = i \int_0^{+\infty} \kappa(\omega) [Rb^\dagger(\omega)e^{i\omega t} - R^\dagger b(\omega)e^{-i\omega t}] d\omega. \quad (51)$$

Zakładamy, że mamy do czynienia z polem wąskopasmowym, czyli rozrzut częstotliwości $\Delta\omega$ (szerokość pasma) jest niewielki w porównaniu z częstotliwością centralną ω_c pola. Takie pole nazywane jest *kwazimonochromatycznym*. Zakładamy, że częstotliwość centralna położona jest blisko częstotliwości charakterystycznej ω_0 układu \mathcal{S} . Wprowadzamy przybliżenie płaskiego kontinuum, które polega na zastąpieniu $\kappa(\omega)$ poprzez stałą. Ostatnie przybliżenie polega na przesunięciu dolnej granicy całkowania do nieskończoności. W ten sposób otrzymujemy oddziaływanie

$$\tilde{H}_{int}(t) = i\sqrt{\Gamma} [Rb^\dagger(t) - R^\dagger b(t)], \quad (52)$$

gdzie

$$b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} b(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (53)$$

Operatory $b(t)$ oraz $b^\dagger(t)$ nazywane są operatorami białego szumu ze względu na to, że spełniają osobliwe relacje komutacji

$$[b(t), b^\dagger(t')] = \delta(t - t'). \quad (54)$$

Stąd operator ewolucji ma postać

$$U(t) = \overleftarrow{T} \exp \left[\int_0^t \left(-iH_S + \sqrt{\Gamma} \left(Rb^\dagger(s) - R^\dagger b(s) \right) \right) ds \right], \quad (55)$$

gdzie \overleftarrow{T} oznacza operator porządku czasowego.

Modele zderzeniowe w optyce kwantowej

Ewolucję układu otwartego w wygodny i intuicyjny sposób można badać posługując się modelami zderzeniowymi [82,88]. W tym przypadku rozważamy pewien układ \mathcal{S} oddziałujący z otoczeniem \mathcal{E} modelowanym poprzez ciąg identycznych układów kwantowych. Załóżmy, że w chwili początkowej nie ma korelacji między układem \mathcal{S} i jego otoczeniem. Stan początkowy układu złożonego \mathcal{S} i \mathcal{E} zapiszmy jako

$$\rho(0) \otimes \eta(0), \quad (56)$$

gdzie $\rho(0)$ jest stanem początkowym układu \mathcal{S} i $\eta(0)$ opisuje stan początkowy otoczenia. W podstawowej wersji modelu zderzeń zakładamy, że układy kwantowe tworzące otoczenie nie oddziałują ze sobą. Dynamikę układu złożonego wyobrażamy sobie jako serię zderzeń (kolizji), w których układ \mathcal{S} oddziałuje kolejno z układami otoczenia w taki sposób, że z każdym podukładem oddziałuje tylko raz. Przyjmijmy także, że każda kolizja (każde oddziaływanie) ma taką samą długość trwania, którą będziemy oznaczać przez τ . Oddziaływanie w przedziale czasu od $k\tau$ do chwili $(k+1)\tau$ opisane jest operatorem unitarnym V_k . Stan układu złożonego po n oddziaływaniach dany jest jako

$$\sigma_n = V_{n-1} \dots V_0 (\rho(0) \otimes \eta(0)) (V_{n-1} \dots V_0)^\dagger. \quad (57)$$

Eliminując stopnie swobody związane z otoczeniem, czyli biorąc ślad częściowy po otoczeniu, otrzymujemy stan układu \mathcal{S} ,

$$\varrho_n = \text{Tr}_{\mathcal{E}}(\sigma_n). \quad (58)$$

Gdy $\eta(0)$ jest stanem produktowym i wszystkie podukłady otoczenia przygotowane są w takim samym stanie η , czyli $\eta(0) = \eta^{\otimes n}$, wówczas

$$\varrho_n = \Phi_n(\rho(0)) = \text{Tr}_{\mathcal{E}_n} [V_{n-1} (\varrho_{n-1} \otimes \eta) V_{n-1}^\dagger], \quad (59)$$

przez \mathcal{E}_n oznaczono n -ty element otoczenia. W tym przypadku kolejne układy, które oddziałują z układem \mathcal{S} nie są z nim skorelowane. Oczywiście, układ \mathcal{S} jest skorelowany z wszystkimi układami otoczenia, z którymi oddziaływał w przeszłości. Łatwo sprawdzić, że dla dyskretnego odwzorowania kwantowego Φ_n , zdefiniowanego przez (59), spełniona jest własność półgrupy

$$\Phi_n = \Phi_{n-m} \circ \Phi_m \quad (60)$$

dla dowolnej liczby całkowitej $0 \leq m \leq n$.

Aby przejść od modelu opisanego w poprzednim podrozdziale do modelu zderzeń podzielmy całkowity czas oddziaływania układów T na równe przedziały, każdy o długości τ , w taki sposób, że $T = N\tau$. Operator ewolucji układu złożonego w przedziale od $k\tau$ do $(k+1)\tau$, określony jako

$$\overleftarrow{T} \exp \left[\int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \left(-iH_S + \sqrt{\Gamma} \left(Rb^\dagger(s) - R^\dagger b(s) \right) \right) ds \right], \quad (61)$$

przybliżymy poprzez

$$\exp \left[\int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \left(-iH_S + \sqrt{\Gamma} \left(Rb^\dagger(s) - R^\dagger b(s) \right) \right) ds \right]. \quad (62)$$

Można pokazać, że różnica między (61) i (62) jest rzędu $O(\tau^{3/2})$. Gdy $\tau \rightarrow 0$ ta różnica zmierza do zera i z dyskretnego opisu przechodzimy do opisu ewolucji ciągłej w czasie. Całkę po operatorze opisującym oddziaływanie można zapisać w postaci

$$\int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \sqrt{\Gamma} \left(Rb^\dagger(s) - R^\dagger b(s) \right) ds = \sqrt{\Gamma} \left(Rb_k^\dagger - R^\dagger b_k \right) \sqrt{\tau} \quad (63)$$

wprowadzając operatory pola zdefiniowane przez

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} b(s) ds. \quad (64)$$

Zgodnie z (54), operatory spełniają relacje komutacji

$$[b_n, b_m] = [b_n^\dagger, b_m^\dagger] = 0, \quad [b_n, b_m^\dagger] = \delta_{nm}. \quad (65)$$

Oddziaływanie w przedziale od $k\tau$ do $(k+1)\tau$ opisane jest przez operator

$$\sqrt{\frac{\Gamma}{\tau}} \left(Rb_k^\dagger - R^\dagger b_k \right). \quad (66)$$

4.2.4 Równania filtracji i trajektorie kwantowe dla układu otwartego oddziałującego z polem w stanie jednofotonowym

Przegląd publikacji [H1-H7] zacznę od przedstawienia wyników dla pola bozonowego w stanie jednofotonowym. W pracy [H1] jednokierunkowe pole fotonowe jest modelowane poprzez nieskończony łańcuch nieoddziałujących ze sobą kubitów. Sformułowanie dyskretnego kwantowego rachunku stochastycznego dla pola modelowanego przez ciąg układów dwupoziomowych można znaleźć w [65, 66, 86, 87]. Posługując się tym dyskretnym przybliżeniem przestrzeni Focka można nie tylko do wyznaczyć ewolucję stochastyczną dla pola w stanie próżni [67, 69, 84–87], ale także w stanach koherentnym, ściśniętym i termicznym [74]. W publikacji [H1] kubitowy łańcuch przygotowany jest w stanie spletanym będącym dyskretnym odpowiednikiem ciągłomodowego stanu jednofotonowego [37, 39]. Kubity otoczenia oddziałują kolejno z układem kwantowym \mathcal{S} . Każdy z kubitów oddziałuje z układem \mathcal{S} tylko raz. Przyjęto, że stan początkowy układu złożonego jest stanem produktowym. Innymi słowy, w chwili początkowej nie ma korelacji między układem

kwantowym i polem. Pomiar, wykonywany na kolejnych kubitach otoczenia tuż po ich oddziaływaniu z układem \mathcal{S} , daje początek warunkowej ewolucji układu. Splątanie kubitów oznacza obecność nieklasycznych korelacji czasowych pola wyjściowego i jest powodem niemarkowskiego charakteru ewolucji układu otwartego. Wychodząc od modelu dyskretnego w czasie otrzymano, w granicy, gdy czas oddziaływania poszczególnych kubitów z układem \mathcal{S} zmierza do zera, model ciągłego pomiaru oraz ciągłej w czasie ewolucji układu \mathcal{S} . Równania filtracji otrzymano dla dwóch typów pomiaru pola wyjściowego: fotodetekcji oraz pomiaru heterodynowego. W pracy wyznaczono także wzory na trajektorie kwantowe dla procesu liczącego oraz prawdopodobieństwa zliczeń fotonów określające w pełni statystykę fotonów pola wyjściowego. Oprócz formuł, przedstawiono także interpretację fizyczną trajektorii kwantowych. Wyprowadzone w pracy równania stochastyczne są zgodne z wynikami otrzymanymi [43, 48, 57] i [P2].

W pracy [H1] rozważono układ kwantowy \mathcal{S} o przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, oddziałujący z otoczeniem \mathcal{E} składającym się z nieskończonego łańcucha układów dwupoziomowych (kubitów). Założono, że kubity otoczenia oddziałują kolejno, jeden po drugim, z układem \mathcal{S} , każdy w przedziale czasu o długości τ . Przestrzeń Hilberta otoczenia ma postać

$$\mathcal{H}_{\mathcal{E}} = \bigotimes_{k=0}^{+\infty} \mathcal{H}_{\mathcal{E},k}, \quad (67)$$

gdzie $\mathcal{H}_{\mathcal{E},k} = \mathbb{C}^2$ odpowiada przestrzeni Hilberta kubitów oddziałującego z \mathcal{S} w przedziale czasu $[k\tau, (k+1)\tau)$. Zauważmy, że przestrzeń $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ może być zapisana w postaci iloczynu tensorowego

$$\mathcal{H}_{\mathcal{E}} = \mathcal{H}_{\mathcal{E}}^{j-1} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}}^{[j]}, \quad \mathcal{H}_{\mathcal{E}}^{j-1} = \bigotimes_{k=0}^{j-1} \mathcal{H}_{\mathcal{E},k}, \quad \mathcal{H}_{\mathcal{E}}^{[j]} = \bigotimes_{k=j}^{+\infty} \mathcal{H}_{\mathcal{E},k}. \quad (68)$$

Jeśli $j\tau$ jest chwilą obecną, wówczas $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}^{j-1}$ można interpretować jako przestrzeń tej części otoczenia, która oddziaływała już z układem \mathcal{S} i $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}^{[j]}$ jako przestrzeń związaną z układami dwupoziomowymi, które nie oddziaływały jeszcze z \mathcal{S} . Stany podstawowy i wzbudzony kubitów o numerze k oznaczono odpowiednio przez $|0\rangle_k$ and $|1\rangle_k$. Przyjęto, że otoczenie układu jest przygotowane w stanie

$$|1_{\xi}\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{\tau} \xi_k \sigma_k^+ |vac\rangle, \quad (69)$$

gdzie $|vac\rangle = |0\rangle_0 \otimes |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \otimes |0\rangle_3 \dots$ jest wektorem próżni w $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, operatory $\sigma_k^- = |0\rangle_k \langle 1|$, $\sigma_k^+ = |1\rangle_k \langle 0|$ działają w przestrzeni $\mathcal{H}_{\mathcal{E},k}$, oraz $\sum_{k=0}^{+\infty} |\xi_k|^2 \tau = 1$. Aby uprościć zapis, w pracy pominięto mnożenie przez operatory jednostkowe. Dla wektora $|1_{\xi}\rangle$ otrzymujemy równości

$$\sigma_k^- |1_{\xi}\rangle = \sqrt{\tau} \xi_k |vac\rangle, \quad \sigma_k^+ \sigma_k^- |1_{\xi}\rangle = \sqrt{\tau} \xi_k |1_k\rangle. \quad (70)$$

Wektor $|1_{\xi}\rangle$ posiada własność addytywnego rozkładu, tzn.

$$|1_{\xi}\rangle = \sqrt{\tau} \sum_{k=0}^j \xi_k \sigma_k^+ |vac\rangle + \sqrt{\tau} \sum_{k=j+1}^{+\infty} \xi_k \sigma_k^+ |vac\rangle. \quad (71)$$

Może być on zapisany w postaci

$$|1_\xi\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{\tau} \xi_k |1_k\rangle, \quad (72)$$

gdzie $|1_k\rangle = |0\rangle_0 \otimes |0\rangle_1 \otimes \dots \otimes |0\rangle_{k-1} \otimes |1\rangle_k \otimes |0\rangle_{k+1} \otimes |0\rangle_{k+2} \dots$. Wielkość $|\xi_k|^2 \tau$ jest prawdopodobieństwem tego, że kubit otoczenia o numerze k znajduje się w stanie wzbudzonym i wszystkie pozostałe kubity znajdują się w stanie podstawowym. Podkreślmy, że stan otoczenia $|1_\xi\rangle$ jest stanem splątany, stopień splątania zależy od profilu ξ_k . Stan $|1_\xi\rangle$ jest dyskretnym odpowiednikiem ciągłomodowego stanu jednofotonowego [37, 39, 40]

$$|1_\xi\rangle = \int_0^{+\infty} \xi_t dB_t^\dagger |vac\rangle \quad (73)$$

z $\xi \in \mathbb{C}$ oraz normalizacją $\langle 1_\xi | 1_\xi \rangle = \int_0^\infty |\xi_t|^2 dt = 1$. W modelu powtarzających się interakcji, ewolucja układu złożonego $\mathcal{E} + \mathcal{S}$ do chwili $j\tau$ określona została poprzez unitarny operator postaci

$$U_{j\tau} = \mathbb{V}_{j-1} \mathbb{V}_{j-2} \dots \mathbb{V}_0, \quad U_0 = \mathbb{1}, \quad (74)$$

gdzie \mathbb{V}_k działa nietrywialnie tylko w przestrzeni $\mathcal{H}_{\mathcal{E},k} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, $\mathbb{V}_k = \exp(-i\tau H_k)$ i H_k jest hamiltonianem takim, że

$$H_k = H_{\mathcal{S}} + \frac{i}{\sqrt{\tau}} \left(\sigma_k^+ \otimes L - \sigma_k^- \otimes L^\dagger \right). \quad (75)$$

Dla uproszczenia, przyjęto $\hbar = 1$. Operator $H_{\mathcal{S}}$ jest hamiltonianem układu \mathcal{S} , σ_k^+ oraz σ_k^- oznaczają odpowiednio operator podnoszący i opuszczający w $\mathcal{H}_{\mathcal{E},k}$. Jako układ \mathcal{S} możemy rozważyć atom dwupoziomowy i zdefiniować operator L poprzez $\sqrt{\Gamma} \sigma_-$, gdzie Γ jest dodatnią stałą określającą oddziaływanie układu z polem i σ_- jest operatorem opuszczającym atomu. Jeśli \mathcal{S} jest modem pola we wnęce, wówczas możemy przyjąć, że $L = \sqrt{\Gamma} a$, gdzie a jest operatorem anihilacji pola wnęki. Ponieważ $\mathcal{H}_{\mathcal{E},k} = \mathbb{C}^2$, w pracy do opisu oddziaływania wykorzystano reprezentację $\{|0\rangle_k, |1\rangle_k\}$, czyli

$$\mathbb{V}_k = \begin{pmatrix} V_{00} & V_{01} \\ V_{10} & V_{11} \end{pmatrix}, \quad (76)$$

gdzie V_{ij} są operatorami układu \mathcal{S} postaci

$$V_{00} = \mathbb{1}_{\mathcal{S}} - i\tau [H_{\mathcal{S}} - \tau \frac{1}{2} L^\dagger L + O(\tau^2)], \quad V_{10} = \sqrt{\tau} L + O(\tau^{3/2}), \quad (77)$$

$$V_{01} = -\sqrt{\tau} L^\dagger + O(\tau^{3/2}), \quad V_{11} = \mathbb{1}_{\mathcal{S}} + O(\tau). \quad (78)$$

Przyjęto, że stan początkowy układu złożonego $\mathcal{E} + \mathcal{S}$ jest stanem produktowym:

$$|1_\xi\rangle \otimes |\psi\rangle. \quad (79)$$

Stan układu złożonego w chwili $j\tau$ (po j oddziaływaniach) dany jest zatem jako $U_{j-1} |1_\xi\rangle \otimes |\psi\rangle$. Biorąc ślad częściowy po otoczeniu, otrzymujemy stan zredukowany układu \mathcal{S} w chwili $j\tau$:

$$\varrho_j = \text{Tr}_{\mathcal{E}} \left[U_{j-1} |1_\xi\rangle \langle 1_\xi| \otimes |\psi\rangle \langle \psi| U_{j-1}^\dagger \right]. \quad (80)$$

Tuż po każdym oddziaływaniu przeprowadzany jest pomiar na kubicie, który oddziaływał z układem \mathcal{S} . W pracy wyznaczono ewolucję układu \mathcal{S} zależną od wyników pomiarów przeprowadzanych na kubitach otoczenia w kolejnych chwilach $\tau, 2\tau, 3\tau, \dots$. Najpierw rozważono pomiar obserwabli

$$\sigma_k^+ \sigma_k^- = |1\rangle_k \langle 1|, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (81)$$

Udowodniono następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1 *Stan warunkowy układu \mathcal{S} oraz tej części otoczenia, która nie oddziaływała z układem \mathcal{S} do chwili $j\tau$ dla pomiarów obserwabli (81) w chwili $j\tau$ ma postać*

$$|\tilde{\Psi}_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle = \frac{|\Psi_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle}{\sqrt{\langle \Psi_{j|\boldsymbol{\eta}_j} | \Psi_{j|\boldsymbol{\eta}_j} \rangle}}, \quad (82)$$

gdzie $|\Psi_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle$ jest nieunormowanym wektorem warunkowym

$$|\Psi_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle = \sqrt{\tau} \sum_{k=j}^{+\infty} \xi_k \sigma_k^+ |vac\rangle_{[j,+\infty)} \otimes |\alpha_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle + |vac\rangle_{[j,+\infty)} \otimes |\beta_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle, \quad (83)$$

gdzie $\boldsymbol{\eta}_j$ jest binarnym wektorem $\boldsymbol{\eta}_j = (\eta_j, \eta_{j-1}, \dots, \eta_1)$ z $\eta_k \in \{0, 1\}$ reprezentującym wyniki wszystkich pomiarów przeprowadzonych do chwili $j\tau$. Używamy tutaj notacji $|vac\rangle_{[j,+\infty)} = |0\rangle_j \otimes |0\rangle_{j+1} \otimes \dots$. Wektory $|\alpha_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle, |\beta_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle$ z przestrzeni $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ spełniają układ sprzężonych stochastycznych równań rekurencyjnych

$$|\alpha_{j+1|\boldsymbol{\eta}_{j+1}}\rangle = V_{\eta_{j+1}0} |\alpha_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle, \quad (84)$$

$$|\beta_{j+1|\boldsymbol{\eta}_{j+1}}\rangle = V_{\eta_{j+1}0} |\beta_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle + \sqrt{\tau} \xi_j V_{\eta_{j+1}1} |\alpha_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle \quad (85)$$

i w chwili początkowej $|\alpha_0\rangle = |\psi\rangle, |\beta_0\rangle = 0$.

Wektory warunkowe $|\alpha_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle, |\beta_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle$ zależą od wszystkich wyników pomiarów obserwabli (81) do chwili $j\tau$. Postać wektora $|\tilde{\Psi}_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle$ wskazuje, że układ \mathcal{S} staje się splątany z tą częścią otoczenia, która nie oddziaływała jeszcze z układem. Interpretacja fizyczna wektora $|\Psi_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle$ jest następująca. Pierwszy wyraz w formule (83) reprezentuje następujący scenariusz: wszystkie kubity oddziałujące z układem \mathcal{S} do chwili $j\tau$ były przygotowane w stanie podstawowym, a zatem kubit przygotowany w stanie wzbudzonym pojawi się w przyszłości. Drugi wyraz w (83) odpowiada sytuacji, w której układ \mathcal{S} oddziaływał już z kubitem przygotowanym w stanie wzbudzonym i w przyszłości będzie oddziaływał z otoczeniem w stanie próżni. Oczywiście, prędzej czy później, zależnie od profilu ξ_k , układ \mathcal{S} „spotka” kubit przygotowany w stanie wzbudzonym, a zatem ostatecznie tylko drugi wyraz będzie mieć niezerowy wkład do (83) i stan $|\tilde{\Psi}_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle$ stanie się separowalny. Praca [H1] zawiera ogólne rozwiązanie układu równań stochastycznych (84) i (85).

Aby wyznaczyć stan *a posteriori* układu \mathcal{S} , zależny od wszystkich wyników pomiarów przeprowadzanych do chwili $j\tau$, należy wziąć ślad częściowy po otoczeniu z operatora $|\tilde{\Psi}_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle \langle \tilde{\Psi}_{j|\boldsymbol{\eta}_j}|$. Stan warunkowy układu \mathcal{S} w chwili $j\tau$ jest postaci

$$\tilde{\rho}_{j|\boldsymbol{\eta}_j} = \frac{\rho_{j|\boldsymbol{\eta}_j}}{\text{Tr} \rho_{j|\boldsymbol{\eta}_j}}, \quad (86)$$

gdzie

$$\rho_{j|\boldsymbol{\eta}_j} = |\alpha_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle\langle\alpha_{j|\boldsymbol{\eta}_j}| \sum_{k=j}^{+\infty} \tau |\xi_k|^2 + |\beta_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle\langle\beta_{j|\boldsymbol{\eta}_j}|. \quad (87)$$

Prawdopodobieństwo danej trajektorii jest określone poprzez $\text{Tr}\rho_{j|\boldsymbol{\eta}_j}$. Przez η_k ($k = 1, 2, \dots$) oznaczono zmienne losowe ze zbioru wartości $\{0, 1\}$ każda. Dla ciągu pomiarów dostajemy dyskretny proces stochastyczny $(\eta_j, \eta_{j-1}, \dots, \eta_1)$. Pojedyncza realizacja tego procesu składa się z ciągu zer i jedynek. W pracy wyznaczono formuły na warunkowe wartości oczekiwane dla η_{j+1} :

$$\mathbb{E}[\eta_{j+1}|\tilde{\rho}_{j|\boldsymbol{\eta}_j}] = k_j\tau + O(\tau^2), \quad \mathbb{E}[(\eta_{j+1})^2|\tilde{\rho}_{j|\boldsymbol{\eta}_j}] = k_j\tau + O(\tau^2), \quad (88)$$

gdzie

$$k_j = \text{Tr} \left(L^\dagger L \tilde{\rho}_{j|\boldsymbol{\eta}_j} + \frac{\xi_j^*}{\text{Tr}\rho_j} L |\beta_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle\langle\alpha_{j|\boldsymbol{\eta}_j}| + \frac{\xi_j}{\text{Tr}\rho_{j|\boldsymbol{\eta}_j}} |\alpha_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle\langle\beta_{j|\boldsymbol{\eta}_j}| L^\dagger + \frac{|\xi_j|^2}{\text{Tr}\rho_{j|\boldsymbol{\eta}_j}} |\alpha_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle\langle\alpha_{j|\boldsymbol{\eta}_j}| \right). \quad (89)$$

Określają one wartości oczekiwane zależne od wszystkich wyników z chwil poprzednich. W pracy zdefiniowano dyskretny proces stochastyczny

$$n_j = \sum_{k=1}^j \eta_k \quad (90)$$

z przyrostem $\eta_{j+1} = n_{j+1} - n_j =: \Delta n_j$ mającym dwie możliwe wartości: 0 oraz 1. Pokazano, że ewolucja stochastyczna układu \mathcal{S} dla procesu (90) opisana jest poprzez układ dyskretnych równań filtracji postaci:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{j+1} &= \tilde{\rho}_j - i[H_S, \tilde{\rho}_j]\tau - \frac{1}{2} \left\{ L^\dagger L, \tilde{\rho}_j \right\} \tau + L \rho_j L^\dagger \tau + [|\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\beta}_j|, L^\dagger] \xi_j \tau + [L, |\tilde{\beta}_j\rangle\langle\tilde{\alpha}_j|] \xi_j^* \tau \\ &+ \left\{ \frac{1}{k_j} \left(L \tilde{\rho}_j L^\dagger + L |\tilde{\beta}_j\rangle\langle\tilde{\alpha}_j| \xi_j^* + |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\beta}_j| L^\dagger \xi_j + |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\alpha}_j| |\xi_j|^2 \right) - \tilde{\rho}_j \right\} (\Delta n_{j+1} - k_j \tau), \end{aligned} \quad (91)$$

$$\begin{aligned} |\tilde{\alpha}_{j+1}\rangle\langle\tilde{\beta}_{j+1}| &= |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\beta}_j| - i [H_S, |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\beta}_j|] \tau - \frac{1}{2} \left\{ L^\dagger L, |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\beta}_j| \right\} \tau \\ &+ L |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\beta}_j| L^\dagger \tau + [L, |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\alpha}_j|] \xi_j^* \tau \\ &+ \left\{ \frac{1}{k_j} \left(L |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\beta}_j| L^\dagger + L |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\alpha}_j| \xi_j^* \right) - |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\beta}_j| \right\} (\Delta n_{j+1} - k_j \tau), \end{aligned} \quad (92)$$

$$\begin{aligned} |\tilde{\alpha}_{j+1}\rangle\langle\tilde{\alpha}_{j+1}| &= |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\alpha}_j| - i [H_S, |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\alpha}_j|] \tau - \frac{1}{2} \left\{ L^\dagger L, |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\alpha}_j| \right\} \tau + L |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\alpha}_j| L^\dagger \tau \\ &+ \left\{ \frac{1}{k_j} L |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\alpha}_j| L^\dagger - |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\alpha}_j| \right\} (\Delta n_{j+1} - k_j \tau) \end{aligned} \quad (93)$$

z warunkiem początkowym: $\tilde{\rho}_0 = |\psi\rangle\langle\psi|$, $|\tilde{\alpha}_0\rangle\langle\tilde{\beta}_0| = 0$, oraz $|\tilde{\alpha}_0\rangle\langle\tilde{\alpha}_0| = |\psi\rangle\langle\psi|$. Wprowadzono tutaj wektory $|\tilde{\alpha}_j\rangle = |\alpha_j\rangle/\sqrt{\text{Tr}\rho_j}$, $|\tilde{\beta}_j\rangle = |\beta_j\rangle/\sqrt{\text{Tr}\rho_j}$. Zapisany powyżej układ równań filtracji określa ewolucję stochastyczną układu \mathcal{S} zależną od wyników pomiaru (81). Operator $\tilde{\rho}_j$ jest zależnym od wyników pomiarów unormowanym stanem układu \mathcal{S} . W pracy uproszczono zapis wektorów i operatorów warunkowych opuszczając indeks $\boldsymbol{\eta}_j$. Dla ciągłej w czasie ewolucji

warunkowej, gdy $\tau \rightarrow 0$, otrzymano z (91)-(93) układ różniczkowych równań filtracji:

$$\begin{aligned} d\tilde{\rho}_t &= -i[H_S, \tilde{\rho}_t]dt - \frac{1}{2} \left\{ L^\dagger L, \tilde{\rho}_t \right\} dt + L\tilde{\rho}_t L^\dagger dt + [\tilde{\rho}_t^{01}, L^\dagger] \xi_t dt + [L, \tilde{\rho}_t^{10}] \xi_t^* dt \\ &+ \left\{ \frac{1}{k_t} \left(L\tilde{\rho}_t L^\dagger + L\tilde{\rho}_t^{10} \xi_t^* + \tilde{\rho}_t^{01} L^\dagger \xi_t + \tilde{\rho}_t^{00} |\xi_t|^2 \right) - \tilde{\rho}_t \right\} (dn(t) - k_t dt), \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned} d\tilde{\rho}_t^{01} &= -i[H_S, \tilde{\rho}_t^{01}]dt - \frac{1}{2} \left\{ L^\dagger L, \tilde{\rho}_t^{01} \right\} dt + L\tilde{\rho}_t^{01} L^\dagger dt + [L, \tilde{\rho}_t^{00}] \xi_t^* dt \\ &+ \left\{ \frac{1}{k_t} \left(L\tilde{\rho}_t^{01} L^\dagger + L\tilde{\rho}_t^{00} \xi_t^* \right) - \tilde{\rho}_t^{01} \right\} (dn(t) - k_t dt), \end{aligned} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} d\tilde{\rho}_t^{00} &= -i[H_S, \tilde{\rho}_t^{00}]dt - \frac{1}{2} \left\{ L^\dagger L, \tilde{\rho}_t^{00} \right\} dt + L\tilde{\rho}_t^{00} L^\dagger dt \\ &+ \left(\frac{1}{k_t} L\tilde{\rho}_t^{00} L^\dagger - \tilde{\rho}_t^{00} \right) (dn(t) - k_t dt), \end{aligned} \quad (96)$$

gdzie $\tilde{\rho}_t^{10} = (\tilde{\rho}_t^{01})^\dagger$, z warunkiem początkowym $\tilde{\rho}_0 = |\psi\rangle\langle\psi|$, $\tilde{\rho}_0^{01} = 0$, oraz $\tilde{\rho}_0^{00} = |\psi\rangle\langle\psi|$. $n(t)$ jest procesem liczącym z przyrostem $dn(t) = n(t+dt) - n(t)$ spełniającym regułę Itô $(dn_t)^2 = dn_t$. Dla procesu $n(t)$, który opisuje zliczania fotonów pola wyjściowego, otrzymano warunkową wartość oczekiwaną przyrostu postaci

$$\mathbb{E}[dn(t)|\tilde{\rho}_t] = k_t dt, \quad (97)$$

gdzie

$$k_t = \text{Tr} \left(L^\dagger L \tilde{\rho}_t + L\tilde{\rho}_t^{10} \xi_t^* + \tilde{\rho}_t^{01} L^\dagger \xi_t + \tilde{\rho}_t^{00} |\xi_t|^2 \right). \quad (98)$$

Jest to warunkowa wartość oczekiwana liczby fotonów w przedziale od t do $t + dt$ zależna od wyników pomiarów do chwili t . W przedziale od długości dt zliczonych może być nie więcej niż jeden foton.

Dla pomiaru nieselektywnego dostajemy z (94)-(96) układ równań różniczkowych:

$$\dot{\tilde{\rho}}_t = -i[H_S, \tilde{\rho}_t] - \frac{1}{2} \left\{ L^\dagger L, \tilde{\rho}_t \right\} + L\tilde{\rho}_t L^\dagger + [\tilde{\rho}_t^{01}, L^\dagger] \xi_t + [L, \tilde{\rho}_t^{10}] \xi_t^*, \quad (99)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_t^{01} = -i[H_S, \tilde{\rho}_t^{01}] - \frac{1}{2} \left\{ L^\dagger L, \tilde{\rho}_t^{01} \right\} + L\tilde{\rho}_t^{01} L^\dagger + [L, \tilde{\rho}_t^{00}] \xi_t^*, \quad (100)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_t^{00} = -i[H_S, \tilde{\rho}_t^{00}] - \frac{1}{2} \left\{ L^\dagger L, \tilde{\rho}_t^{00} \right\} + L\tilde{\rho}_t^{00} L^\dagger, \quad (101)$$

gdzie $\tilde{\rho}_t^{10} = (\tilde{\rho}_t^{01})^\dagger$, $\tilde{\rho}_0 = |\psi\rangle\langle\psi|$, $\tilde{\rho}_0^{01} = 0$, oraz $\tilde{\rho}_0^{00} = |\psi\rangle\langle\psi|$, określający ewolucję bezwarunkową układu \mathcal{S} .

W pracy [H1] opisano także statystykę fotonów w polu wyjściowym. Zauważmy, że wszystkie realizacje procesu liczącego $n(t)$ mogą być podzielone na rozłączne zbiory zawierające dokładnie m zliczeń w chwilach $t_m > \dots > t_2 > t_1 > 0$ i żadnych innych zliczeń od 0 do t . Oznaczmy przez $p_0^t(t_m, t_{m-1}, \dots, t_2, t_1)$ gęstość prawdopodobieństwa dla trajektorii określonej poprzez m zliczeń (detekcji fotonów) w chwilach $t_m > \dots > t_2 > t_1 > 0$ i żadnych innych fotonów w przedziale od zera do t . Pokazano, że

$$p_0^t(t_m, t_{m-1}, \dots, t_2, t_1) dt_m dt_{m-1} \dots dt_1 = \|\alpha_{t|t_m, \dots, t_1}\|^2 \int_t^{+\infty} dt' |\xi_{t'}|^2 + \|\beta_{t|t_m, \dots, t_1}\|^2.$$

A zatem znając postać wektorów warunkowych, możemy określić w pełni statystykę zliczeń fotonów pola wyjściowego. Dla prawdopodobieństwa braku zliczeń do chwili t otrzymujemy formułę

$$P_0^t(0) = \|\alpha_{t|\mathbf{0}_t}\|^2 \int_t^{+\infty} dt' |\xi_{t'}|^2 + \|\beta_{t|\mathbf{0}_t}\|^2. \quad (102)$$

Prawdopodobieństwo m zliczeń do chwili t dane jest jako

$$P_0^t(m) = \int_0^t dt_m \int_0^{t_m} dt_{m-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 p_0^t(t_m, t_{m-1}, \dots, t_2, t_1). \quad (103)$$

W pracy wyprowadzono wzory dla wektorów warunkowych powiązanych z różnymi trajektoriami dla obserwacji ciągłej. Dla braku zliczeń fotonów do chwili t otrzymujemy wektory warunkowe

$$|\alpha_{t|\mathbf{0}_t}\rangle = \mathbf{T}_t |\psi\rangle, \quad |\beta_{t|\mathbf{0}_t}\rangle = - \int_0^t dt' \mathbf{T}_{t-t'} \xi_{t'} L^\dagger \mathbf{T}_{t'} |\psi\rangle, \quad (104)$$

gdzie $\mathbf{T}_t = e^{-iGt}$ oraz $G = H_S - \frac{i}{2} L^\dagger L$. Dla jednego zliczenia w chwili t' i żadnych innych zliczeń w przedziale od zera do t , dostajemy

$$|\alpha_{t|t'}\rangle = \sqrt{dt'} \mathbf{T}_{t-t'} L \mathbf{T}_{t'} |\psi\rangle, \quad (105)$$

$$\begin{aligned} |\beta_{j|t}\rangle &= \sqrt{dt'} \left[\mathbf{T}_t \xi_{t'} - \mathbf{T}_{t-t'} L \left(\int_0^{t'} ds \mathbf{T}_{t'-s} \xi_s L^\dagger \mathbf{T}_s \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\int_{t'}^t ds \mathbf{T}_{t-s} \xi_s L^\dagger \mathbf{T}_{s-t'} \right) L \mathbf{T}_{t'} \right] |\psi\rangle. \end{aligned} \quad (106)$$

Dla dwóch zliczeń w chwilach t' oraz t'' , takich, że $0 < t' < t''$, i żadnego innego zliczenia w przedziale od zera do t , dostajemy

$$|\alpha_{t|t'',t'}\rangle = \sqrt{dt'' dt'} \mathbf{T}_{t-t''} L \mathbf{T}_{t''-t'} L \mathbf{T}_{t'} |\psi\rangle, \quad (107)$$

$$\begin{aligned} |\beta_{t|t'',t'}\rangle &= \sqrt{dt'' dt'} \left[\mathbf{T}_{t-t''} L \mathbf{T}_{t''} \xi_{t'} + \mathbf{T}_{t-t'} \xi_{t''} L \mathbf{T}_{t'} \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{T}_{t-t''} L \mathbf{T}_{t''-t'} L \left(\int_0^{t'} ds \mathbf{T}_{t'-s} \xi_s L^\dagger \mathbf{T}_s \right) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{T}_{t-t''} L \left(\int_{t'}^{t''} ds \mathbf{T}_{t''-s} \xi_s L^\dagger \mathbf{T}_{s-t'} \right) L \mathbf{T}_{t'} \right. \\ &\quad \left. - \left(\int_{t''}^t ds \mathbf{T}_{t-s} \xi_s L^\dagger \mathbf{T}_{s-t''} \right) L \mathbf{T}_{t''-t'} L \mathbf{T}_{t'} \right] |\psi\rangle. \end{aligned} \quad (108)$$

Na pierwszy rzut oka powyższe formuły wydają się być skomplikowane, ale interpretacja wchodzących w ich skład wyrażeń jest stosunkowo prosta. Operator \mathbf{T}_t opisuje ewolucję między zliczeniami, operator L oznacza emisję fotonu przez układ \mathcal{S} , wyrażenie $-\xi_t L^\dagger$ odpowiada absorpcji fotonu. Dowolny wektor warunkowy $|\alpha_{t|\bullet}\rangle$ powiązany jest ze scenariuszem, w którym foton pojawi się po chwili t . Oznacza to, że w tym przypadku wszystkie fotony mierzone w polu wyjściowym do chwili t zostały wyemitowane przez układ \mathcal{S} . Natomiast, dowolny wektor warunkowy $|\beta_{t|\bullet}\rangle$ jest powiązany ze scenariuszem, w którym układ \mathcal{S} oddziaływał już z kubitem przygotowanym w stanie wzbudzonym.

W pracy wyznaczono także ewolucję warunkowaną przez wynik pomiaru obserwabli

$$\sigma_k^x = \sigma_k^+ + \sigma_k^- = |+\rangle_k \langle +| - |-\rangle_k \langle -|, \quad (109)$$

dla $k = 0, 1, 2, \dots$, gdzie

$$|+\rangle_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_k + |1\rangle_k), \quad |-\rangle_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_k - |1\rangle_k), \quad (110)$$

są wektorami z przestrzeni $\mathcal{H}_{\mathcal{E},k}$. Udowodniono twierdzenie.

Twierdzenie 2 *Stan warunkowy układu \mathcal{S} oraz tej części otoczenia, która nie oddziaływała z układem \mathcal{S} do chwili $j\tau$ dla pomiaru obserwabli (109) może być zapisany w chwili $j\tau$ w postaci*

$$|\tilde{\Psi}_j\rangle = \frac{|\Psi_j\rangle}{\sqrt{\langle \Psi_j | \Psi_j \rangle}}, \quad (111)$$

gdzie $|\Psi_j\rangle$ jest nieunormowanym wektorem warunkowym

$$|\Psi_j\rangle = \sqrt{\tau} \sum_{k=j}^{+\infty} \xi_k \sigma_k^+ |vac\rangle_{[j,+\infty)} \otimes |\alpha_j\rangle + |vac\rangle_{[j,+\infty)} \otimes |\beta_j\rangle, \quad (112)$$

z wektorami warunkowymi $|\alpha_j\rangle, |\beta_j\rangle$ spełniającymi układ sprzężonych równań rekurencyjnych

$$|\alpha_{j+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (V_{00} + q_{j+1} V_{10}) |\alpha_j\rangle, \quad (113)$$

$$|\beta_{j+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [(V_{00} + q_{j+1} V_{10}) |\beta_j\rangle + \sqrt{\tau} \xi_j (V_{01} + q_{j+1} V_{11}) |\alpha_j\rangle] \quad (114)$$

z wartościami początkowymi $|\alpha_0\rangle = |\psi\rangle, |\beta_0\rangle = 0$. Tutaj $q_{j+1} = 1, -1$ opisuje wyniki pomiaru przeprowadzonego w chwili $(j+1)\tau$ na kubicie o numerze j .

Zdefiniowano proces stochastyczny

$$w_j = \sqrt{\tau} \sum_{k=1}^j (q_k - r_{k-1} \sqrt{\tau}), \quad (115)$$

gdzie

$$r_j = \text{Tr} \left(L \tilde{\rho}_j + \tilde{\rho}_j L^\dagger + |\tilde{\beta}_j\rangle \langle \tilde{\alpha}_j | \xi_j^* + |\tilde{\alpha}_j\rangle \langle \tilde{\beta}_j | \xi_j \right), \quad (116)$$

operator $\tilde{\rho}_j$ jest stanem *a posteriori* układu \mathcal{S} w chwili $j\tau$, oraz $|\tilde{\alpha}_j\rangle = |\alpha_j\rangle / \sqrt{\text{Tr} \rho_j}$, $|\tilde{\beta}_j\rangle = |\beta_j\rangle / \sqrt{\text{Tr} \rho_j}$. Można sprawdzić, że warunkowe wartości oczekiwane: $\mathbb{E}[q_k | \tilde{\rho}_{k-1}] \simeq r_{k-1} \sqrt{\tau}$, $\mathbb{E}[(q_k)^2 | \tilde{\rho}_{k-1}] \simeq 1$. W publikacji pokazano, że ewolucja stochastyczną układu \mathcal{S} dla procesu (115) opisana jest poprzez układ dyskretnych równań filtracji postaci

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{j+1} - \tilde{\rho}_j &= -i[H_S, \tilde{\rho}_j] \tau - \frac{1}{2} \{L^\dagger L, \tilde{\rho}_j\} \tau + L \tilde{\rho}_j L^\dagger \tau + [|\tilde{\alpha}_j\rangle \langle \tilde{\beta}_j|, L^\dagger] \xi_j \tau + [L, |\tilde{\beta}_j\rangle \langle \tilde{\alpha}_j|] \xi_j^* \tau \\ &+ \left(L \tilde{\rho}_j + \tilde{\rho}_j L^\dagger + |\tilde{\beta}_j\rangle \langle \tilde{\alpha}_j | \xi_j^* + |\tilde{\alpha}_j\rangle \langle \tilde{\beta}_j | \xi_j - \tilde{\rho}_j r_j \right) \Delta w_{j+1}, \end{aligned} \quad (117)$$

$$\begin{aligned}
|\tilde{\alpha}_{j+1}\rangle\langle\tilde{\beta}_{j+1}| &= |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\beta}_j| - i[H_S, |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\beta}_j|]\tau - \frac{1}{2}\{L^\dagger L, |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\beta}_j|\}\tau \\
&\quad + L|\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\beta}_j|L^\dagger\tau + [L, |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\alpha}_j|]\xi_j^*\tau \\
&\quad + \left(L|\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\beta}_j| + |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\beta}_j|L^\dagger + |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\alpha}_j|\xi_j^* - |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\beta}_j|r_j \right) \Delta w_{j+1}, \quad (118)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\tilde{\alpha}_{j+1}\rangle\langle\tilde{\alpha}_{j+1}| &= |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\alpha}_j| - i[H_S, |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\alpha}_j|]\tau - \frac{1}{2}\{L^\dagger L, |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\alpha}_j|\}\tau + L|\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\alpha}_j|L^\dagger\tau \\
&\quad + \left(L|\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\alpha}_j| + |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\alpha}_j|L^\dagger - |\tilde{\alpha}_j\rangle\langle\tilde{\alpha}_j|r_j \right) \Delta w_{j+1}, \quad (119)
\end{aligned}$$

gdzie $\Delta w_{j+1} = w_{j+1} - w_j = q_{j+1}\sqrt{\tau} - r_j\tau$.

Proces w_j w granicy $\tau \rightarrow 0$ zmierza do procesu Wienera w_t i z równań dyskretnych otrzymujemy układ różniczkowych równań filtracji postaci

$$\begin{aligned}
d\tilde{\rho}_t &= -i[H_S, \tilde{\rho}_t]dt - \frac{1}{2}\{L^\dagger L, \tilde{\rho}_t\}dt + L\tilde{\rho}_tL^\dagger dt + [\tilde{\rho}_t^{01}, L^\dagger]\xi_t dt + [L, \tilde{\rho}_t^{10}]\xi_t^* dt \\
&\quad + \left(L\tilde{\rho}_t + \tilde{\rho}_tL^\dagger + \tilde{\rho}_t^{01}\xi_t + \tilde{\rho}_t^{10}\xi_t^* - \tilde{\rho}_tr_t \right) dw(t), \quad (120)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\tilde{\rho}_t^{01} &= -i[H_S, \tilde{\rho}_t^{01}]dt - \frac{1}{2}\{L^\dagger L, \tilde{\rho}_t^{01}\}dt + L\tilde{\rho}_t^{01}L^\dagger dt + [L, \tilde{\rho}_t^{00}]\xi_t^* dt \\
&\quad + \left(L\tilde{\rho}_t^{01} + \tilde{\rho}_t^{01}L^\dagger + \tilde{\rho}_t^{00}\xi_t^* - \tilde{\rho}_t^{01}r_t \right) dw(t), \quad (121)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\tilde{\rho}_t^{00} &= -i[H_S, \tilde{\rho}_t^{00}]dt - \frac{1}{2}\{L^\dagger L, \tilde{\rho}_t^{00}\}dt + L\tilde{\rho}_t^{00}L^\dagger dt \\
&\quad + \left(L\tilde{\rho}_t^{00} + \tilde{\rho}_t^{00}L^\dagger - \tilde{\rho}_t^{00}r_t \right) dw(t), \quad (122)
\end{aligned}$$

gdzie $r_t = \text{Tr}(L\tilde{\rho}_t + \tilde{\rho}_tL^\dagger + \tilde{\rho}_t^{10}\xi_t^* + \tilde{\rho}_t^{01}\xi_t)$, $\tilde{\rho}_t^{10} = (\tilde{\rho}_t^{01})^\dagger$, $\tilde{\rho}_0 = |\psi\rangle\langle\psi|$, $\tilde{\rho}_0^{01} = 0$, oraz $\tilde{\rho}_0^{00} = |\psi\rangle\langle\psi|$.

Wyniki opublikowane w [H1] można zastosować do różnych układów kwantowych oddziałujących z pakietem falowym w stanie jednofotonowym. W pracy [H2] jako układ otwarty rozważyłam atom dwupoziomowy. Wykorzystując ogólne formuły z [H1] wyznaczyłam warunkową ewolucję atomu dwupoziomowego dla obserwacji zliczającej. Celem pracy było pokazanie związku między ewolucją warunkową i bezwarunkową oraz wykorzystanie trajektorii kwantowych do wyznaczania statystyki fotonów w polu wyjściowym. Ważnym elementem pracy było także podanie interpretacji trajektorii kwantowych, gdy pole jednofotonowe oddziałuje z atomem dwupoziomowym.

Stan *a priori* układu kwantowego oddziałującego z polem w stanie jednofotonowym w reprezentacji procesu liczącego $n(t)$ ma w chwili t postać

$$\tilde{\rho}_t = \rho_{t|0} + \sum_{m=1}^{+\infty} \int_0^t dt_m \dots \int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \rho_{t|t_m, \dots, t_2, t_1}, \quad (123)$$

gdzie $\rho_{t|t_m, \dots, t_2, t_1}$ jest operatorem warunkowym zdefiniowanym poprzez

$$\rho_{t|cond} = |\alpha_{t|cond}\rangle\langle\alpha_{t|cond}| \int_t^{+\infty} ds |\xi_s|^2 + |\beta_{t|cond}\rangle\langle\beta_{t|cond}|, \quad (124)$$

gdzie $|\alpha_{t|cond}\rangle, |\beta_{t|cond}\rangle$ są wektorami warunkowymi zależnymi od wyników zliczeń fotonów w polu wyjściowym aż do chwili t . Sumowanie wykonywane jest po wszystkich możliwych ścieżkach detekcji fotonów dla liczby zliczeń zmieniającej się od $m = 0$ do $m = \infty$ w przedziale czasu od 0 do t . Wielkość $\text{Tr}\rho_{t|0}$ odpowiada prawdopodobieństwu braku zliczeń (detekcji) od chwili 0 do t , natomiast $\text{Tr}\rho_{t|t_m, \dots, t_2, t_1}$ dla wszystkich $m \geq 1$ jest gęstością prawdopodobieństwa detekcji fotonów w chwilach t_1, t_2, \dots, t_m takich, że $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m$ i żadnych innych fotonów od 0 do t . Oczywiście, dla układu dwupoziomowego niezerowy wkład pochodzi od maksymalnie dwóch składników. W przypadku, gdy atom w chwili początkowej znajduje się w stanie wzbudzonym, w polu wyjściowym zliczymy ostatecznie dwa fotony. Podana w pracy formuła jest uogólnieniem znanego wzoru na rozwiązanie równania master dla pola w stanie próżni, który można znaleźć np. w [6].

W pracy [H2] założyłam, że układ \mathcal{S} jest atomem dwupoziomowym ze stanem podstawowym $|g\rangle$ oraz wzbudzonym $|e\rangle$, oraz

$$H_{\mathcal{S}} = -\Delta_0\sigma_z, \quad L = \sqrt{\Gamma}\sigma_-, \quad (125)$$

gdzie $\Gamma \in \mathbb{R}_+$, $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$, $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$, oraz $\Delta_0 = \omega_c - \omega_0$, gdzie ω_0 jest częstotliwością przejścia między stanami atomu, a ω_c jest częstotliwością centralną pakietu falowego. Korzystając z formuł wyznaczonych w [H1], otrzymałam wektory warunkowe odnoszące się do braku zliczeń fotonów w przedziale od 0 aż do t postaci

$$|\alpha_{t|0}\rangle = \left(e^{-i\Delta_0 t} |g\rangle\langle g| + e^{(i\Delta_0 - \frac{\Gamma}{2})t} |e\rangle\langle e| \right) |\psi_0\rangle, \quad (126)$$

$$|\beta_{t|0}\rangle = -\sqrt{\Gamma} e^{(i\Delta_0 - \frac{\Gamma}{2})t} \int_0^t ds \xi_s e^{(-2i\Delta_0 + \frac{\Gamma}{2})s} |e\rangle\langle g| \psi_0, \quad (127)$$

gdzie $|\psi_0\rangle$ jest początkowym wektorem stanu układu. Z formuł widać, że gdy atom dwupoziomowy był w chwili początkowej w stanie podstawowym i nie zaobserwujemy żadnego fotonu do chwili t , oznacza to, że atom nie „spotkał” jeszcze fotonu pola wejściowego i nadal jest w stanie podstawowym lub „spotkał” foton pola, zaabsorbował go i pozostał w stanie wzbudzonym aż do chwili t . Jeżeli atom w chwili początkowej był w stanie wzbudzonym i nie zaobserwowaliśmy fotonu do chwili t , to oznacza tylko następujący scenariusz – układ nie „spotkał” jeszcze fotonu i nadal znajduje się w stanie wzbudzonym. Wówczas tylko wektor $|\alpha_{t|0}\rangle$ daje niezerowy wkład do stanu warunkowego układu. Znajomość wektorów (126), (127) pozwoliła mi otrzymać nieunormowany stan atomu dwupoziomowego warunkowany brakiem zliczeń fotonów do chwili t ,

$$\begin{aligned} \rho_{t|0} = & \left(e^{-i\Delta_0 t} |g\rangle\langle g| + e^{(i\Delta_0 - \frac{\Gamma}{2})t} |e\rangle\langle e| \right) |\psi_0\rangle\langle\psi_0| \left(e^{i\Delta_0 t} |g\rangle\langle g| + e^{(-i\Delta_0 - \frac{\Gamma}{2})t} |e\rangle\langle e| \right) \int_t^{+\infty} ds |\xi_s|^2 \\ & + \Gamma e^{-\Gamma t} \left| \int_0^t ds \xi_s e^{(-2i\Delta_0 + \frac{\Gamma}{2})s} \right|^2 |\langle\psi_0|g\rangle|^2 |e\rangle\langle e|. \end{aligned} \quad (128)$$

Biorąc ślad z (128), dostałam prawdopodobieństwo braku zliczeń fotonów do chwili t postaci

$$P_t(0) = (|\langle\psi_0|g\rangle|^2 + e^{-\Gamma t} |\langle\psi_0|e\rangle|^2) \int_t^{+\infty} ds |\xi_s|^2 + \Gamma e^{-\Gamma t} |\langle\psi_0|g\rangle|^2 \left| \int_0^t ds \xi_s e^{(-2i\Delta_0 + \frac{\Gamma}{2})s} \right|^2. \quad (129)$$

Pierwsze wyrażenie w powyższej sumie odnosi się do scenariusza, w którym układ „spotka” foton po czasie t , drugie wyrażenie jest prawdopodobieństwem absorpcji fotonu do chwili t i pozostania w stanie wzbudzonym aż do chwili t . Łatwo uogólnić ten wynik dla przypadku dowolnego stanu początkowego.

Dla detekcji jednego fotonu w $[t_1, t_1 + dt)$ takim, że $t_1 < t$ i żadnych innych detekcji w przedziale od 0 do t , dostałam

$$|\alpha_{t|t_1}\rangle = \sqrt{\Gamma} e^{-i\Delta_0 t} e^{(2i\Delta_0 - \frac{\Gamma}{2})t_1} |g\rangle \langle e|\psi_0\rangle, \quad (130)$$

$$\begin{aligned} |\beta_{t|t_1}\rangle = & e^{-i\Delta_0 t} \left[\left(\xi_{t_1} - \Gamma \int_0^{t_1} ds \xi_s e^{(2i\Delta_0 - \frac{\Gamma}{2})(t_1 - s)} \right) |g\rangle \langle g| \right. \\ & \left. + e^{(2i\Delta_0 - \frac{\Gamma}{2})t} \left(\xi_{t_1} - \Gamma \int_{t_1}^t ds \xi_s e^{(2i\Delta_0 - \frac{\Gamma}{2})(t_1 - s)} \right) |e\rangle \langle e| \right] |\psi_0\rangle. \end{aligned} \quad (131)$$

Zatem, gdy atom dwupoziomowy był początkowo w stanie podstawowym, wówczas otrzymujemy $|\alpha_{t|t_1}\rangle = 0$ i tylko dwa scenariusze są możliwe. Mianowicie, zliczyliśmy bezpośrednio foton pola wejściowego lub też atom zaabsorbował foton przed chwilą t_1 , następnie wyemitował foton w $[t_1, t_1 + dt)$ i pozostał później w stanie podstawowym do chwili t . Te dwa scenariusze ukryte są odpowiednio w pierwszym i drugim wyrażeniu dla wektora $|\beta_{t|t_1}\rangle$. Gdy atom w chwili początkowej był w stanie wzbudzonym, mógł on nie „spotkać” fotonu do chwili t , zaobserwowaliśmy wówczas foton wyemitowany przez atom lub atom „spotkał” foton przed t i zaobserwowaliśmy bezpośrednio foton pola lub atom wyemitował foton w chwili t_1 , potem zaabsorbował foton i pozostał w stanie wzbudzonym do chwili t .

Dla detekcji dwóch fotonów w przedziałach $[t_1, t_1 + dt)$, $[t_2, t_2 + dt)$ takich, że $0 < t_1 < t_2$ i żadnych innych fotonów w przedziale od 0 do t , otrzymujemy

$$|\alpha_{t|t_2, t_1}\rangle = 0, \quad (132)$$

$$\begin{aligned} |\beta_{t|t_2, t_1}\rangle = & \sqrt{\Gamma} e^{-i\Delta_0 t} e^{(2i\Delta_0 - \frac{\Gamma}{2})(t_1 + t_2)} \left(\xi_{t_1} e^{-(2i\Delta_0 - \frac{\Gamma}{2})t_1} + \xi_{t_2} e^{-(2i\Delta_0 - \frac{\Gamma}{2})t_2} \right. \\ & \left. - \Gamma \int_{t_1}^{t_2} ds \xi_s e^{(-2i\Delta_0 + \frac{\Gamma}{2})s} \right) |g\rangle \langle e|\psi_0\rangle. \end{aligned} \quad (133)$$

A zatem, jeżeli obserwujemy dwa fotony, oznacza to, iż jesteśmy pewni, że układ „spotkał” już foton pola ($|\alpha_{t|t_2, t_1}\rangle = 0$). Wyrażenia w wektorze (133) odpowiadają kolejno trzem następującym scenariuszom:

- pierwszy foton pochodził z pola wejściowego, drugi został wyemitowany przez atom,
- pierwszy foton został wyemitowany przez atom, drugi pochodził z pola wejściowego,
- oba fotony zostały wyemitowane przez atom (atom wyemitował foton, następnie zaabsorbował foton pola wejściowego i później wyemitował drugi z zaobserwowanych fotonów).

Wszystkie te możliwości pojawiają się, gdy prawdopodobieństwo tego, że atom był w chwili początkowej w stanie wzbudzonym jest niezerowe.

Dokonyjąc uśrednienia po wszystkich trajektoriach kwantowych, wyznaczyłam ogólną formułę dla stanu *a priori* atomu postaci

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_t = & \left[1 - \Gamma e^{-\Gamma t} \left| \int_0^t ds \xi_s e^{\gamma s} \right|^2 - \langle e | \rho_0 | e \rangle e^{-\Gamma t} \left(1 - 4\Gamma \text{Re} \int_0^t dt_1 \xi_{t_1}^* e^{\gamma^* t_1} \int_0^{t_1} ds \xi_s e^{-\gamma^* s} \right) \right] |g\rangle\langle g| \\
& + \langle e | \rho_0 | g \rangle e^{-\gamma t} \left(1 - 2\Gamma \int_0^t dt_1 \xi_{t_1} e^{-\gamma^* t_1} \int_0^{t_1} ds \xi_s^* e^{\gamma^* s} \right) |e\rangle\langle g| \\
& + \langle g | \rho_0 | e \rangle e^{-\gamma^* t} \left(1 - 2\Gamma \int_0^t dt_1 \xi_{t_1}^* e^{-\gamma t_1} \int_0^{t_1} ds \xi_s e^{\gamma s} \right) |g\rangle\langle e| \\
& + \left[\Gamma e^{-\Gamma t} \left| \int_0^t ds \xi_s e^{\gamma s} \right|^2 + \langle e | \rho_0 | e \rangle e^{-\Gamma t} \left(1 - 4\Gamma \text{Re} \int_0^t dt_1 \xi_{t_1}^* e^{\gamma^* t_1} \int_0^{t_1} ds \xi_s e^{-\gamma^* s} \right) \right] |e\rangle\langle e|,
\end{aligned} \tag{134}$$

gdzie $\gamma = -2i\Delta_0 + \frac{\Gamma}{2}$ i ρ_0 jest stanem początkowym atomu. Jest to ogólny przepis dla stanu zredukowanego atomu dwupoziomowego oddziałującego z biegnącym polem w jednofotonowym stanie Focka. Jak widać, stan układu w chwili t zależy od stanu początkowego atomu oraz profilu fotonu, ξ_t . Łatwo sprawdzić, że w granicy długiego czasu, $t \rightarrow +\infty$, atom zmierza do stanu podstawowego. Zauważmy, że dla atomu, który w chwili początkowej znajdował się w stanie podstawowym, dostajemy z (134) znaną w literaturze [45, 47] formułę na prawdopodobieństwo wzbudzenia atomu w chwili t ,

$$P(t) = \Gamma e^{-\Gamma t} \left| \int_0^t ds \xi_s e^{\gamma s} \right|^2. \tag{135}$$

Rozkład stanu zredukowanego na trajektorie kwantowe przynosi korzyść w postaci formuł na gęstości prawdopodobieństw zliczeń fotonów w polu wyjściowym. Formuły te pozwalają w pełni scharakteryzować statystykę fotonów pola wyjściowego. W pracy [H2] pokazałam także w jaki sposób można wykorzystać wektory warunkowe do wyznaczenia formuł na rozkłady prawdopodobieństw czasów oczekiwania na zliczenia kolejnych fotonów w polu wyjściowym. Pozwalają one, oczywiście, otrzymać średnie czasy zliczeń fotonów. Średni czas pierwszego zliczenia można wyznaczyć ze wzoru

$$\bar{t}_1 = \int_0^{+\infty} dt_1 t_1 p(t_1), \tag{136}$$

gdzie

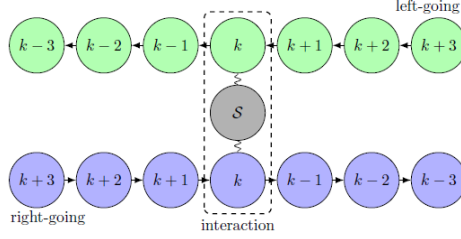
$$p(t_1) = e^{-\Gamma t_1} \left(\Gamma \int_{t_1}^{+\infty} ds |\xi_s|^2 + |\xi_{t_1}|^2 \right) \langle e | \rho_0 | e \rangle + \left| \xi_{t_1} - \Gamma \int_0^{t_1} ds \xi_s e^{(2i\Delta_0 - \frac{\Gamma}{2})(t_1 - s)} \right|^2 \langle g | \rho_0 | g \rangle \tag{137}$$

Gdy atom w chwili początkowej znajduje się w stanie wzbudzonym zaobserwujemy w polu wyjściowym dwa fotony. Średni czas drugiego zliczenia otrzymujemy z formuły

$$\bar{t}_2 = \int_0^{+\infty} dt_2 t_2 \int_0^{t_2} dt_1 p(t_2, t_1), \tag{138}$$

gdzie

$$p(t_2, t_1) = \Gamma e^{-\Gamma(t_1+t_2)} \left| \xi_{t_1} e^{-(2i\Delta_0 - \frac{\Gamma}{2})t_1} + \xi_{t_2} e^{-(2i\Delta_0 - \frac{\Gamma}{2})t_2} - \Gamma \int_{t_1}^{t_2} ds \xi_s e^{(-2i\Delta_0 + \frac{\Gamma}{2})s} \right|^2. \tag{139}$$



Rysunek 3: Układ \mathcal{S} oddziałuje z dwukierunkowym polem: poruszającym się w prawo polem jednofotonowym $|1_\xi\rangle$ i poruszającym się w lewo, polem w stanie próżni.

W pracy [H2] pokazałam także, że z procesem stochastycznym, $n(t)$, opisującym zliczenia fotonów w polu wyjściowym, można związać dla ustalonego czasu t miarę dodatnio określonych operatorów $\{M_{t|m}\}$ indeksowaną przez liczbę rejestrowanych fotonów $m = 0, 1, 2$ do chwili t . Pozwoliło to otrzymać ogólny przepis na średnią liczbę fotonów rejestrowanych między chwilą 0 i t oraz parametr Mandela, Q_t , dla pola wyjściowego. W rozdziale końcowym, wyniki zostały zilustrowane graficznie dla dwóch impulsów: prostokątnego oraz wykładniczego o wartościach malejących.

Praca [H3] jest poświęcona rozpraszaniu pakietu falowego w stanie jednofotonowym na układzie kwantowym. Rozpraszanie światła jest jednym z podstawowych zagadnień optyki kwantowej. W ostatnim czasie podjęto wiele wysiłku, aby opisać rozpraszanie światła w stanie N -fotonowym na różnych układach kwantowych. Celem pracy [H3] było pokazanie, że model zderzeniowy oraz trajektorie kwantowe dostarczają wygodnych narzędzi do analizowania rozpraszania światła w stanie nieklasycznym na układach kwantowych. W pracy [H3] rozważyłam układ kwantowy \mathcal{S} oddziałujący z otoczeniem \mathcal{E} będącym dwukierunkowym polem bozonowym, modelowanym poprzez dwa łańcuchy kubitów. Obrazowo można sobie wyobrazić, że jeden z łańcuchów opisuje pole biegnące w prawo, drugi odnosi się do pola biegnącego w lewo. Pierwszy z nich jest w stanie splątany będącym dyskretnym odpowiednikiem ciągłomodowego stanu pojedynczego fotonu, a drugi łańcuch jest przygotowywany w stanie próżni; co oznacza, że wszystkie jego kubity znajdują się w stanie podstawowym. Założyłam, że kubity otoczenia nie oddziałują ze sobą, ale oddziałują kolejno z układem \mathcal{S} . W danym momencie układ \mathcal{S} oddziałuje tylko z dwoma kubitami: jednym nadchodzącym z lewej i drugim z prawej strony. Przyjęłam, że każde oddziaływanie („zderzenie”) ma taki sam czas trwania oraz że każdy z kubitów wchodzi w interakcję z układem \mathcal{S} tylko raz. Po oddziaływaniu z układem \mathcal{S} wykonywany jest podwójny pomiar: na polu biegnącym w prawo i polu biegnącym w lewo. Schemat dynamiki układu złożonego pokazano na Rysunku 3.

Korzystając z modelu zderzeniowego i narzędzi stochastycznych, wyznaczyłam statystykę zliczeń fotonów dla dwukierunkowego pola wyjściowego. Wyznaczyłam najpierw analityczne formuły dla dyskretnych trajektorii kwantowych powiązanych z dwuwymiarowym procesem liczącym by następnie otrzymać formuły dla ciągłej w czasie obserwacji pola wyjściowego. Wyrażenia te mają ogólną postać i mogą być użyte do scharakteryzowania rozpraszania światła na różnych

układach kwantowych.

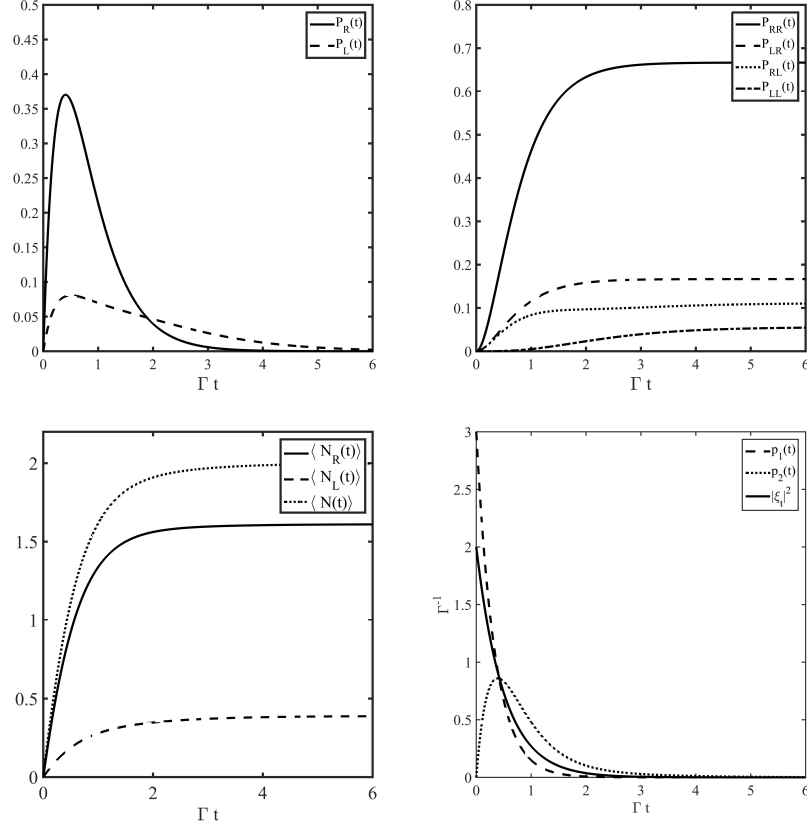
Jako przykład zastosowania otrzymanych formuł rozważyłam rozpraszanie światła na atomie dwupoziomowym. Oprócz pełnej charakterystyki liczby zliczanych fotonów z dwóch kierunków, w pracy [H3] znaleźć można także wyrażenia na gęstości prawdopodobieństw czasów detekcji fotonów. Formuły zostały wyznaczone dla dowolnego profilu fotonu oraz dowolnego stanu początkowego atomu. Posługując się formułami dla zależnych od wyników pomiarów wektorów warunkowych, określiłam prawdopodobieństwa braku zliczeń fotonów do danej chwili, prawdopodobieństwo zliczenia jednego fotonu z prawej i zero fotonów z lewej, $P_R(t)$, i odwrotnie — jednego fotonu z lewej i zero fotonów z prawej, $P_L(t)$. Ponadto, prawdopodobieństwo dwóch zliczeń z prawej, $P_{RR}(t)$, oraz prawdopodobieństwo dwóch zliczeń z lewej strony, $P_{LL}(t)$, do chwili t . A także detekcji z lewej i później z prawej strony, $P_{RL}(t)$, i odpowiednio najpierw z prawej, a potem z lewej, $P_{LR}(t)$, do chwili t . Odpowiadające im gęstości prawdopodobieństw zależą od stanu początkowego atomu, profilu czasowego fotonu oraz wielkości odstrojenia od rezonansu. Na tej podstawie można wyznaczyć średnią liczbę zliczeń z lewej $\langle N_L(t) \rangle$ i średnią liczbę zliczeń z prawej strony $\langle N_R(t) \rangle$ do danego momentu. Przykładowe wyniki dla malejącego wykładniczo impulsu przedstawia Rysunek 4. Oczywiście, otrzymane wyniki pozwalają również na wyprowadzenie asymptotycznych prawdopodobieństw przejścia i odbicia fotonu. Asymptotyczne prawdopodobieństwa rozpraszania były badane innymi metodami w pracach [95–98]. W pracy [H3] podałam ogólne formuły na asymptotyczne wartości prawdopodobieństw charakteryzujących rozproszenie dla dowolnego stanu początkowego atomu i fotonu o malejącym profilu wykładniczym. Otrzymane w [H3] wyniki są z zgodne z wynikami cytowanych prac.

Oprócz wielkości odstrojenia, wpływ pola jednofotonowego na ewolucję atomu dwupoziomowego zależy od kształtu impulsu i tego jak długo trwa impuls, a dokładniej od relacji między średnim czasem oddziaływania impulsu z układem dwupoziomowym i czasem życia stanu wzbudzonego atomu ze względu na emisję spontaniczną. Zmieniając parametry impulsu wpływamy na to, w jaki sposób światło jest rozpraszane. W pracy wyznaczyłam także wyrażenia na średnie czasy zliczeń fotonów dla podanego profilu.

Wyniki pracy [H3] mogą być bezpośrednio wykorzystane do wyznaczenia statystyk dla rozproszonego światła na innych układach kwantowych, np. na wnęce rezonansowej. Wyniki pozwalają także otrzymać formułę na stan pola wyjściowego. W obszernym suplemencie do pracy [H3] znajduje się wyprowadzenie układu równań filtracji dla układu kwantowego oddziałującego z podanym polem dwukierunkowym.

4.2.5 Niemarkowska dynamika kubitów oddziałującego z polem jednofotonowym

Dowolny układ kwantowy nigdy w rzeczywistości nie jest idealnie odizolowany i dlatego powinien być traktowany jako układ otwarty [8]. Ewolucja układu otwartego nie jest unitarna, a oddziaływanie z otoczeniem prowadzi między innymi do procesów dysypacji i dekoherencji. Gdy oddziaływanie między układem a otoczeniem jest wystarczająco słabe i warunki doświadczenia pozwalają zastosować przybliżenie Markowa, ewolucja układu otwartego dana jest równaniem



Rysunek 4: Charakterystyka zliczeń fotonów w polu wyjściowym dla malejącego profilu wykładniczego w przypadku rezonansu dla wybranych parametrów fotonu wraz z gęstościami prawdopodobieństwa czasów zliczeń fotonów dla atomu wzbudzonego w chwili początkowej.

master $\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho$, przy czym \mathcal{L} jest generatorem postaci

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[H_S, \rho] + \sum_k \gamma_k \left(L_k \rho L_k^\dagger - \frac{1}{2} \{L_k^\dagger L_k, \rho\} \right), \quad (140)$$

gdzie H_S oznacza hamiltonian efektywny układu (włączając w to korektę przesunięcia Lamba), L_k są operatorami Lindblada, a $\gamma_k \geq 0$. W reżimie niemarkowskim, ze względu na korelacje między układem i jego otoczeniem, zredukowana ewolucja systemu nie jest określona przez równanie (140). W przypadku ewolucji niemarkowskiej, obserwuje się charakterystyczne efekty pamięciowe, takie jak przepływ wsteczny informacji od otoczenia do układu lub rekoherencja.

W artykule [H4] przeanalizowano niemarkowski charakter dynamiki układu dwupoziomowego (kubitu) oddziałującego z pakietem jednofotonowym. Pole jednofotonowe scharakteryzowane jest poprzez częstotliwość centralną oraz profil czasowy $\xi(t)$, gdzie $t \in \mathbb{R}$. Zaznaczyć należy, że $\xi(t)$ jest wolno zmieniającą się obwiednią impulsu jednofotonowego. W rozważonym przypadku za wszystkie niemarkowskie efekty dynamiki kubitu odpowiadają korelacje czasowe pola. Uzyskana w ramach formalizmu wejścia-wyjścia, ewolucja zredukowana kubitu jest określona przez hierarchiczny układ równań master. Przedstawione w pracy ogólne rozwiązanie tego układu stało się punktem wyjścia do wykazania, że rozważany układ jest równoważny jednemu lokalnemu w czasie równaniu master. Ceną za tę redukcję jest wysoce nietrywialna postać współczynników

definiujących lokalne w czasie równanie. Współczynniki $\gamma_{\pm}(t)$, $\gamma_z(t)$, rządzące procesami tłumienia (chłodzenia), ogrzewania i dekoherencji, zależą od czasu i są w pełni scharakteryzowane przez profil pakietu falowego oraz wartość odstrojenia od rezonansu. Znajomość formuł definiujących te współczynniki, pozwoliła w pracy określić wskaźniki niemarkowości dynamiki kubitów. Ustalono, że w ogólnym przypadku odwzorowanie dynamiczne rządzące ewolucją kubitów nie jest odwracalne, co implikuje osobliwości współczynników $\gamma_{\pm}(t)$, $\gamma_z(t)$ tzn. w chwilach, w których odwzorowanie jest nieodwracalne, wartości współczynników nie są określone. Co ciekawe, mimo że współczynniki nie są określone w pewnych chwilach, równanie master ma w dowolnym momencie regularne rozwiązanie.

W pracy podano ogólny warunek na odwracalność odwzorowania dynamicznego dla kubitów. Pokazano, że ewolucja kubitów nigdy nie jest CP-podzielna, ale jednocześnie w przypadku rezonansu może spełniać warunek BLP. Ponadto sprawdzono, że ewolucja kubitów jest *wiecznie niemarkowska* [99,100] tzn. w dowolnej chwili co najmniej jeden ze współczynników $\gamma_{\pm}(t)$, $\gamma_z(t)$ jest ujemny.

Szczegółowo opisano sytuację pola jednofotonowego o malejącym profilu wykładniczym. Tutaj dla rezonansu podano warunek odwracalności odwzorowania dynamicznego. Zbadano analitycznie zachowanie asymptotyczne współczynników określających równanie lokalne w czasie. Sprawdzono, że zawsze, niezależnie od parameterów fotonu, co najmniej jeden ze współczynników w danej chwili ma wartość ujemną. W pracy przedstawiono także wyniki analiz numerycznych dla przypadku rezonansu i poza rezonansem. Scenariusz poza rezonansem okazał się być znacznie bardziej skomplikowany, ponieważ liczba punktów osobliwych dla generatora czasowo-lokalnego w dużym stopniu zależy od parametru odstrojenia.

W pracy rozważono kubit oddziałujący z dwukierunkowym polem elektromagnetycznym. Założono, że z jednego kierunku biegnie pole jednofotonowe, z drugiego kierunku pole w stanie próżni. Zapisany w obrazie oddziaływania eliminującym swobodną ewolucję pola hamiltonian oddziaływania ma postać

$$H_{int}(t) = i\sqrt{\Gamma_1} (\sigma_- a_1^\dagger(t) - \sigma_+ a_1(t)) + i\sqrt{\Gamma_2} (\sigma_- a_2^\dagger(t) - \sigma_+ a_2(t)), \quad (141)$$

gdzie $a_i(t)$ oraz $a_i^\dagger(t)$ są kwantowymi operatorami białego szumu [9] spełniającymi relacje komutacji

$$[a_i(t), a_j^\dagger(t')] = \delta_{ij} \delta(t - t'), \quad (142)$$

a Γ_1 oraz Γ_2 są dodatnimi stałymi definiującymi sprzężenie, $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$, $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$, gdzie przez $|e\rangle$ oraz $|g\rangle$ oznaczono odpowiednio stany wzbudzone i podstawowy kubitów. W tym przypadku ewolucja kubitów określona jest poprzez hierarchiczny układ równań różniczkowych dla operatorów ρ^{kl} z $k, l = 0, 1$:

$$\dot{\rho}^{11}(t) = \mathcal{L}\rho^{11}(t) + \sqrt{\Gamma_1} \xi^*(t) [\sigma_-, \rho^{10}(t)] - \sqrt{\Gamma_1} \xi(t) [\sigma_+, \rho^{01}(t)], \quad (143)$$

$$\dot{\rho}^{10}(t) = \mathcal{L}\rho^{10}(t) - \sqrt{\Gamma_1} \xi(t) [\sigma_+, \rho^{00}(t)], \quad (144)$$

$$\dot{\rho}^{01}(t) = \mathcal{L}\rho^{01}(t) + \sqrt{\Gamma_1} \xi^*(t) [\sigma_-, \rho^{00}(t)], \quad (145)$$

$$\dot{\rho}^{00}(t) = \mathcal{L}\rho^{00}(t) \quad (146)$$

z superoperatorem

$$\mathcal{L}(\varrho) = -\frac{i\Delta_0}{2}[\varrho, \sigma_z] - \frac{\Gamma}{2}\{\sigma_+\sigma_-, \varrho\} + \Gamma\sigma_-\varrho\sigma_+, \quad (147)$$

gdzie $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, $\Delta_0 = \omega_c - \omega_0$, $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$. Tutaj ω_c jest częstotliwością centralną impulsu, a ω_0 częstotliwością przejścia układu dwupoziomowego. Operator gęstości układu dany jest przez $\rho(t) := \varrho^{11}(t)$ i w chwili początkowej $t = 0$ mamy

$$\varrho^{11}(0) = \varrho^{00}(0) = \rho(0), \quad \varrho^{01}(0) = \varrho^{10}(0) = 0. \quad (148)$$

Zauważmy, że $\varrho^{10}(t) = (\varrho^{01}(t))^\dagger$. Operator $\rho(0)$ definiuje stan układu w chwili początkowej. Podkreślmy, że $\xi(t)$ jest wolnozmienną się obwiednią impulsu jednofotonowego.

W pracy podano rozwiązanie analityczne układu równań (143)-(146). Można sprawdzić, że odwzorowanie dynamiczne Λ_t reprezentujące ewolucję kubitów ma postać

$$\rho(0) \rightarrow \rho(t) = \Lambda_t \rho(0) = \begin{pmatrix} 1 - P_e(t) & C(t)\rho_{ge}(0) \\ C^*(t)\rho_{eg}(0) & P_e(t) \end{pmatrix}, \quad (149)$$

gdzie obsadzenie stanu wzbudzonego $P_e(t) = \rho_{ee}(t)$ jest dane przez

$$P_e(t) = A(t) + B(t)P_e(0), \quad (150)$$

gdzie

$$A(t) = \kappa\Gamma e^{-\Gamma t} \left| \int_0^t ds \xi(s) e^{(-i\Delta_0 + \frac{\Gamma}{2})s} \right|^2, \quad (151)$$

$$B(t) = e^{-\Gamma t} \left(1 - 4\kappa\Gamma \operatorname{Re} \int_0^t ds \xi^*(s) e^{(i\Delta_0 + \frac{\Gamma}{2})s} \int_0^s d\tau \xi(\tau) e^{(-i\Delta_0 - \frac{\Gamma}{2})\tau} \right), \quad (152)$$

$$C(t) = e^{(-i\Delta_0 - \frac{\Gamma}{2})t} \left(1 - 2\kappa\Gamma \int_0^t ds \xi^*(s) e^{(i\Delta_0 - \frac{\Gamma}{2})s} \int_0^s d\tau \xi(\tau) e^{(-i\Delta_0 + \frac{\Gamma}{2})\tau} \right). \quad (153)$$

Tutaj $\kappa = \Gamma_1/\Gamma$, a zatem $\kappa \in [0, 1]$. Jeśli $\kappa = 0$, układ oddziałuje tylko z polem w stanie próżni, jeśli $\kappa = 1$ układ oddziałuje tylko z częścią jednofotonową pola. Powyższe wzory dostarczają pełnego opisu ewolucji kubitów dla dowolnego profilu fotonu $\xi(t)$. Stan asymptotyczny układu jest uniwersalny. Atom ostatecznie relaksuje do stanu podstawowego $|g\rangle$ niezależnie od $\xi(t)$. Należy jednak podkreślić, że $|g\rangle\langle g|$ nie jest niezmienniczym stanem ewolucji. To zasadnicza różnica między półgrupą markowską a ewolucją niemarkowską. Dla półgrupy stan asymptotyczny zawsze definiuje stan niezmienniczy.

Istnieją dwa zasadniczo różne scenariusze ewolucji kubitów:

1. Jeśli $B(t) > 0$ oraz $|C(t)| > 0$ dla dowolnego $t \geq 0$, wówczas odwzorowanie dynamiczne Λ_t jest odwracalne (wartości własne $\{B(t), C(t), C^*(t)\}$ nie znikają), tzn. że znając stan układu $\rho(t)$ w chwili t możemy ustalić jego stan początkowy $\rho(0)$.
2. Odwzorowanie dynamiczne Λ_t nie jest odwracalne, jeżeli istnieje $t < \infty$ takie, że $B(t) = 0$ lub $C(t) = 0$.

Analizę niemarkowskiego charakteru ewolucji kubitów, wygodnie jest prowadzić dysponując lokalnym w czasie równaniem master dla operatora gęstości układu. Formuła (149) określająca zależność od czasu operatora gęstości $\rho(t)$ definiuje odwzorowanie dynamiczne $\rho(0) \rightarrow \Lambda_t \rho(0)$. Różniczkując (149) względem czasu wykazano, że Λ_t spełnia lokalne w czasie równanie master $\dot{\Lambda}_t = \mathcal{L}_t \Lambda_t$, z generatorem postaci

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t(\rho) = & -i \frac{\omega(t)}{2} [\sigma_z, \rho] + \frac{\gamma_+(t)}{2} \left(\sigma_+ \rho \sigma_- - \frac{1}{2} \{ \sigma_- \sigma_+, \rho \} \right) \\ & + \frac{\gamma_-(t)}{2} \left(\sigma_- \rho \sigma_+ - \frac{1}{2} \{ \sigma_+ \sigma_-, \rho \} \right) + \frac{\gamma_z(t)}{2} (\sigma_z \rho \sigma_z - \rho), \end{aligned} \quad (154)$$

gdzie $\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$ i $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ są operatorami Pauliego. Rzeczywiste, zależne od czasu współczynniki $\gamma_+(t), \gamma_-(t)$ oraz $\gamma_z(t)$, opisujące, odpowiednio, pompowanie, tłumienie oraz czyste defazowanie, są określone przez zależności

$$\gamma_+(t) = 2 \frac{\dot{A}(t)B(t) - A(t)\dot{B}(t)}{B(t)}, \quad \gamma_-(t) = -2 \frac{\dot{B}(t)}{B(t)} - \gamma_+(t), \quad (155)$$

$$\gamma_z(t) = \frac{1}{2} \frac{\dot{B}(t)}{B(t)} - \frac{\frac{d}{dt}|C(t)|}{|C(t)|} = \frac{1}{2} \frac{\dot{B}(t)}{B(t)} - \operatorname{Re} \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} \quad (156)$$

oraz

$$\omega(t) = \frac{\dot{C}(t)|C(t)| - C(t)\frac{d}{dt}|C(t)|}{iC(t)|C(t)|} = \operatorname{Im} \frac{\dot{C}(t)}{C(t)}. \quad (157)$$

Dla lokalnego w czasie generatora (154) można przedstawić następującą charakterystykę [100, 101].

Twierdzenie 3 *Ewolucja kubitów generowana przez (154)*

- jest CP-podzielna wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma_{\pm}(t) \geq 0$ and $\gamma_z(t) \geq 0$,
- jest P-podzielna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\gamma_{\pm}(t) \geq 0, \quad \sqrt{\gamma_+(t)\gamma_-(t)} + 2\gamma_z(t) \geq 0, \quad (158)$$

- spełnia warunek BLP wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\gamma_+(t) + \gamma_-(t) \geq 0, \quad \gamma_+(t) + \gamma_-(t) + 4\gamma_z(t) \geq 0, \quad (159)$$

- spełnia warunek geometryczny (13) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\gamma_+(t) + \gamma_-(t) + 2\gamma_z(t) \geq 0, \quad (160)$$

dla każdego $t \geq 0$.

W pracy udowodniono następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4 Niech $\Delta_0 = 0$ oraz $\xi(t) \in \mathbb{R}_+$. Jeżeli $B(t) > 0$ dla dowolnego $t > 0$, wówczas nie ma przepływu wstecznego informacji (warunek BLP jest spełniony). Ponadto, $C(t) > 0$ dla dowolnego $t > 0$ oraz koherencja, określona poprzez $C(t)|\rho_{ge}(0)|$, maleje monotonicznie w czasie. Jak również,

$$\gamma_+(t) \geq 0, \quad \gamma_-(t) \geq 2\Gamma, \quad \gamma_z(t) \leq 0, \quad (161)$$

i stąd ewolucja jest wiecznie niemarkowska.

W pracy przedstawiono wyniki analiz dla malejącego impulsu wykładniczego

$$\xi(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ \sqrt{\Gamma_p} e^{-\Gamma_p t/2} & \text{for } t \geq 0, \end{cases} \quad (162)$$

gdzie $\Gamma_p = \alpha\Gamma$ i $\alpha > 0$. W tym przypadku wyznaczono dla rezonansu analityczne formuły dla funkcji $A(t)$, $B(t)$ oraz $C(t)$ i w sposób jawny zapisano współczynniki $\gamma_{\pm}(t)$, $\gamma_z(t)$. Warto zaznaczyć, że nawet w tym prostym przykładzie, otrzymano dość skomplikowane formuły.

W pracy udowodniono następujące twierdzenia.

Twierdzenie 5 Maksymalna wartość prawdopodobieństwa wzbudzenia układu dwupoziomowego przez pole jednofotonowe o malejącym profilu wykładniczym,

$$P_e^{\max} = \frac{4\kappa}{e^2}, \quad (163)$$

jest osiągana dla $\alpha = 1$ oraz $\Delta_0 = 0$ w chwili $t = 2/\Gamma$.

Twierdzenie 6 Ewolucja kubitów dla impulsu (162) w przypadku rezonansu jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \geq 8\kappa + 1$.

Wniosek 1 W przypadku, gdy $\Delta_0 = 0$ oraz $\alpha \geq 8\kappa + 1$, ewolucja spełnia warunek BLP tzn. nie mam „powrotu informacji” do układu.

Twierdzenie 7 W przypadku rezonansu otrzymano następujące asymptotyczne zachowanie dla współczynników $\gamma_{\pm}(t)$ i $\gamma_z(t)$:

- dla $\alpha \geq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_+(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_z(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_-(t) = 2\Gamma, \quad (164)$$

- dla $\alpha \in (0, 1)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_+(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_z(t) = \frac{1}{4}\Gamma(1 - \alpha), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_-(t) = \Gamma(1 + \alpha). \quad (165)$$

Stąd otrzymano asymptotyczne wyniki

- dla $\alpha \geq 1$

$$\mathcal{L}_t(\rho) \rightarrow \Gamma \left(\sigma_- \rho \sigma_+ - \frac{1}{2} \{ \sigma_+ \sigma_-, \rho \} \right), \quad (166)$$

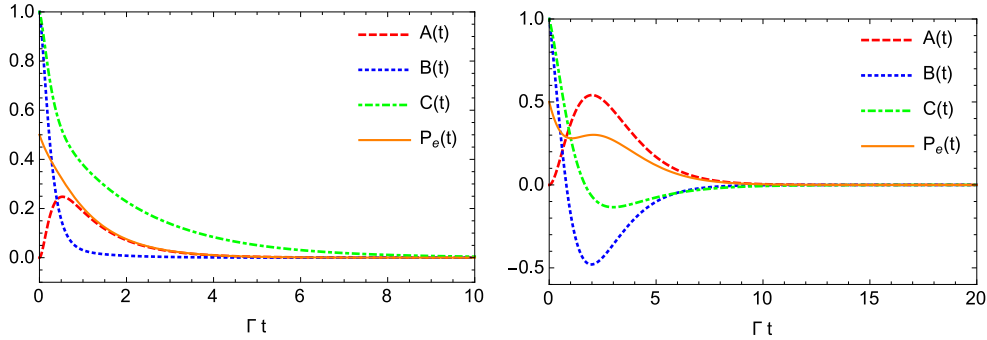
- dla $\alpha \in (0, 1)$

$$\mathcal{L}_t(\rho) \rightarrow \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2} \left(\sigma_- \rho \sigma_+ - \frac{1}{2} \{ \sigma_+ \sigma_-, \rho \} \right) + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{8} (\sigma_z \rho \sigma_z - \rho). \quad (167)$$

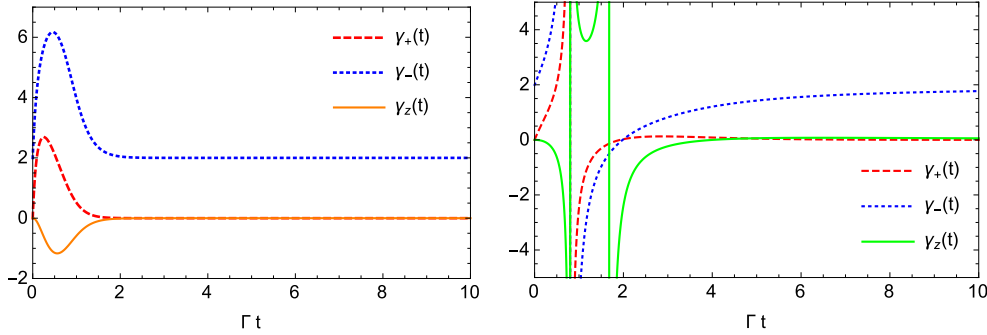
Twierdzenie 5 odnosi się do warunków optymalnego wzbudzenia układu dwupoziomowego poprzez pole jednofotonowe. W pracy znajdują się także wyniki analiz numerycznych. Tutaj podano przykładowe wykresy dla przypadku rezonansu dla dwóch sytuacji: dynamiki odwracalnej i nieodwracalnej (Rys. 5 oraz Rys. 6). Analiza numeryczna pokazała, że w przypadku rezonansu P-podzielność i warunek BLP pokrywają się. Ponadto,

$$\forall t \geq 0 \quad \gamma_+(t) \gamma_z(t) \leq 0. \quad (168)$$

Sprawdzono, że co najmniej jeden ze współczynników jest ujemny w danym momencie.



Rysunek 5: Wykresy $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ i $P_e(t)$ dla $\kappa = 1$, $\Delta_0 = 0$ i $P_e(0) = 0.5$. Po lewej: ewolucja odwracalna $\alpha = 9.5$. Po prawej: ewolucja nieodwracalna $\alpha = 1$.



Rysunek 6: Wykresy $\gamma_+(t)$, $\gamma_-(t)$ i $\gamma_z(t)$ dla $\Gamma = 1$, $\kappa = 1$, $\Delta_0 = 0$. Po lewej: ewolucja odwracalna $\alpha = 9.5$. Po prawej: ewolucja nieodwracalna $\alpha = 1$.

W pracy szczegółowo opisano wyniki poza rezonansem. Porównywano zachowanie różnych wskaźników ewolucji niemarkowskiej. Odwracalność dynamiki nie gwarantowała tutaj spełnienia warunku BLP. Sprawdzono, że w tym przypadku P-podzielność i warunek BLP nie pokrywają się.

4.2.6 Równania filtracji i trajektorie kwantowe dla układu otwartego oddziałującego z polem w stanie Focka

W artykule [H5] opisano ewolucję stochastyczną układu kwantowego oddziałującego z jednokierunkowym polem bozonowym przygotowanym w stanie Focka. W pracy rozważono przypadek, gdy fotony pola mają takie same profile czasowe. Do wyznaczenia warunkowej ewolucji układu kwantowego, zastosowano model powtarzających się oddziaływań i pomiarów. Otoczenie układu otwartego zdefiniowano jako łańcuch nieoddziałujących ze sobą oscylatorów harmonicznym, które są przygotowane w stanie splątanim, będącym dyskretnym odpowiednikiem stanu N -fotonowego pola ciągłomodowego. Splątanie oscylatorów harmonicznym prowadzi do niemarkowskiej ewolucji układu otwartego.

Ewolucję warunkową, opisaną poprzez układ $(N + 1)^2$ sprzężonych równań filtracji, wyznaczono dla obserwacji zliczającej fotony pola wyjściowego. Układ różniczkowych równań filtracji otrzymano wyznaczając w pierwszej kolejności układ równań różnicowych dla ewolucji dyskretnej. W pracy otrzymano formuły dla trajektorii kwantowych powiązanych ze stochastycznym procesem liczącym oraz opisano statystykę fotonów pola wyjściowego. Przedstawiono także rozwiązanie układu równań master zarówno dla ewolucji dyskretnej jak i ciągłej. Dla wektorów warunkowych, definiujących trajektorie kwantowe, przedstawiono technikę diagramową ułatwiającą ich wyznaczenie i podanie ich interpretacji fizycznej. Należy podkreślić, że otrzymane w pracy wyniki mają charakter ogólny, mogą być zastosowane do różnych kwantowych układów otwartych.

Przestrzeń Hilberta otoczenia dana jest jako

$$\mathcal{H}_{\mathcal{E}} = \bigotimes_{k=0}^{+\infty} \mathcal{H}_{\mathcal{E},k}, \quad (169)$$

gdzie $\mathcal{H}_{\mathcal{E},k}$ opisuje przestrzeń Hilberta oscylatora, który oddziałuje z \mathcal{S} w przedziale $[k\tau, (k+1)\tau)$.

Przez b_k oraz b_k^\dagger oznaczono w pracy operatory anihilacji i kreacji oscylatora o numerze k :

$$b_k |N\rangle_k = \sqrt{N} |N-1\rangle_k, \quad b_k^\dagger |N\rangle_k = \sqrt{(N+1)} |N+1\rangle_k, \quad (170)$$

gdzie $|N\rangle_k$ jest stanem liczby cząstek w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_{\mathcal{E},k}$. Operatory kreacji i anihilacji spełniają kanoniczne relacje komutacji postaci

$$[b_l, b_k] = 0, \quad [b_l^\dagger, b_k^\dagger] = 0, \quad [b_l, b_k^\dagger] = \delta_{lk}. \quad (171)$$

Ewolucja unitarna układu złożonego $\mathcal{E} + \mathcal{S}$ opisująca ciąg kolejnych oddziaływań (zderzeń) do chwili $j\tau$ dla $j \geq 1$ dana jest jako

$$U_{j\tau} = \mathbb{V}_{j-1} \mathbb{V}_{j-2} \dots \mathbb{V}_0, \quad U_0 = \mathbb{1}, \quad (172)$$

z \mathbb{V}_k działającym nietrywialnie tylko w $\mathcal{H}_{\mathcal{E},k} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, w taki sposób, że

$$\mathbb{V}_k = \mathbb{1}_{\mathcal{E}}^{[k-1]} \otimes \mathbb{V}_{[k]}, \quad (173)$$

oraz $\mathbb{V}_{[k]} = \exp(-i\tau H_k)$ z hamiltonianem

$$H_k = \mathbb{1}_{\mathcal{E}}^{[k]} \otimes H_{\mathcal{S}} + \frac{i}{\sqrt{\tau}} \left(b_k^\dagger \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{E}}^{[k+1]} \otimes L - b_k \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{E}}^{[k+1]} \otimes L^\dagger \right). \quad (174)$$

Tutaj H_S jest hamiltonianem układu oraz \mathcal{S} , $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$, gdzie $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ jest przestrzenią liniową operatorów ograniczonych działających w \mathcal{H}_S . Dla uproszczenia, przyjęto $\hbar = 1$. Korzystając z reprezentacji Focka zapisano

$$\exp(-i\tau H_k) = \sum_{MM'} |M\rangle_k \langle M'|_k \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{E}}^{[k+1]} \otimes V_{MM'}, \quad M, M' = 0, 1, 2, \dots, \quad (175)$$

gdzie $V_{MM'} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$.

Założono, że stan początkowy układu złożonego zadany jest poprzez wektor stanu

$$|N_\xi\rangle \otimes |\psi\rangle, \quad (176)$$

gdzie $|\psi\rangle$ jest stanem początkowym układu \mathcal{S} , $|N_\xi\rangle$ jest stanem N -fotonowym otoczenia zdefiniowanym jako

$$|N_\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\mathbf{b}_\xi^\dagger \right)^N |vac\rangle, \quad (177)$$

gdzie $|vac\rangle = |0\rangle_0 \otimes |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \otimes |0\rangle_3 \otimes \dots$ jest wektorem próżni w $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, oraz

$$\mathbf{b}_\xi^\dagger := \sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{\tau} \xi_k \mathbf{b}_k^\dagger, \quad \mathbf{b}_k^\dagger = \mathbb{1}_{\mathcal{E}}^{[k-1]} \otimes b_k^\dagger \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{E}}^{[k+1]}. \quad (178)$$

Przyjęto, że $\mathbf{b}_0^\dagger = b_0^\dagger \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{E}}^{[1]}$, $\xi_k \in \mathbb{C}$ oraz $\sum_{k=0}^{+\infty} \tau |\xi_k|^2 = 1$. Można sprawdzić, że

$$\mathbf{b}_k |N_\xi\rangle = \sqrt{N} \tau \xi_k |(N-1)_\xi\rangle. \quad (179)$$

Wektor (177) jest dyskretnym odpowiednikiem ciągłomodowego stanu Focka postaci [36–38, 40]

$$|N_\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\int_0^{+\infty} \xi_t dB_t^\dagger \right)^N |vac\rangle. \quad (180)$$

Zakładamy, że po każdym oddziaływaniu wykonywany jest pomiar na kolejnych elementach otoczenia tuż po ich oddziaływaniu z układem \mathcal{S} . W pracy rozważono pomiar obserwabli otoczenia

$$N_k = b_k^\dagger b_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (181)$$

Do opisu wszystkich wyników pomiarów obserwabli (181) otrzymanych do chwili $j\tau$ użyto wektora losowego $\boldsymbol{\eta}_j = (\eta_j, \eta_{j-1}, \dots, \eta_1)$. Podstawowy wynik dla modelu dyskretnego można zapisać w postaci następującego twierdzenia.

Twierdzenie 8 *Stan warunkowy układu \mathcal{S} oraz tej części otoczenia, która nie oddziaływała z \mathcal{S} do $j\tau$ dla stanu początkowego (176) i pomiarów obserwabli (181) ma w chwili $j\tau$ postać*

$$|\tilde{\Psi}_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle = \frac{|\Psi_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle}{\sqrt{\langle \Psi_{j|\boldsymbol{\eta}_j} | \Psi_{j|\boldsymbol{\eta}_j} \rangle}}, \quad (182)$$

gdzie nieunormowany wektor $|\Psi_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}}^{[j]} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ określony jest jako

$$|\Psi_{j|\boldsymbol{\eta}_j}\rangle = \sum_{M=0}^N |M_\xi\rangle_{[j,+\infty)} \otimes |\psi_{j|\boldsymbol{\eta}_j}^M\rangle. \quad (183)$$

Ponadto, $|M_\xi\rangle_{[j,+\infty)}$ jest nieunormowanym wektorem z przestrzeni $\mathcal{H}_\xi^{[j]}$ takim, że

$$|M_\xi\rangle_{[j,+\infty)} = \frac{1}{\sqrt{M!}} \left(\sqrt{\tau}\xi_j b_j^\dagger \otimes \mathbb{1}_\xi^{[j+1]} + \sum_{k=j+1}^{+\infty} \mathbb{1}_\xi^{[j,k-1]} \otimes \sqrt{\tau}\xi_k b_k^\dagger \otimes \mathbb{1}_\xi^{[k+1]} \right)^M |vac\rangle_{[j,+\infty)}, \quad (184)$$

gdzie $|vac\rangle_{[j,+\infty)} = |0\rangle_j \otimes |0\rangle_{j+1} \otimes \dots$, oraz wektory warunkowe $|\psi_j^0|_{\boldsymbol{\eta}_j}\rangle, |\psi_j^1|_{\boldsymbol{\eta}_j}\rangle, \dots, |\psi_j^N|_{\boldsymbol{\eta}_j}\rangle$ z \mathcal{H}_S spełniają układ sprzężonych równań rekurencyjnych:

$$|\psi_{j+1}^M|_{\boldsymbol{\eta}_{j+1}}\rangle = \sum_{M'=0}^{N-M} \sqrt{\binom{M+M'}{M'}} (\sqrt{\tau}\xi_j)^{M'} V_{\eta_{j+1}M'} |\psi_j^{M+M'}\rangle, \quad (185)$$

gdzie $V_{\eta_{j+1}M'} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ są zdefiniowane poprzez (175), oraz początkowo $|\psi_{j=0}^N\rangle = |\psi\rangle$, $|\psi_{j=0}^M\rangle = 0$ dla $0 \leq M \leq N-1$.

Użyto tutaj oznaczenia $|0_\xi\rangle_{[j,+\infty)} = |vac\rangle_{[j,+\infty)}$. Zauważmy, że wektor $|\tilde{\Psi}_j|_{\boldsymbol{\eta}_j}\rangle$ jest stanem splątanim układu \mathcal{S} oraz pola wejściowego, czyli tej części otoczenia, która nie oddziaływała jeszcze z \mathcal{S} . Zaznaczmy, że wektory $\{|M_\xi\rangle_{[j,+\infty)}, 1 \leq M \leq N\}$ dla różnych M są wzajemnie ortogonalne. Wektor $|\Psi_j|_{\boldsymbol{\eta}_j}\rangle$ ma następującą interpretację fizyczną. Określa on superpozycję $N+1$ możliwych scenariuszy: stan pola wejściowego jest stanem próżni, $|vac\rangle_{[j,+\infty)}$, lub też jednym ze stanów $|M_\xi\rangle_{[j,+\infty)}$, gdzie $1 \leq M \leq N$.

Prawdopodobieństwo warunkowe detekcji M fotonów w chwili $(j+1)\tau$, gdy znamy stan warunkowy układu \mathcal{S} oraz wejściowej części otoczenia w chwili $j\tau$, $|\tilde{\Psi}_j|_{\boldsymbol{\eta}_j}\rangle$, określone jest jako

$$p_{j+1} \left(M \mid |\tilde{\Psi}_j|_{\boldsymbol{\eta}_j}\rangle \right) = \frac{\langle \Psi_j|_{\boldsymbol{\eta}_j} | \mathbb{V}_j^\dagger \left(|M\rangle_j \langle M|_j \otimes \mathbb{1}_\xi^{[j+1]} \otimes \mathbb{1}_S \right) \mathbb{V}_j | \Psi_j|_{\boldsymbol{\eta}_j}\rangle}{\langle \Psi_j|_{\boldsymbol{\eta}_j} | \Psi_j|_{\boldsymbol{\eta}_j}\rangle}. \quad (186)$$

Rozwijając w szereg Taylora operator (175) można sprawdzić, że

$$p_{j+1} \left(0 \mid |\tilde{\Psi}_j|_{\boldsymbol{\eta}_j}\rangle \right) = 1 + O(\tau), \quad (187)$$

i dla wszystkich $M > 0$

$$p_{j+1} \left(M \mid |\tilde{\Psi}_j|_{\boldsymbol{\eta}_j}\rangle \right) = O(\tau^M). \quad (188)$$

Zatem prawdopodobieństwo detekcji więcej niż jednego fotonu zachowuje się jak $O(\tau^2)$. W granicy czasu ciągłego, gdy $\tau \rightarrow dt$, prawdopodobieństwo detekcji więcej niż jednego fotonu w przedziale czasu o długości dt znika. Pomijając wszystkie wyrazy rzędu większego od τ oraz procesy zliczeń więcej niż jednego fotonu otrzymujemy z (185) układ $N+1$ równań różnicowych postaci

$$|\psi_{j+1}^N|_{\boldsymbol{\eta}_{j+1}}\rangle = V_{\eta_{j+1}0} |\psi_j^N|_{\boldsymbol{\eta}_j}\rangle, \quad (189)$$

$$|\psi_{j+1}^M|_{\boldsymbol{\eta}_{j+1}}\rangle = V_{\eta_{j+1}0} |\psi_j^M|_{\boldsymbol{\eta}_j}\rangle + \sqrt{(M+1)\tau}\xi_j V_{\eta_{j+1}1} |\psi_j^{M+1}\rangle \quad (190)$$

dla $0 \leq M < N-1$, gdzie $\eta_{j+1} = \{0, 1\}$ oraz

$$\begin{aligned} V_{00} &= \mathbb{1}_S - i\tau H_S - \tau \frac{1}{2} L^\dagger L + O(\tau^2), & V_{10} &= \sqrt{\tau} L + O(\tau^{3/2}), \\ V_{01} &= -\sqrt{\tau} L^\dagger + O(\tau^{3/2}), & V_{11} &= \mathbb{1}_S + O(\tau). \end{aligned} \quad (191)$$

W pracy [H5] przedstawiono ogólne rozwiązanie powyższego układu równań.

Stan *a posteriori* układu \mathcal{S} w chwili $j\tau$ ma postać

$$\tilde{\rho}_j|\boldsymbol{\eta}_j = \frac{\rho_j|\boldsymbol{\eta}_j}{\text{Tr}_{\mathcal{S}}\rho_j|\boldsymbol{\eta}_j}, \quad (192)$$

gdzie

$$\rho_j|\boldsymbol{\eta}_j = \sum_{M=0}^N p_j^M |\psi_j^M|\boldsymbol{\eta}_j\rangle\langle\psi_j^M|\boldsymbol{\eta}_j|. \quad (193)$$

Operator $\tilde{\rho}_j|\boldsymbol{\eta}_j$ definiuje stan warunkowy układu \mathcal{S} zależny od wszystkich wyników pomiarów przeprowadzonych do chwili $j\tau$ na elementach otoczenia po oddziaływaniu z \mathcal{S} . Wielkość

$$\text{Tr}_{\mathcal{S}}\rho_j|\boldsymbol{\eta}_j = \sum_{M=0}^N p_j^M \langle\psi_j^M|\boldsymbol{\eta}_j|\psi_j^M|\boldsymbol{\eta}_j\rangle \quad (194)$$

określa prawdopodobieństwo danej trajektorii kwantowej.

W pracy przedstawiono wyprowadzenie układu równań filtracji dla ewolucji układu otwartego warunkowanej wynikami pomiaru. Przy wyprowadzeniu równań stochastycznych pominięto dla uproszczenia zapisu indeks $\boldsymbol{\eta}_j$. W pracy zdefiniowano operatory

$$\rho_j^{M,M'} = \frac{\text{Tr}_{\mathcal{E}^j} \left[\left(b_j^{N-M} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{E}^{j+1}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{S}} \right) |\Psi_j\rangle\langle\Psi_j| \left(\left(b_j^\dagger \right)^{N-M'} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{E}^{j+1}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{S}} \right) \right]}{\tau^{(2N-M-M')/2} \xi_j^{N-M} (\xi_j^*)^{N-M'}}, \quad (195)$$

gdzie $0 \leq M \leq N$ oraz $0 \leq M' \leq N$. Można sprawdzić, że $\rho_j^{N,N} = \rho_j$ oraz $\rho_j^{M,M'} = \left(\rho_j^{M',M} \right)^\dagger$.

Następnie wprowadzono operatory $\tilde{\rho}_j^{M,M'} = \frac{\rho_j^{M,M'}}{\text{Tr}_{\mathcal{S}}\rho_j}$, stąd $\tilde{\rho}_j^{N,N} = \tilde{\rho}_j$.

Zdefiniowano dyskretny proces stochastyczny:

$$n_j = \sum_{k=1}^j \eta_k, \quad (196)$$

z przyrostem $\Delta n_j = n_{j+1} - n_j = \eta_{j+1}$. Podkreślmy, że Δn_j przyjmuje tylko dwie wartości: 0 lub 1. Warunkowa wartość oczekiwana przyrostu Δn_j ma postać

$$\mathbb{E}[\Delta n_j | \tilde{\rho}_j] = k_j \tau + O(\tau^2), \quad (197)$$

gdzie $k_j = \text{Tr}_{\mathcal{S}} \left(L^\dagger L \tilde{\rho}_j + \xi_j^* L \tilde{\rho}_j^{N,N-1} + \xi_j \tilde{\rho}_j^{N-1,N} L^\dagger + |\xi_j|^2 \tilde{\rho}_j^{N-1,N-1} \right)$.

Dla stanu *a posteriori* układu \mathcal{S} otrzymano różnicowe równanie stochastyczne postaci

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{j+1} &= \tilde{\rho}_j + \tau \left(-i[H_{\mathcal{S}}, \tilde{\rho}_j] - \frac{1}{2} \left\{ L^\dagger L, \tilde{\rho}_j \right\} + L \rho_j L^\dagger + [\tilde{\rho}_j^{N-1,N}, L^\dagger] \xi_j + [L, \tilde{\rho}_j^{N,N-1}] \xi_j^* \right) \\ &+ \left\{ \frac{1}{k_j} \left(L \tilde{\rho}_j L^\dagger + L \tilde{\rho}_j^{N,N-1} \xi_j^* + \tilde{\rho}_j^{N-1,N} L^\dagger \xi_j + \tilde{\rho}_j^{N-1,N-1} |\xi_j|^2 \right) - \tilde{\rho}_j \right\} (\Delta n_j - k_j \tau) \end{aligned} \quad (198)$$

z warunkami początkowymi: $\tilde{\rho}_{j=0} = |\psi\rangle\langle\psi|$, $\tilde{\rho}_{j=0}^{N,N-1} = \tilde{\rho}_{j=0}^{N-1,N} = 0$ oraz $\tilde{\rho}_{j=0}^{N-1,N-1} = N|\psi\rangle\langle\psi|$. Aby wyznaczyć stan *a posteriori* układu \mathcal{S} w dowolnej chwili $j\tau$ potrzebny jest układ $(N+1)^2$

sprzężonych równań stochastycznych:

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_{j+1}^{M,M'} &= \tilde{\rho}_j^{M,M'} + \tau \left(-i[H_S, \tilde{\rho}_j^{M,M'}] - \frac{1}{2} \left\{ L^\dagger L, \tilde{\rho}_j^{M,M'} \right\} + L \rho_j^{M,M'} L^\dagger \right. \\
&\quad \left. + [\tilde{\rho}_j^{M-1,M'}, L^\dagger] \xi_j + [L, \tilde{\rho}_j^{M,M'-1}] \xi_j^* \right) \\
&\quad + \left\{ \frac{1}{k_j} \left(L \tilde{\rho}_j^{M,M'} L^\dagger + L \tilde{\rho}_j^{M,M'-1} \xi_j^* + \tilde{\rho}_j^{M-1,M'} L^\dagger \xi_j \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \tilde{\rho}_j^{M-1,M'-1} |\xi_j|^2 \right) - \tilde{\rho}_j^{M,M'} \right\} (\Delta n_j - k_j \tau)
\end{aligned} \tag{199}$$

z $0 \leq M \leq N$, $0 \leq M' \leq N$ i warunkiem początkowym $\tilde{\rho}_{j=0}^{M,M'} = \frac{N!}{\sqrt{M!M'}} \delta_{MM'} |\psi\rangle\langle\psi|$. Z tego iż $\tilde{\rho}_j^{M',M} = \left(\tilde{\rho}_j^{M,M'} \right)^\dagger$ wynika, że w istocie mamy tutaj co najwyżej $(N+1)(N+2)/2$ niezależnych równań. Zaznaczmy, że wyznaczone równania dla $N=1$ są zgodne z wyprowadzonymi wcześniej równaniami dla otoczenia w jednofotowym stanie Focka.

Uśredniając stan $\tilde{\rho}_j$ po wszystkich realizacjach rozważanego procesu stochastycznego, otrzymujemy stan *a priori*

$$\sigma_j = \langle \tilde{\rho}_j \rangle_{st}, \tag{200}$$

Dla stanu *a priori*, σ_j , otrzymano następujące równanie różnicowe

$$\sigma_{j+1} = \sigma_j + \tau \left(-i[H_S, \sigma_j] - \frac{1}{2} \left\{ L^\dagger L, \sigma_j \right\} + L \sigma_j L^\dagger + [\sigma_j^{N-1,N}, L^\dagger] \xi_j + [L, \sigma_j^{N,N-1}] \xi_j^* \right). \tag{201}$$

Dla operatorów $\sigma_j^{M,M'} = \langle \tilde{\rho}_j^{M,M'} \rangle_{st}$, wyznaczono układ równań różnicowych

$$\begin{aligned}
\sigma_{j+1}^{M,M'} &= \sigma_j^{M,M'} + \tau \left(-i[H_S, \sigma_j^{M,M'}] - \frac{1}{2} \left\{ L^\dagger L, \sigma_j^{M,M'} \right\} + L \sigma_j^{M,M'} L^\dagger \right. \\
&\quad \left. + [\sigma_j^{M-1,M'}, L^\dagger] \xi_j + [L, \sigma_j^{M,M'-1}] \xi_j^* \right)
\end{aligned} \tag{202}$$

z warunkiem początkowym: $\sigma_{j=0}^{M,M'} = N!/\sqrt{M!M'} \delta_{MM'} |\psi\rangle\langle\psi|$, gdzie $0 \leq M \leq N$ i $0 \leq M' \leq N$. Łatwo sprawdzić, że $\sigma_j^{N,N} = \sigma_j$.

Dla ciągłej w czasie obserwacji otrzymano, korzystając z (199), układ różniczkowych równań filtracji

$$\begin{aligned}
d\tilde{\rho}_t^{M,M'} &= dt \left(-i[H_S, \tilde{\rho}_t^{M,M'}] - \frac{1}{2} \left\{ L^\dagger L, \tilde{\rho}_t^{M,M'} \right\} + L \rho_t^{M,M'} L^\dagger \right. \\
&\quad \left. + [\tilde{\rho}_t^{M-1,M'}, L^\dagger] \xi_t + [L, \tilde{\rho}_t^{M,M'-1}] \xi_t^* \right) \\
&\quad + \left\{ \frac{1}{k_t} \left(L \tilde{\rho}_t^{M,M'} L^\dagger + L \tilde{\rho}_t^{M,M'-1} \xi_t^* + \tilde{\rho}_t^{M-1,M'} L^\dagger \xi_t \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \tilde{\rho}_t^{M-1,M'-1} |\xi_t|^2 \right) - \tilde{\rho}_t^{M,M'} \right\} (dn_t - k_t dt),
\end{aligned} \tag{203}$$

gdzie $k_t = \text{Tr}_S \left(L^\dagger L \tilde{\rho}_t + \xi_t^* L \tilde{\rho}_t^{N,N-1} + \xi_t \tilde{\rho}_t^{N-1,N} L^\dagger + |\xi_t|^2 \tilde{\rho}_t^{N-1,N-1} \right)$, $\xi_t \in \mathbb{C}$, $\int_0^\infty |\xi_t|^2 dt = 1$, i w chwili początkowej $\tilde{\rho}_{t=0}^{M,M'} = \frac{N!}{\sqrt{M!M'}} \delta_{M,M'} |\psi\rangle\langle\psi|$. Tutaj n_t jest procesem liczącym opisującym zliczenia fotonów pola wyjściowego w przedziale czasu od 0 do t . Dla przyrostu $dn_t = n_{t+dt} - n_t$ otrzymano warunkową wartość średnią

$$\mathbb{E}[dn_t | \tilde{\rho}_t] = k_t dt. \tag{204}$$

Zauważmy, że $(dn_t)^2 = dn_t$. Oznacza to, że w przedziale $[t, t + dt)$ zliczyć możemy co najwyżej jeden foton. Oczywiście, $\tilde{\rho}_t = \tilde{\rho}_t^{N,N}$, zatem jedno z równań jest równaniem dla stanu warunkowego. Wyprowadzone równania są zgodne z równaniami wyznaczonymi za pomocą kwantowego rachunku stochastycznego Itô w pracy [57].

Dla pomiaru nieselektywnego otrzymano z (202) układ równań różniczkowych

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_t^{M,M'}}{dt} = & -i[H_S, \sigma_t^{M,M'}] - \frac{1}{2} \left\{ L^\dagger L, \sigma_t^{M,M'} \right\} + L\sigma_t^{M,M'}L^\dagger \\ & + [\sigma_t^{M-1,M'}, L^\dagger]\xi_t + [L, \sigma_t^{M,M'-1}]\xi_t^*, \end{aligned} \quad (205)$$

gdzie $\sigma_t^{M,M'} = \langle \tilde{\rho}_t^{M,M'} \rangle_{st}$, $0 \leq M \leq N$, $0 \leq M' \leq N$ i w chwili początkowej $\sigma_{t=0}^{M,M'} = N!/\sqrt{M!M'!}\delta_{MM'}|\psi\rangle\langle\psi|$.

W pracy wyznaczono także postać wektorów warunkowych, które definiują trajektorie kwantowe dla ciągłej obserwacji liczącej pola wyjściowego. Zauważmy, że wszystkie realizacje procesu liczącego można podzielić na rozłączne zbiory zawierające trajektorie z dokładnie s zliczeniami w przedziale od czasu 0 do t , zachodzące w nienachodzącym na siebie przedziałach $[t_1, t_1 + dt_1)$, $[t_2, t_2 + dt_2)$, \dots , $[t_s, t_s + dt_s)$, gdzie $t_1 < t_2 < \dots < t_s < t$. Ogólna formuła dla $|\psi_{t|t_s\dots t_1}^{N-M}\rangle$ jest bardzo skomplikowana. Zamiast podawać tę ogólną formułę można pokazać, że przepisy dla wektorów warunkowych składają się z pewnych prostych formuł - „cegiełek”, które odpowiadają pewnym podstawowym procesom zachodzącym w układzie złożonym. Formuła dla dowolnego wektora warunkowego zbudowana jest z tych elementarnych cegiełek. W pracy podano także graficzną reprezentację tych formuł. W formułach dla wektorów warunkowych mamy do czynienia z następującymi procesami:

1. swobodną propagacją opisaną poprzez operator nieunitarny

$$\mathbf{T}_t = e^{-iGt}, \quad (206)$$

gdzie $G = H_S - \frac{i}{2}L^\dagger L$ jest hamiltonianem niehermitowskim,

2. absorpcją fotonu przez układ \mathcal{S} z otoczenia określoną poprzez

$$W_t = -\mathbf{T}_{-t}\xi_t L^\dagger \mathbf{T}_t \longleftrightarrow \text{---}\bullet\text{---}, \quad (207)$$

3. emisją fotonu przez układ \mathcal{S} zadaną poprzez formułę

$$\tilde{L}_t = \mathbf{T}_{-t}L\mathbf{T}_t \longleftrightarrow \text{---}\circ\text{---}, \quad (208)$$

4. detekcją fotonu pochodzącego bezpośrednio z otoczenia daną przez

$$\xi_t \longleftrightarrow * \quad (209)$$

Oto kilka przykładów wektorów warunkowych:

1. dla zera zliczeń od chwili 0 do t otrzymujemy

$$|\psi_{t|0}^N\rangle = \mathbf{T}_t|\psi\rangle \quad (210)$$

i odpowiadający temu wektorowi prosty diagram $-----$, oraz

$$|\psi_{t|0}^{N-M}\rangle = \sqrt{\frac{N!}{(N-M)!}} \mathbf{T}_t \int_0^t dt_M \dots \int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 W_{t_M} \dots W_{t_2} W_{t_1} |\psi\rangle, \quad (211)$$

z diagramem: $---\bullet---\bullet---\dots---\bullet---$ o M elementarnych procesach (absorpcjach) $---\bullet---$,

2. dla jednego zliczenia w chwili t' i żadnego innego zliczenia w przedziale od zera do t :

$$|\psi_{t|t'}^N\rangle = \sqrt{dt'} \mathbf{T}_t \tilde{L}_{t'} |\psi\rangle, \quad (212)$$

z diagramem: $---\circ---$,

$$|\psi_{t|t'}^{N-1}\rangle = \sqrt{N dt'} \mathbf{T}_t \left[\xi_{t'} + \tilde{L}_{t'} \int_0^{t'} ds W_s + \int_{t'}^t ds W_s \tilde{L}_{t'} \right] |\psi\rangle$$

z diagramem: $- * - + - \circ - \bullet - + - \bullet - \circ -$,

$$\begin{aligned} |\psi_{t|t'}^{N-2}\rangle = & \sqrt{N(N-1) dt'} \mathbf{T}_t \left[\tilde{L}_{t'} \int_0^{t'} dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 W_{t_2} W_{t_1} + \int_{t'}^t dt_2 \int_{t'}^{t_2} dt_1 W_{t_2} W_{t_1} \tilde{L}_{t'} \right. \\ & \left. + \int_{t'}^t dt_2 W_{t_2} \tilde{L}_{t'} \int_0^{t'} dt_1 W_{t_1} + \xi_{t'} \int_0^{t'} dt_1 W_{t_1} + \int_{t'}^t dt_1 W_{t_1} \xi_{t'} \right] |\psi\rangle \end{aligned} \quad (213)$$

z diagramem: $- \circ - \bullet - \bullet - + - \bullet - \bullet - \circ - + - \bullet - \circ - \bullet - + - * - \bullet - + - \bullet - * -$.

W pracy podano interpretację fizyczną wektorów warunkowych oraz reguły określające ich strukturę.

W reprezentacji zliczeniowej stan *a priori* układu otwartego ma postać

$$\sigma_t = \rho_{t|0} + \sum_{s=1}^{+\infty} \int_0^t dt_s \int_0^{t_s} dt_{s-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \rho_{t|t_s, t_{s-1}, \dots, t_2, t_1}, \quad (214)$$

gdzie

$$\rho_{t|0} = \sum_{M=0}^N p_t^M |\psi_{t|0}^M\rangle \langle \psi_{t|0}^M|, \quad (215)$$

z $p_t := \int_t^{+\infty} dt' |\xi_{t'}|^2$, oraz

$$dt_s dt_{s-1} \dots dt_1 \rho_{t|t_s, t_{s-1}, \dots, t_2, t_1} = \sum_{M=0}^N p_t^M |\psi_{t|t_s, t_{s-1}, \dots, t_2, t_1}^M\rangle \langle \psi_{t|t_s, t_{s-1}, \dots, t_2, t_1}^M| \quad (216)$$

z $|\psi_{j=0}^M\rangle = \delta_{NM} |\psi\rangle$ dla $0 \leq M \leq N$. Operator $\rho_{t|t_s, t_{s-1}, \dots, t_2, t_1}$ jest nieunormowanym stanem warunkowym układu \mathcal{S} . Całkowanie odbywa się po wszystkich możliwych realizacjach procesu stochastycznego n_t . Stąd wyznaczyć można pełną statystykę zliczeń fotonów w polu wyjściowym. W szczególności, prawdopodobieństwo braku zliczeń (braku detekcji) do chwili t dane jest jako

$$P_0^t(0) = \sum_{M=0}^N p_t^M \langle \psi_{t|0}^M | \psi_{t|0}^M \rangle. \quad (217)$$

Gęstość prawdopodobieństwa $p_0^t(t_s, t_{s-1}, \dots, t_2, t_1)$ trajektorii z s zliczeniami w przedziale od 0 do t , zachodzących w nienachodzących na siebie przedziałach $[t_1, t_1 + dt_1)$, $[t_2, t_2 + dt_2)$, \dots , $[t_s, t_s + dt_s)$, gdzie $t_1 < t_2 < \dots < t_s$ jest określona poprzez

$$p_0^t(t_s, t_{s-1}, \dots, t_2, t_1) dt_s dt_{s-1} \dots dt_1 = \sum_{M=0}^N p_t^M \langle \psi_{t|t_s, t_{s-1}, \dots, t_2, t_1}^M | \psi_{t|t_s, t_{s-1}, \dots, t_2, t_1}^M \rangle. \quad (218)$$

Stąd możemy wyznaczyć prawdopodobieństwo s zliczeń do chwili t jako

$$P_0^t(s) = \int_0^t dt_s \int_0^{t_s} dt_{s-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 p_0^t(t_s, t_{s-1}, \dots, t_2, t_1). \quad (219)$$

4.2.7 Równania filtracji i trajektorie kwantowe dla układu otwartego oddziałującego z polem w superpozycji stanów koherentnych

Praca [H6] poświęcona jest wyprowadzeniu równań filtracji opisujących stochastyczną ewolucję otwartego układu kwantowego oddziałującego z jednokierunkowym polem bozonowym przygotowanym w superpozycji stanów koherentnych. Aby otrzymać warunkową ewolucję układu kwantowego użyłam modelu zderzeń, z otoczeniem zdefiniowanym jako nieskończony łańcuch nieoddziałujących ze sobą kubitów, przygotowanych w stanie będącym odpowiednikiem superpozycji dwóch ciągliomodowych stanów koherentnych pola bozonowego. Założyłam, że kubity otoczenia oddziałują kolejno z układem kwantowym. Ze względu na korelacje czasowe występujące w polu wejściowym (splątanie kubitów), ewolucja otwartego układu kwantowego ma w tym przypadku charakter niemarkowski. Przyjęłam, że stan początkowy układu złożonego jest stanem produktowym. Ewolucję stochastyczną wyznaczyłam zakładając, że po każdym oddziaływaniu (zderzeniu) wykonywany jest pomiar na kubicie wchodzącym w interakcję z układem. Opisałam w pracy ewolucję stochastyczną dla dwóch procesów: liczącego oraz dyfuzji. Układy różniczkowych równań filtracji, określających warunkową ewolucję układu kwantowego dla ciągłych w czasie obserwacji pola wyjściowego, otrzymałam wyznaczając najpierw układy różniczkowych równań stochastycznych. W tym przypadku ewolucja warunkowa, dla obu typów obserwacji, określona jest za pomocą układu czterech równań filtracji. W pracy podałam także układ równań różniczkowych opisujących bezwarunkową ewolucję otwartego układu kwantowego.

W [H6] wykazałam, że model powtarzalnych oddziaływań i pomiarów pozwala, w granicy czasu ciągłego, otrzymać wyniki zgodne z rezultatami uzyskanymi w [48, 51]. Chciałbym podkreślić, że przedstawiona w [H6] metoda jest prostsza i bardziej intuicyjna niż metody zaproponowane w [48, 51]. Pozwala ona nie tylko na wyprowadzenie równań opisujących ewolucję układu, ale także umożliwia znalezienie ogólnej struktury trajektorii kwantowych.

Podobnie jak w [H1], w pracy [H6] także rozważyłam otoczenie \mathcal{E} modelowane poprzez ciąg kubitów. Stan koherentny pola definiowany jest jako [71, 74]

$$|\alpha\rangle = \bigotimes_{k=0}^{+\infty} |\alpha_k\rangle_k, \quad (220)$$

gdzie

$$|\alpha_k\rangle_k = e^{\sqrt{\tau}(\alpha_k \sigma_k^+ - \alpha_k^* \sigma_k^-)} |0\rangle_k \quad (221)$$

jest wektorem w przestrzeni Hilberta, $\mathcal{H}_{\mathcal{E},k}$, związanej z kubitem o numerze k . Zakładamy, że $\alpha_k \in \mathbb{C}$ oraz $\sum_{k=0}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \tau < \infty$. Dla wektora $|\alpha_k\rangle_k$ mamy następujące własności:

$$|\alpha_k\rangle_k = \left(1 - \frac{|\alpha_k|^2}{2}\tau\right) |0\rangle_k + \alpha_k \sqrt{\tau} |1\rangle_k + O(\tau^{3/2}), \quad (222)$$

$$\langle \alpha_k | \sigma_k^- | \alpha_k \rangle = \sqrt{\tau} \alpha_k + O(\tau^{3/2}), \quad \langle \alpha_k | \sigma_k^+ \sigma_k^- | \alpha_k \rangle = \tau |\alpha_k|^2 + O(\tau^2). \quad (223)$$

Wektor stanu $|\alpha\rangle$ jest dyskretnym odpowiednikiem stanu koherentnego [36, 37]

$$|\{\alpha\}\rangle = \exp \left[\int_0^{+\infty} (\alpha_t dB_t^\dagger - \alpha_t^* dB_t) \right] |vac\rangle \quad (224)$$

z $\alpha_t \in \mathbb{C}$ oraz $\int_0^{+\infty} dt |\alpha_t|^2 < +\infty$, dla którego

$$dB_t |\{\alpha\}\rangle = \alpha_t dt |\{\alpha\}\rangle. \quad (225)$$

Zauważmy, że gdy pole wejściowe znajduje się w stanie koherentnym ewolucja układu otwartego jest markowska.

W pracy [H6] założyłam, że stan początkowy układu złożonego $\mathcal{E} + \mathcal{S}$ ma postać

$$(c_\alpha |\alpha\rangle + c_\beta |\beta\rangle) \otimes |\psi\rangle, \quad (226)$$

gdzie $|\psi\rangle$ jest stanem początkowym układu \mathcal{S} , natomiast $|\alpha\rangle$ i $|\beta\rangle$ są stanami koherentnymi z przestrzeni $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, oraz

$$|c_\alpha|^2 + c_\alpha c_\beta^* \langle \beta | \alpha \rangle + c_\alpha^* c_\beta \langle \alpha | \beta \rangle + |c_\beta|^2 = 1. \quad (227)$$

Aby otrzymać ewolucję stochastyczną związaną z procesem liczącym, rozważyłam pomiar obserwabli

$$\sigma_k^- \sigma_k^+ = |1\rangle_k \langle 1|, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (228)$$

Wyniki dotyczące ewolucji warunkowej można podsumować w postaci twierdzenia.

Twierdzenie 9 *Stan warunkowy układu \mathcal{S} oraz części otoczenia, która nie oddziaływało jeszcze z układem \mathcal{S} do chwili $j\tau$ dla stanu początkowego (226) oraz pomiaru obserwabli (228), w chwili $j\tau$ jest postaci*

$$|\tilde{\Psi}_j\rangle = \frac{|\Psi_j\rangle}{\sqrt{\langle \Psi_j | \Psi_j \rangle}}, \quad (229)$$

gdzie

$$|\Psi_j\rangle = c_\alpha \bigotimes_{k=j}^{+\infty} |\alpha_k\rangle_k \otimes |\psi_j\rangle + c_\beta \bigotimes_{k=j}^{+\infty} |\beta_k\rangle_k \otimes |\varphi_j\rangle. \quad (230)$$

Wektory warunkowe $|\psi_j\rangle, |\varphi_j\rangle$ z przestrzeni Hilberta, $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, układu \mathcal{S} są określone poprzez stochastyczne formuły rekurencyjne

$$|\psi_{j+1}\rangle = M_{\eta_{j+1}}^{\alpha_j} |\psi_j\rangle, \quad |\varphi_{j+1}\rangle = M_{\eta_{j+1}}^{\beta_j} |\varphi_j\rangle, \quad (231)$$

gdzie $\eta_{j+1} = 0, 1$ oznacza zmienną losową określającą $(j+1)$ -wszy wynik pomiaru (228), ponadto

$$M_0^{\alpha_j} = \mathbb{1}_S - \left(iH_S + \frac{1}{2} L^\dagger L + L^\dagger \alpha_j + \frac{|\alpha_j|^2}{2} \right) \tau + O(\tau^2), \quad (232)$$

$$M_0^{\beta j} = \mathbb{1}_S - \left(iH_S + \frac{1}{2}L^\dagger L + L^\dagger \beta_j + \frac{|\beta_j|^2}{2} \right) \tau + O(\tau^2), \quad (233)$$

$$M_1^{\alpha j} = (L + \alpha_j) \sqrt{\tau} + O(\tau^{3/2}), \quad (234)$$

$$M_1^{\beta j} = (L + \beta_j) \sqrt{\tau} + O(\tau^{3/2}), \quad (235)$$

z warunkiem początkowym $|\psi_0\rangle = |\varphi_0\rangle = |\psi\rangle$.

Zauważmy, że wektor unormowany $|\tilde{\Psi}_j\rangle$, z przestrzeni Hilberta $\bigotimes_{k=j}^{+\infty} \mathcal{H}_{\mathcal{E},k} \otimes \mathcal{H}_S$, określa stan splątany kubitów pola wejściowego oraz układu \mathcal{S} . Wektory warunkowe $|\psi_j\rangle, |\phi_j\rangle$ zależą od wszystkich wyników pomiarów przeprowadzonych na kubitach otoczenia po oddziaływaniu z układem \mathcal{S} do chwili $j\tau$.

Aby otrzymać stan *a posteriori* układu \mathcal{S} należy wziąć ślad częściowy z $|\tilde{\Psi}_j\rangle\langle\tilde{\Psi}_j|$ eliminując stopnie swobody otoczenia. Zatem stan *a posteriori* układu \mathcal{S} w chwili $j\tau$ ma postać

$$\tilde{\rho}_j = \frac{\rho_j}{\text{Tr}\rho_j}, \quad (236)$$

gdzie

$$\rho_j = |c_\alpha|^2 |\psi_j\rangle\langle\psi_j| + c_\alpha c_\beta^* \prod_{k=j}^{+\infty} \langle\beta_k|\alpha_k\rangle |\psi_j\rangle\langle\varphi_j| + c_\alpha^* c_\beta \prod_{k=j}^{+\infty} \langle\alpha_k|\beta_k\rangle |\varphi_j\rangle\langle\psi_j| + |c_\beta|^2 |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|. \quad (237)$$

Wielkość $\text{Tr}\rho_j$ odpowiada prawdopodobieństwu danej trajektorii. Wyprowadzając układ równań rekurencyjnych opisujących dyskretną ewolucję stochastyczną układu \mathcal{S} , zapisałam stan warunkowy układu w chwili $j\tau$ w postaci

$$\tilde{\rho}_j = |c_\alpha|^2 \tilde{\rho}_j^{\alpha\alpha} + c_\alpha c_\beta^* \tilde{\rho}_j^{\alpha\beta} + c_\alpha^* c_\beta \tilde{\rho}_j^{\beta\alpha} + |c_\beta|^2 \tilde{\rho}_j^{\beta\beta}. \quad (238)$$

Dla ewolucji dyskretnej otrzymałam układ różnicowych równań filtracji postaci

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{j+1}^{\alpha\alpha} - \tilde{\rho}_j^{\alpha\alpha} &= \mathcal{L}\tilde{\rho}_j^{\alpha\alpha}\tau + [\tilde{\rho}_j^{\alpha\alpha}, L^\dagger]\alpha_j\tau + [L, \tilde{\rho}_j^{\alpha\alpha}]\alpha_j^*\tau \\ &+ \left\{ \frac{1}{\nu_j} \left(L\tilde{\rho}_j^{\alpha\alpha}L^\dagger + \tilde{\rho}_j^{\alpha\alpha}L^\dagger\alpha_j + L\tilde{\rho}_j^{\alpha\alpha}\alpha_j^* + \tilde{\rho}_j^{\alpha\alpha}|\alpha_j|^2 \right) - \tilde{\rho}_j^{\alpha\alpha} \right\} (\Delta n_j - \nu_j\tau), \end{aligned} \quad (239)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{j+1}^{\alpha\beta} - \tilde{\rho}_j^{\alpha\beta} &= \mathcal{L}\tilde{\rho}_j^{\alpha\beta}\tau + [\tilde{\rho}_j^{\alpha\beta}, L^\dagger]\alpha_j\tau + [L, \tilde{\rho}_j^{\alpha\beta}]\beta_j^*\tau \\ &+ \left\{ \frac{1}{\nu_j} \left(L\tilde{\rho}_j^{\alpha\beta}L^\dagger + \tilde{\rho}_j^{\alpha\beta}L^\dagger\alpha_j + L\tilde{\rho}_j^{\alpha\beta}\beta_j^* + \tilde{\rho}_j^{\alpha\beta}\beta_j^*\alpha_j \right) - \tilde{\rho}_j^{\alpha\beta} \right\} (\Delta n_j - \nu_j\tau), \end{aligned} \quad (240)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{j+1}^{\beta\beta} - \tilde{\rho}_j^{\beta\beta} &= \mathcal{L}\tilde{\rho}_j^{\beta\beta}\tau + [\tilde{\rho}_j^{\beta\beta}, L^\dagger]\beta_j\tau + [L, \tilde{\rho}_j^{\beta\beta}]\beta_j^*\tau \\ &+ \left\{ \frac{1}{\nu_j} \left(L\tilde{\rho}_j^{\beta\beta}L^\dagger + \tilde{\rho}_j^{\beta\beta}L^\dagger\beta_j + L\tilde{\rho}_j^{\beta\beta}\beta_j^* + \tilde{\rho}_j^{\beta\beta}|\beta_t|^2 \right) - \tilde{\rho}_j^{\beta\beta} \right\} (\Delta n_j - \nu_j\tau), \end{aligned} \quad (241)$$

gdzie

$$\mathcal{L}\rho = -i[H_S, \rho] - \frac{1}{2} \left\{ L^\dagger L, \rho \right\} + L\rho L^\dagger \quad (242)$$

z warunkiem początkowym $\tilde{\rho}_0^{\alpha\alpha} = \tilde{\rho}_0^{\beta\beta} = |\psi\rangle\langle\psi|$, $\tilde{\rho}_0^{\alpha\beta} = \langle\beta|\alpha\rangle|\psi\rangle\langle\psi|$. Tutaj n_j jest procesem stochastycznym z warunkową wartością oczekiwaną

$$\mathbb{E}[\Delta n_j | \tilde{\rho}_j] = \nu_j \tau + O(\tau^2), \quad (243)$$

gdzie

$$\nu_j = |c_\alpha|^2 \nu_j^{\alpha\alpha} + c_\alpha c_\beta^* \nu_j^{\alpha\beta} + c_\alpha^* c_\beta \nu_j^{\beta\alpha} + |c_\beta|^2 \nu_j^{\beta\beta} \quad (244)$$

oraz

$$\begin{aligned} \nu_j^{\alpha\alpha} &= \text{Tr} \left[\left(L^\dagger L + L\alpha_j^* + L^\dagger \alpha_j + |\alpha_j|^2 \right) \tilde{\rho}_j^{\alpha\alpha} \right], & \nu_j^{\alpha\beta} &= \text{Tr} \left[\left(L^\dagger L + L\beta_j^* + L^\dagger \alpha_j + \alpha_j \beta_j^* \right) \tilde{\rho}_j^{\alpha\beta} \right], \\ \nu_j^{\beta\alpha} &= \text{Tr} \left[\left(L^\dagger L + L\alpha_j^* + L^\dagger \beta_j + \alpha_j^* \beta_j \right) \tilde{\rho}_j^{\beta\alpha} \right], & \nu_j^{\beta\beta} &= \text{Tr} \left[\left(L^\dagger L + L\beta_j^* + L^\dagger \beta_j + |\beta_j|^2 \right) \tilde{\rho}_j^{\beta\beta} \right]. \end{aligned}$$

W granicy $\tau \rightarrow dt$, otrzymałam układ różniczkowych równań filtracji:

$$\begin{aligned} d\tilde{\rho}_t^{\alpha\alpha} &= \mathcal{L}\rho_t^{\alpha\alpha} dt + [\tilde{\rho}_t^{\alpha\alpha}, L^\dagger] \alpha_t dt + [L, \tilde{\rho}_t^{\alpha\alpha}] \alpha_t^* dt \\ &+ \left\{ \frac{1}{\nu_t} \left(L\tilde{\rho}_t^{\alpha\alpha} L^\dagger + \tilde{\rho}_t^{\alpha\alpha} L^\dagger \alpha_t + L\tilde{\rho}_t^{\alpha\alpha} \alpha_t^* + \tilde{\rho}_t^{\alpha\alpha} |\alpha_t|^2 \right) - \tilde{\rho}_t^{\alpha\alpha} \right\} (dn_t - \nu_t dt), \end{aligned} \quad (245)$$

$$\begin{aligned} d\tilde{\rho}_t^{\alpha\beta} &= \mathcal{L}\rho_t^{\alpha\beta} dt + [\tilde{\rho}_t^{\alpha\beta}, L^\dagger] \alpha_t dt + [L, \tilde{\rho}_t^{\alpha\beta}] \beta_t^* dt \\ &+ \left\{ \frac{1}{\nu_t} \left(L\tilde{\rho}_t^{\alpha\beta} L^\dagger + \tilde{\rho}_t^{\alpha\beta} L^\dagger \alpha_t + L\tilde{\rho}_t^{\alpha\beta} \beta_t^* + \tilde{\rho}_t^{\alpha\beta} \beta_t^* \alpha_t \right) - \tilde{\rho}_t^{\alpha\beta} \right\} (dn_t - \nu_t dt), \end{aligned} \quad (246)$$

$$\begin{aligned} d\tilde{\rho}_t^{\beta\beta} &= \mathcal{L}\rho_t^{\beta\beta} dt + [\tilde{\rho}_t^{\beta\beta}, L^\dagger] \beta_t dt + [L, \tilde{\rho}_t^{\beta\beta}] \beta_t^* dt \\ &+ \left\{ \frac{1}{\nu_t} \left(L\tilde{\rho}_t^{\beta\beta} L^\dagger + \tilde{\rho}_t^{\beta\beta} L^\dagger \beta_t + L\tilde{\rho}_t^{\beta\beta} \beta_t^* + \tilde{\rho}_t^{\beta\beta} |\beta_t|^2 \right) - \tilde{\rho}_t^{\beta\beta} \right\} (dn_t - \nu_t dt), \end{aligned} \quad (247)$$

z warunkiem początkowym $\tilde{\rho}_0^{\alpha\alpha} = \tilde{\rho}_0^{\beta\beta} = |\psi\rangle\langle\psi|$, $\tilde{\rho}_0^{\alpha\beta} = \langle\beta|\alpha\rangle|\psi\rangle\langle\psi|$. Stan *a posteriori* układu \mathcal{S} w chwili t określony jest poprzez

$$\tilde{\rho}_t = |c_\alpha|^2 \tilde{\rho}_t^{\alpha\alpha} + c_\alpha c_\beta^* \tilde{\rho}_t^{\alpha\beta} + c_\alpha^* c_\beta \tilde{\rho}_t^{\beta\alpha} + |c_\beta|^2 \tilde{\rho}_t^{\beta\beta}, \quad (248)$$

gdzie operatory warunkowe $\tilde{\rho}_t^{\alpha\alpha}$, $\tilde{\rho}_t^{\alpha\beta}$, $\tilde{\rho}_t^{\beta\beta}$ spełniają równania (245)–(247), oraz $\tilde{\rho}_t^{\beta\alpha} = \left(\tilde{\rho}_t^{\alpha\beta}\right)^\dagger$. n_t jest procesem liczącym z z regułą Itô postaci $(dn_t)^2 = dn_t$. Wspominana reguła oznacza, że w polu wyjściowym w przedziale czasu o długości dt rejestrujemy nie więcej niż jeden foton. Zależna od wyników pomiaru do chwili t , warunkowa wartość oczekiwana przyrostu, dn_t , ma postać

$$\mathbb{E}[dn_t | \tilde{\rho}_t] = \nu_t dt, \quad (249)$$

gdzie

$$\nu_t = |c_\alpha|^2 \nu_t^{\alpha\alpha} + c_\alpha c_\beta^* \nu_t^{\alpha\beta} + c_\alpha^* c_\beta \nu_t^{\beta\alpha} + |c_\beta|^2 \nu_t^{\beta\beta} \quad (250)$$

oraz

$$\begin{aligned} \nu_t^{\alpha\alpha} &= \text{Tr} \left[\left(L^\dagger L + L\alpha_t^* + L^\dagger \alpha_t + |\alpha_t|^2 \right) \tilde{\rho}_t^{\alpha\alpha} \right], & \nu_t^{\alpha\beta} &= \text{Tr} \left[\left(L^\dagger L + L\beta_t^* + L^\dagger \alpha_t + \alpha_t \beta_t^* \right) \tilde{\rho}_t^{\alpha\beta} \right], \\ \nu_t^{\beta\alpha} &= \text{Tr} \left[\left(L^\dagger L + L\alpha_t^* + L^\dagger \beta_t + \alpha_t^* \beta_t \right) \tilde{\rho}_t^{\beta\alpha} \right], & \nu_t^{\beta\beta} &= \text{Tr} \left[\left(L^\dagger L + L\beta_t^* + L^\dagger \beta_t + |\beta_t|^2 \right) \tilde{\rho}_t^{\beta\beta} \right]. \end{aligned}$$

Dla stanów koherentnych o amplitudach α_t oraz β_t , spełniających warunki

$$\int_0^{+\infty} |\alpha_t|^2 dt < +\infty, \quad \int_0^{+\infty} |\beta_t|^2 dt < +\infty, \quad (251)$$

dostajemy

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (|\alpha_t|^2 + |\beta_t|^2 - 2\alpha_t \beta_t^*) dt \right\}. \quad (252)$$

Zauważmy, że $\nu_t dt$ określa warunkową średnią liczbę fotonów zmierzonych w przedziale $[t, t + dt)$. Z fizycznego punktu widzenia, warunek (251) oznacza, że średnia liczba fotonów w stanie koherentnym jest skończona.

W pracy [H4] przestudiowałam także ewolucję stochastyczną powiązaną z pomiarem obserwabli

$$\sigma_k^x = \sigma_k^+ + \sigma_k^- = |+\rangle_k \langle +| - |-\rangle_k \langle -|, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (253)$$

gdzie

$$|+\rangle_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_k + |1\rangle_k), \quad |-\rangle_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_k - |1\rangle_k), \quad (254)$$

są wektorami z $\mathcal{H}_{\mathcal{E},k}$.

Wyniki analiz można podsumować w postaci twierdzenia.

Twierdzenie 10 *Stan warunkowy układu \mathcal{S} oraz tej części otoczenia, która nie oddziaływała jeszcze z układem \mathcal{S} do chwili $j\tau$, dla stanu początkowego (226) oraz pomiaru obserwabli (253), w chwili $j\tau$ ma postać*

$$|\tilde{\Psi}_j\rangle = \frac{|\Psi_j\rangle}{\sqrt{\langle \Psi_j | \Psi_j \rangle}}, \quad (255)$$

gdzie

$$|\Psi_j\rangle = c_\alpha \bigotimes_{k=j}^{+\infty} |\alpha_k\rangle_k \otimes |\psi_j\rangle + c_\beta \bigotimes_{k=j}^{+\infty} |\beta_k\rangle_k \otimes |\varphi_j\rangle. \quad (256)$$

Wektory warunkowe $|\psi_j\rangle, |\varphi_j\rangle$ z \mathcal{H}_S z (256) są określone poprzez równania rekurencyjne

$$|\psi_{j+1}\rangle = R_{\zeta_{j+1}}^{\alpha_j} |\psi_j\rangle, \quad |\varphi_{j+1}\rangle = R_{\zeta_{j+1}}^{\beta_j} |\varphi_j\rangle, \quad (257)$$

gdzie ζ_{j+1} oznacza zmienną losową opisującą $(j+1)$ -wszy wynik pomiaru (253), oraz

$$R_{\zeta_{j+1}}^{\alpha_j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\mathbb{1}_S - \left(iH_S + \frac{1}{2} L^\dagger L + L^\dagger \alpha_j + \frac{|\alpha_j|^2}{2} \right) \tau + (L + \alpha_j) \zeta_{j+1} \sqrt{\tau} + O(\tau^{3/2}) \right], \quad (258)$$

$$R_{\zeta_{j+1}}^{\beta_j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\mathbb{1}_S - \left(iH_S + \frac{1}{2} L^\dagger L + L^\dagger \beta_j + \frac{|\beta_j|^2}{2} \right) \tau + (L + \beta_j) \zeta_{j+1} \sqrt{\tau} + O(\tau^{3/2}) \right], \quad (259)$$

z warunkiem początkowym $|\psi_0\rangle = |\varphi_0\rangle = |\psi\rangle$.

W tym przypadku dyskretną ewolucję stochastyczną można opisać za pomocą równań różnicowych postaci

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{j+1}^{\alpha\alpha} - \tilde{\rho}_j^{\alpha\alpha} &= \mathcal{L} \tilde{\rho}_j^{\alpha\alpha} \tau + [\tilde{\rho}_j^{\alpha\alpha}, L^\dagger] \alpha_j \tau + [L, \tilde{\rho}_j^{\alpha\alpha}] \alpha_j^* \tau \\ &+ \left[(L + \alpha_j) \tilde{\rho}_j^{\alpha\alpha} + \tilde{\rho}_j^{\alpha\alpha} (L^\dagger + \alpha_j^*) - \mu_j \tilde{\rho}_j^{\alpha\alpha} \right] (\Delta q_j - \mu_j \tau), \end{aligned} \quad (260)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{j+1}^{\alpha\beta} - \tilde{\rho}_j^{\alpha\beta} &= \mathcal{L}\tilde{\rho}_j^{\alpha\beta}\tau + [\tilde{\rho}_j^{\alpha\beta}, L^\dagger]\alpha_j\tau + [L, \tilde{\rho}_j^{\alpha\beta}]\beta_j^*\tau \\ &\quad + \left[(L + \alpha_j)\tilde{\rho}_j^{\alpha\beta} + \tilde{\rho}_j^{\alpha\beta}(L^\dagger + \beta_j^*) - \mu_j\tilde{\rho}_j^{\alpha\beta} \right] (\Delta q_j - \mu_j\tau),\end{aligned}\quad (261)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{j+1}^{\beta\beta} - \tilde{\rho}_j^{\beta\beta} &= \mathcal{L}\tilde{\rho}_j^{\beta\beta}\tau + [\tilde{\rho}_j^{\beta\beta}, L^\dagger]\beta_j\tau + [L, \tilde{\rho}_j^{\beta\beta}]\beta_j^*\tau \\ &\quad + \left[(L + \beta_j)\tilde{\rho}_j^{\beta\beta} + \tilde{\rho}_j^{\beta\beta}(L^\dagger + \beta_j^*) - \mu_j\tilde{\rho}_j^{\beta\beta} \right] (\Delta q_j - \mu_j\tau)\end{aligned}\quad (262)$$

z warunkami początkowymi $\tilde{\rho}_0^{\alpha\alpha} = |\psi\rangle\langle\psi|$, $\tilde{\rho}_0^{\beta\beta} = |\psi\rangle\langle\psi|$, $\tilde{\rho}_0^{\alpha\beta} = \langle\beta|\alpha\rangle|\psi\rangle\langle\psi|$. Tutaj mamy do czynienia z procesem stochastycznym

$$q_j = \sqrt{\tau} \sum_{k=1}^j \zeta_k, \quad (263)$$

dla którego

$$\mathbb{E}[\Delta q_j = q_{j+1} - q_j | \tilde{\rho}_j] = \mu_j\tau + O(\tau^{3/2}), \quad (264)$$

gdzie

$$\mu_j = |c_\alpha|^2 \mu_j^{\alpha\alpha} + c_\alpha c_\beta^* \mu_j^{\alpha\beta} + c_\alpha^* c_\beta \mu_j^{\beta\alpha} + |c_\beta|^2 \mu_j^{\beta\beta} \quad (265)$$

oraz

$$\mu_j^{\alpha\alpha} = \text{Tr} \left[\left(L + L^\dagger + \alpha_j + \alpha_j^* \right) \tilde{\rho}_j^{\alpha\alpha} \right], \quad \mu_j^{\alpha\beta} = \text{Tr} \left[\left(L + L^\dagger + \alpha_j + \beta_j^* \right) \tilde{\rho}_j^{\alpha\beta} \right], \quad (266)$$

$$\mu_j^{\beta\alpha} = \text{Tr} \left[\left(L + L^\dagger + \beta_j + \alpha_j^* \right) \tilde{\rho}_j^{\beta\alpha} \right], \quad \mu_j^{\beta\beta} = \text{Tr} \left[\left(L + L^\dagger + \beta_j + \beta_j^* \right) \tilde{\rho}_j^{\beta\beta} \right]. \quad (267)$$

W granicy ciągłej w czasie obserwacji, ewolucja stochastyczna układu kwantowego określona jest poprzez układ różniczkowych równań filtracji postaci

$$\begin{aligned}d\tilde{\rho}_t^{\alpha\alpha} &= \mathcal{L}\rho_t^{\alpha\alpha}dt + [\tilde{\rho}_t^{\alpha\alpha}, L^\dagger]\alpha_t dt + [L, \tilde{\rho}_t^{\alpha\alpha}]\alpha_t^* dt \\ &\quad + \left[(L + \alpha_t)\tilde{\rho}_t^{\alpha\alpha} + \tilde{\rho}_t^{\alpha\alpha}(L^\dagger + \alpha_t^*) - \mu_t\tilde{\rho}_t^{\alpha\alpha} \right] (dq_t - \mu_t dt),\end{aligned}\quad (268)$$

$$\begin{aligned}d\tilde{\rho}_t^{\alpha\beta} &= \mathcal{L}\rho_t^{\alpha\beta}dt + [\tilde{\rho}_t^{\alpha\beta}, L^\dagger]\alpha_t dt + [L, \tilde{\rho}_t^{\alpha\beta}]\beta_t^* dt \\ &\quad + \left[(L + \alpha_t)\tilde{\rho}_t^{\alpha\beta} + \tilde{\rho}_t^{\alpha\beta}(L^\dagger + \beta_t^*) - \mu_t\tilde{\rho}_t^{\alpha\beta} \right] (dq_t - \mu_t dt),\end{aligned}\quad (269)$$

$$\begin{aligned}d\tilde{\rho}_t^{\beta\beta} &= \mathcal{L}\rho_t^{\beta\beta}dt + [\tilde{\rho}_t^{\beta\beta}, L^\dagger]\beta_t dt + [L, \tilde{\rho}_t^{\beta\beta}]\beta_t^* dt \\ &\quad + \left[(L + \beta_t)\tilde{\rho}_t^{\beta\beta} + \tilde{\rho}_t^{\beta\beta}(L^\dagger + \beta_t^*) - \mu_t\tilde{\rho}_t^{\beta\beta} \right] (dq_t - \mu_t dt),\end{aligned}\quad (270)$$

gdzie

$$\mu_t = |c_\alpha|^2 \mu_t^{\alpha\alpha} + c_\alpha c_\beta^* \mu_t^{\alpha\beta} + c_\alpha^* c_\beta \mu_t^{\beta\alpha} + |c_\beta|^2 \mu_t^{\beta\beta} \quad (271)$$

oraz

$$\mu_t^{\alpha\alpha} = \text{Tr} \left[\left(L + L^\dagger + \alpha_t + \alpha_t^* \right) \tilde{\rho}_t^{\alpha\alpha} \right], \quad \mu_t^{\alpha\beta} = \text{Tr} \left[\left(L + L^\dagger + \alpha_t + \beta_t^* \right) \tilde{\rho}_t^{\alpha\beta} \right], \quad (272)$$

$$\mu_t^{\beta\alpha} = \text{Tr} \left[\left(L + L^\dagger + \beta_t + \alpha_t^* \right) \tilde{\rho}_t^{\beta\alpha} \right], \quad \mu_t^{\beta\beta} = \text{Tr} \left[\left(L + L^\dagger + \beta_t + \beta_t^* \right) \tilde{\rho}_t^{\beta\beta} \right]. \quad (273)$$

Dla procesu stochastycznego q_t dostajemy prawdopodobieństwo warunkowe $\mathbb{E}[dq_t = q_{t+dt} - q_t | \tilde{\rho}_t] = \mu_t dt$. Można pokazać, że proces stochastyczny $w_t = q_t - \int_0^t \mu_s ds$ jest procesem Wienera.

W pracy wyznaczyłam także układ równań różniczkowych określających bezwarunkową ewolucję układu \mathcal{S} . Praca [H6] zawiera także rozwiązania analityczne dla ewolucji warunkowej oraz bezwarunkowej dla przypadku, gdy biegnące pole bozonowe oddziałuje z jednomodowym polem wnąki. Stan *a posteriori* układu otwartego podałam zarówno dla procesu liczącego jak i dyfuzji. Założyłam, że pole we wnące w chwili początkowej jest w stanie koherentnym.

4.2.8 Równania filtracji i trajektorie kwantowe dla układu otwartego oddziałującego z polem w ściśniętym stanie Focka

W pracy [H7] wyznaczono układ równań filtracji oraz równań master dla układu kwantowego oddziałującego z pakietem falowym w ściśniętym stanie Focka. Problem warunkowej ewolucji układu kwantowego sformułowano wykorzystując model powtarzających się oddziaływań i pomiarów. W tym podejściu układ kwantowy poddany jest sekwencji oddziaływań z otoczeniem zdefiniowanym przez łańcuch oscylatorów harmonicznycch. Przyjęto, że oscylatory harmoniczne otoczenia nie oddziałują ze sobą, ale jeden po drugim oddziałują z układem kwantowym, a następnie są poddane pomiarowi. Losowe wyniki pomiarów prowadzą do sekwencji losowych stanów systemu kwantowego. Stan układu warunkowano wynikami pomiaru zliczającego fotony. Założono, że otoczenie przygotowane jest w stanie splątany będącym dyskretnym odpowiednikiem ciągłomodowego ściśniętego stanu Focka.

W pracy przedstawiono wyprowadzenie dyskretnej dynamiki stochastycznej, która zależy od wyników pomiarów wykonanych na polu po jego interakcji z układem. W pracy wyprowadzono układ stochastycznych równań rekurencyjnych dla wektorów warunkowych i przedstawiono jego ogólne rozwiązanie analityczne powiązane z różnymi realizacjami procesu stochastycznego. W granicy obserwacji ciągłej w czasie otrzymano układ różniczkowych równań stochastycznych określających ewolucję *a posteriori* układu kwantowego. W przypadku pola wejściowego w ściśniętym stanie Focka otrzymujemy układ nieskończenie wielu równań określających ewolucję układu otwartego. Poza wyznaczeniem równań różniczkowych dla warunkowej i bezwarunkowej ewolucji układu kwantowego, opisano w pracy także analityczne wzory dla trajektorii kwantowych powiązanych z ciągłą w czasie detekcją fotonów. Pokazano w jaki sposób, korzystając z wzorów na trajektorie kwantowe, wyznaczyć pełną statystykę zliczeń fotonów w polu wyjściowym.

W ostatniej części pracy pokazano jak wykorzystać znajomość formuł dla wektorów warunkowych do rozwiązania problemu optymalnego wzbudzenia wnąki rezonansowej. W pracy wyznaczono profil czasowy fotonów, który zapewnia optymalne warunki transferu fotonów z pakietu falowego do wnąki rezonansowej.

Użyte w pracy [H7] oznaczenia różnią się nieco od oznaczeń z pracy [H5]. Przestrzeń Hilberta otoczenia jest taka sama jak w pracy [H5]. W pracy zdefiniowano operator kreacji pakietu falowego działający w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}^j$:

$$\hat{B}_{[j]}^{\dagger}[\xi] = \sum_{k=j}^{M-1} \sqrt{\tau} \xi_k \hat{b}_k^{\dagger}, \quad (274)$$

gdzie

$$\hat{b}_k^\dagger = \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{E}}^{k-1} \otimes \hat{b}_k^\dagger \otimes \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{E}}^{k+1}, \quad (275)$$

$\xi_k \in \mathbb{C}$ oraz $\sum_{k=0}^{M-1} \tau |\xi_k|^2 = 1$. Komutator operatora $\hat{B}_{[j]}^\dagger[\xi]$ z operatorem sprzężonym do niego hermitowsko, $\hat{B}_{[j]}[\xi]$, ma postać

$$[\hat{B}_{[j]}[\xi], \hat{B}_{[j]}^\dagger[\xi]] = \sum_{k=j}^{M-1} \tau |\xi_k|^2. \quad (276)$$

Używając operatora (274) wprowadzono wektory o ustalonej liczbie fotonów

$$|m_\xi\rangle_{[j]} = \frac{1}{\sqrt{m!}} \left(\hat{B}_{[j]}^\dagger[\xi] \right)^m |vac\rangle_{[j]}, \quad (277)$$

gdzie $|vac\rangle_{[j]} = |0\rangle_j \otimes |0\rangle_{j+1} \otimes \dots \otimes |0\rangle_{M-1}$ jest stanem próżni w $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}^{[j]}$ oraz $m = 0, 1, \dots$. Ściśnięty stan n -fotonowy w przestrzeni $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ zdefiniowano formułą

$$|n_{\gamma, \xi}\rangle = \hat{S}[\gamma, \xi] |n_\xi\rangle \quad (278)$$

z operatorem ściśnięcia

$$\hat{S}[\gamma, \xi] = \exp \left(\gamma \hat{B}^2[\xi] - \gamma^* \hat{B}^{\dagger 2}[\xi] \right), \quad (279)$$

gdzie $\gamma = \frac{r}{2} e^{-2i\phi}$. Średnia liczba fotonów w pakiecie falowym w ściśniętym stanie n -fotonowym ma postać

$$\langle n_{\gamma, \xi} | \hat{n} | n_{\gamma, \xi} \rangle = c^2 n + s^2 (n + 1), \quad (280)$$

gdzie $c = \cosh r$ and $s = \sinh r$. Zauważmy, że dowolny ściśnięty stan Focka $|n_{\gamma, \xi}\rangle$ może być rozłożony w bazie stanów stanów z ustaloną liczbą fotonów o profilu czasowym ξ ,

$$|n_{\gamma, \xi}\rangle = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m(n_\gamma) |m_\xi\rangle. \quad (281)$$

Założono, że stan początkowy układu złożonego $\mathcal{E} + \mathcal{S}$ ma postać

$$|\Psi_0\rangle = |n_{\gamma, \xi}\rangle \otimes |\psi_0\rangle, \quad (282)$$

gdzie $|\psi_0\rangle$ jest stanem początkowym układu \mathcal{S} .

Przyjęto, że po każdym oddziaływaniu wykonywany jest pomiar na elementach otoczenia. W pracy rozważono pomiar obserwabli otoczenia

$$\hat{n}_k = \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k = |n\rangle_k \langle n|_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (283)$$

Założono, że detektor działa bez strat i natychmiastowo. Wyniki pomiarów do chwili $j\tau$ są reprezentowane przez wektor stochastyczny $\boldsymbol{\eta}_j = (\eta_j, \eta_{j-1}, \dots, \eta_1)$.

Twierdzenie 11 *Stan a posteriori układu \mathcal{S} oraz części wejściowej otoczenia dla stanu początkowego (282) oraz pomiaru obserwabli (283) w chwili $j\tau$ ma postać*

$$|\tilde{\Psi}_{j|\boldsymbol{\eta}_j}^n\rangle = \frac{|\Psi_{j|\boldsymbol{\eta}_j}^n\rangle}{\sqrt{\langle \Psi_{j|\boldsymbol{\eta}_j}^n | \Psi_{j|\boldsymbol{\eta}_j}^n \rangle}}, \quad (284)$$

gdzie $|\Psi_{j|\mathbf{n}_j}^n\rangle$ jest wektorem nieunormowanym z przestrzeni $\mathcal{H}_\xi^{[j]} \otimes \mathcal{H}_S$ mającym postać

$$|\Psi_{j|\mathbf{n}_j}^n\rangle = \sum_{m=0}^{+\infty} |m_\xi\rangle_{[j]} \otimes |\psi_{j|\mathbf{n}_j}^n(m)\rangle, \quad (285)$$

gdzie $\{|\psi_{j|\mathbf{n}_j}^n(m)\rangle\}$, $m = 0, 1, \dots$ jest zbiorem wektorów warunkowych z przestrzeni \mathcal{H}_S , które spełniają układ sprzężonych równań rekurencyjnych

$$|\psi_{j+1|\mathbf{n}_{j+1}}^n(m)\rangle = \sum_{m'=0}^{+\infty} \sqrt{\binom{m+m'}{m'}} (\sqrt{\tau}\xi_j)^{m'} \hat{V}_{\eta_{j+1}m'} |\psi_{j|\mathbf{n}_j}^n(m+m')\rangle, \quad (286)$$

Operatory $\hat{V}_{\eta_{j+1}r} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ i w chwili początkowej

$$|\psi_{j=0}^n(m)\rangle = a_m(n_\gamma) |\psi_0\rangle. \quad (287)$$

Zauważmy, że nieskończony zbiór wektorów warunkowych $\{|\psi_{j|\mathbf{n}_j}^n(m)\rangle\}$ z $m = 0, 1, \dots$ zależy od stanu początkowego układu złożonego oraz wszystkich wyników pomiarów prowadzonych do chwili $j\tau$.

W pracy pokazano, że prawdopodobieństwo detekcji więcej niż jednego fotonu w przedziale $[k\tau, (k+1)\tau)$ jest wyrażeniem rzędu $\bar{O}(\tau^2)$. W granicy ciągłego czasu prawdopodobieństwo takiej detekcji zmierza do zera. Pominięcie w (286) wszystkich wyrażen rzędu większego niż jeden w τ oraz wyrażen związanych z procesami o prawdopodobieństwie $\bar{O}(\tau^2)$ prowadzi do układu stochastycznych równań różnicowych

$$|\psi_{j+1|\mathbf{n}_{j+1}}^n(m)\rangle = \hat{V}_{\eta_{j+1}0} |\psi_{j|\mathbf{n}_j}^n(m)\rangle + \sqrt{(m+1)\tau}\xi_j \hat{V}_{\eta_{j+1}1} |\psi_{j|\mathbf{n}_j}^n(m+1)\rangle \quad (288)$$

z operatorami określonymi przez (191). W pracy podano ogólne rozwiązanie tego układu równań.

Stan *a posteriori* układu \mathcal{S} w chwili $j\tau$ ma postać

$$\tilde{\rho}_{j|\mathbf{n}_j} = \frac{\rho_{j|\mathbf{n}_j}}{\text{Tr}_S \rho_{j|\mathbf{n}_j}}, \quad (289)$$

gdzie

$$\rho_{j|\mathbf{n}_j} = \sum_{m=0}^{+\infty} |\psi_{j|\mathbf{n}_j}^n(m)\rangle \langle \psi_{j|\mathbf{n}_j}^n(m)| \left(\sum_{k=j}^{M-1} \tau |\xi_k|^2 \right)^m. \quad (290)$$

W chwili początkowej $\rho_{j=0} = |\psi_0\rangle \langle \psi_0|$.

W pracy przedstawiono wyprowadzenie układu dyskretnych równań filtracji dla operatorów warunkowych.

Twierdzenie 12 *Ewolucja układu kwantowego oddziałującego z otoczeniem przygotowanym w stanie (278) warunkowana wynikami pomiaru obserwabli (283) dana jest poprzez nieskończony*

układ różnicowych równań stochastycznych postaci

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_{j+1}^{n',n''} &= \tilde{\rho}_j^{n',n''} + \mathcal{L}\tilde{\rho}_j^{n',n''} \tau + [\sqrt{n'}c\tilde{\rho}_j^{n'-1,n''} - \sqrt{n'+1}se^{2i\phi}\tilde{\rho}_j^{n'+1,n''}, \hat{L}^\dagger]\xi_j\tau \\
&+ [\hat{L}, \sqrt{n''}c\tilde{\rho}_j^{n',n''-1} - \sqrt{n''+1}se^{-2i\phi}\tilde{\rho}_j^{n',n''+1}]\xi_j^*\tau \\
&+ \left\{ \frac{1}{k_j} \left[\hat{L}\tilde{\rho}_j^{n',n''}\hat{L}^\dagger + \xi_j^*\hat{L} \left(\sqrt{n''}c\tilde{\rho}_j^{n',n''-1} - \sqrt{n''+1}se^{-2i\phi}\tilde{\rho}_j^{n',n''+1} \right) \right] \right. \\
&+ \xi_j \left(\sqrt{n'}c\tilde{\rho}_j^{n'-1,n''} - \sqrt{n'+1}se^{2i\phi}\tilde{\rho}_j^{n'+1,n''} \right) \hat{L}^\dagger \\
&+ |\xi_j|^2 \left(\sqrt{n'n''}c^2\tilde{\rho}_j^{n'-1,n''-1} + \sqrt{(n'+1)(n''+1)}s^2\tilde{\rho}_j^{n'+1,n''+1} \right) \\
&- |\xi_j|^2 cs\sqrt{n'(n''+1)}e^{-2i\phi}\tilde{\rho}_j^{n'-1,n''+1} \\
&\left. - |\xi_j|^2 cs\sqrt{(n'+1)n''}e^{2i\phi}\tilde{\rho}_j^{n'+1,n''-1} \right] - \tilde{\rho}_j^{n',n''} \left\} (\Delta N_j - k_j\tau), \tag{291}
\end{aligned}$$

gdzie

$$\mathcal{L}\tilde{\rho} = -i[\hat{H}_S, \tilde{\rho}] - \frac{1}{2} \left\{ \hat{L}^\dagger \hat{L}, \tilde{\rho} \right\} + \hat{L}\tilde{\rho}\hat{L}^\dagger \tag{292}$$

oraz

$$\begin{aligned}
k_j &= \text{Tr}_S \left\{ \hat{L}^\dagger \hat{L}\tilde{\rho}_j^{n,n} + \xi_j \hat{L}^\dagger \left(\sqrt{n}c\tilde{\rho}_j^{n-1,n} - \sqrt{n+1}se^{2i\phi}\tilde{\rho}_j^{n+1,n} \right) \right. \\
&+ \xi_j^* \hat{L} \left(\sqrt{n}c\tilde{\rho}_j^{n,n-1} - \sqrt{n+1}se^{-2i\phi}\tilde{\rho}_j^{n,n+1} \right) \\
&+ |\xi_j|^2 \left(nc^2\tilde{\rho}_j^{n-1,n-1} + (n+1)s^2\tilde{\rho}_j^{n+1,n+1} \right) \\
&\left. - |\xi_j|^2 \sqrt{n(n+1)}cs \left(e^{2i\phi}\tilde{\rho}_j^{n+1,n-1} + e^{2i\phi}\tilde{\rho}_j^{n-1,n+1} \right) \right\} \tag{293}
\end{aligned}$$

z warunkiem początkowych $\tilde{\rho}_{j=0}^{n',n''} = \delta_{n',n''} |\psi_0\rangle \langle \psi_0|$ dla $n', n'' \in \mathbb{N}$. Stan a posteriori układu \mathcal{S} w chwili $j\tau$ jest określony przez $\tilde{\rho}_j^{n,n}$. Dyskretny proces stochastyczny N_j jest scharakteryzowany przez prawdopodobieństwa warunkowe podane w pracy.

Wyznaczając średnią po wszystkich trajektoriach otrzymujemy z (291) dynamikę a priori układu \mathcal{S}

$$\sigma_j^{n,n} = \langle \tilde{\rho}_j^{n,n} \rangle_{st}. \tag{294}$$

Twierdzenie 13 *Ewolucja a priori układu kwantowego \mathcal{S} określona jest przez nieskończony układ różnicowych równań master postaci*

$$\begin{aligned}
\sigma_{j+1}^{n',n''} &= \sigma_j^{n',n''} + \mathcal{L}\sigma_j^{n',n''} \tau + [\sqrt{n'}c\sigma_j^{n'-1,n''} - \sqrt{n'+1}se^{2i\phi}\sigma_j^{n'+1,n''}, \hat{L}^\dagger]\xi_j\tau \\
&+ [\hat{L}, \sqrt{n''}c\sigma_j^{n',n''-1} - \sqrt{n''+1}se^{-2i\phi}\sigma_j^{n',n''+1}]\xi_j^*\tau, \tag{295}
\end{aligned}$$

gdzie

$$\sigma_j^{n',n''} = \langle \tilde{\rho}_j^{n',n''} \rangle_{st} \tag{296}$$

z warunkiem początkowym $\sigma_{j=0}^{n',n''} = \delta_{n',n''} |\psi_0\rangle \langle \psi_0|$ dla $n', n'' \in \mathbb{N}$.

W granicy $\tau \rightarrow 0$ oraz $M \rightarrow \infty$ takich, że $T = M\tau$ ma wartość ustaloną, otrzymujemy z (291) nieskończony układ sprzężonych różniczkowych równań stochastycznych postaci

$$\begin{aligned}
d\tilde{\rho}_t^{n',n''} &= \mathcal{L}\tilde{\rho}_t^{n',n''} dt + [\sqrt{n'}c\tilde{\rho}_t^{n'-1,n''} - \sqrt{n'+1}se^{2i\phi}\tilde{\rho}_t^{n'+1,n''}, \hat{L}^\dagger]\xi_t\tau \\
&+ [\hat{L}, \sqrt{n''}c\tilde{\rho}_t^{n',n''-1} - \sqrt{n''+1}se^{-2i\phi}\tilde{\rho}_t^{n',n''+1}]\xi_t^*\tau \\
&+ \left\{ \frac{1}{k_t} [\hat{L}\tilde{\rho}_t^{n',n''} \hat{L}^\dagger + \xi_t^* \hat{L} (\sqrt{n''}c\tilde{\rho}_t^{n',n''-1} - \sqrt{n''+1}se^{-2i\phi}\tilde{\rho}_t^{n',n''+1}) \right. \\
&+ \xi_t (\sqrt{n'}c\tilde{\rho}_t^{n'-1,n''} - \sqrt{n'+1}se^{2i\phi}\tilde{\rho}_t^{n'+1,n''}) \hat{L}^\dagger \\
&+ |\xi_t|^2 (\sqrt{n'n''}c^2\tilde{\rho}_t^{n'-1,n''-1} + \sqrt{(n'+1)(n''+1)}s^2\tilde{\rho}_t^{n'+1,n''+1}) \\
&- |\xi_t|^2 cs\sqrt{n'(n''+1)}e^{-2i\phi}\tilde{\rho}_t^{n'-1,n''+1} \\
&\left. - |\xi_t|^2 cs\sqrt{(n'+1)n''}e^{2i\phi}\tilde{\rho}_t^{n'+1,n''-1} \right\} (dN_t - k_t dt), \tag{297}
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
k_t &= \text{Tr}_S \left\{ \hat{L}^\dagger \hat{L} \tilde{\rho}_t^{n,n} + \xi_t^* \hat{L} (\sqrt{nc}\tilde{\rho}_t^{n,n-1} - \sqrt{n+1}se^{-2i\phi}\tilde{\rho}_t^{n,n+1}) \right. \\
&+ \xi_t \hat{L}^\dagger (\sqrt{nc}\tilde{\rho}_t^{n-1,n} - \sqrt{n+1}se^{2i\phi}\tilde{\rho}_t^{n+1,n}) \\
&+ |\xi_j|^2 (nc^2\tilde{\rho}_t^{n-1,n-1} + (n+1)s^2\tilde{\rho}_t^{n+1,n+1}) \\
&\left. - |\xi_t|^2 \sqrt{n(n+1)}cs (e^{2i\phi}\tilde{\rho}_t^{n+1,n-1} + e^{2i\phi}\tilde{\rho}_t^{n-1,n+1}) \right\} \tag{298}
\end{aligned}$$

z warunkiem początkowym postaci $\tilde{\rho}_{t=0}^{n',n''} = \delta_{n',n''} |\psi_0\rangle \langle \psi_0|$. Tutaj N_t jest procesem liczącym z przyrostem $dN_t = N_{t+dt} - N_t$ o warunkowej wartości oczekiwanej

$$\mathbb{E}[dN_t | \tilde{\rho}_t] = k_t dt. \tag{299}$$

Można sprawdzić, że $(dN_t)^2 = dN_t$. Zauważmy, że k_t określa intensywność procesu N_t oraz $k_t dt$ jest warunkową wartością oczekiwaną średniej liczby fotonów w przedziale od t do $t + dt$. Wyznaczając w ostatnim kroku granicę $T \rightarrow +\infty$, otrzymujemy amplitudę $\xi \in L^2([0, \infty))$ spełniającą warunek normalizacji postaci

$$\int_0^\infty |\xi_t|^2 dt = 1. \tag{300}$$

Zredukowana dynamika układu \mathcal{S} określona jest przez nieskończony układ równań różniczkowych

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sigma_t^{n',n''} &= \mathcal{L}\sigma_t^{n',n''} + [\sqrt{n'}c\sigma_t^{n'-1,n''} - \sqrt{n'+1}se^{2i\phi}\sigma_t^{n'+1,n''}, \hat{L}^\dagger]\xi_t \\
&+ [\hat{L}, \sqrt{n''}c\sigma_t^{n',n''-1} - \sqrt{n''+1}se^{-2i\phi}\sigma_t^{n',n''+1}]\xi_t^* \tag{301}
\end{aligned}$$

z warunkiem początkowym $\sigma_{t=0}^{n',n''} = \delta_{n',n''} |\psi_0\rangle \langle \psi_0|$. Stan *a priori* układu \mathcal{S} jest dany przez $\sigma_t = \sigma_t^{n,n}$.

Zauważmy, że wszystkie realizacje procesu stochastycznego N_t można podzielić na rozłączne zbiory \mathcal{C}_s zawierające trajektorie ze zliczeniem s fotonów w nienachodzących na siebie przedziałach czasu $[t_1, t_1 + dt_1)$, $[t_2, t_2 + dt_2)$, \dots , $[t_s, t_s + dt_s)$ zawierających się w przedziale od zera do t i takich, że $t_1 < t_2 < \dots < t_s$.

Stan *a priori* układu \mathcal{S} w chwili t można wyrazić w reprezentacji stochastycznej jako

$$\sigma_t = \rho_{t|0} + \sum_{s=1}^{+\infty} \int_0^t dt_s \int_0^{t_s} dt_{s-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \rho_{t|t_s, t_{s-1}, \dots, t_2, t_1}, \quad (302)$$

gdzie

$$\rho_{t|0} = \sum_{m=0}^{+\infty} u_t^m |\psi_{t|0}^n(m)\rangle \langle \psi_{t|0}^n(m)| \quad (303)$$

z $u_t = \int_t^{+\infty} dt' |\xi_{t'}|^2$ oraz

$$dt_s dt_{s-1} \dots dt_1 \rho_{t|t_s, t_{s-1}, \dots, t_2, t_1} = \sum_{m=0}^{+\infty} u_t^m |\psi_{t|t_s, t_{s-1}, \dots, t_2, t_1}^n(m)\rangle \langle \psi_{t|t_s, t_{s-1}, \dots, t_2, t_1}^n(m)|.$$

Sumowanie odbywa się tutaj po wszystkich możliwych ścieżkach zliczeń fotonów w przedziale czasu od 0 do t . Operatory pod całkami są interpretowane jako nieunormowane stany warunkowe układu \mathcal{S} powiązane z różnymi scenariuszami detekcji fotonów. Na przykład operator $\rho_{t|0}$ odpowiada sytuacji, gdy nie obserwujemy żadnych fotonów do chwili t , natomiast $\rho_{t|t_s, t_{s-1}, \dots, t_2, t_1}$ odnosi się do zaobserwowania s fotonów w chwilach $[t_1, t_1 + dt_1)$, $[t_2, t_2 + dt_2)$, \dots , $[t_s, t_s + dt_s)$, gdzie $t_1 < t_2 < \dots < t_s$ i żadnego innego fotonu w przedziale od zera do t .

Praca zawiera pełną charakterystykę wektorów warunkowych $\left\{ \left| \psi_{t|t_s, t_{s-1}, \dots, t_2, t_1}^n(m) \right\rangle \right\}$, $m = 0, 1, 2, \dots$ pozwalających wyznaczyć ewolucję układu. W pracy opisano ogólną strukturę formuł dla wektorów warunkowych dla dowolnego układu otwartego. Poza rozwiązaniem układu stochastycznych równań dla wektorów warunkowych, podana została także interpretacja fizyczna wyrażań, z których zbudowane są wektory warunkowe.

Poza wyznaczeniem ewolucji *a posteriori* i *a priori*, wektory warunkowe mogą posłużyć do określenia statystyki zliczeń fotonów w polu wyjściowym. Prawdopodobieństwo tego, że nie zaobserwujemy żadnego fotonu do chwili t wyrazić można jako

$$P_0^t(0) = \sum_{m=0}^{+\infty} \langle \psi_{t|0}^n(m) | \psi_{t|0}^n(m) \rangle u_t^m. \quad (304)$$

Wykluczająca gęstość prawdopodobieństwa $p_0^t(t_s, t_{s-1}, \dots, t_2, t_1)$ dla trajektorii odpowiadającej s detekcjom w przedziale od 0 do t w przedziałach $[t_1, t_1 + dt_1)$, $[t_2, t_2 + dt_2)$, \dots , $[t_s, t_s + dt_s)$, gdzie $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_s$, jest dana przez

$$p_0^t(t_s, t_{s-1}, \dots, t_2, t_1) dt_s dt_{s-1} \dots dt_1 = \sum_{m=0}^{+\infty} \langle \psi_{t|t_s, t_{s-1}, \dots, t_2, t_1}^n(m) | \psi_{t|t_s, t_{s-1}, \dots, t_2, t_1}^n(m) \rangle u_t^m. \quad (305)$$

Stąd prawdopodobieństwo detekcji s fotonów do chwili t jest równe

$$P_0^t(s) = \int_0^t dt_s \int_0^{t_s} dt_{s-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 p_0^t(t_s, t_{s-1}, \dots, t_2, t_1). \quad (306)$$

Jako przykład układu wzbudzanego przez pole w ściśniętym stanie Focka rozważono w pracy pole elektromagnetyczne we wnęce rezonansowej. W tym przypadku hamiltonian układu ma postać

$$\hat{H}_S = \Delta \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (307)$$

gdzie $\Delta = \omega_0 - \omega_c$, przy czym ω_0 jest częstotliwością wnęki, a ω_c oznacza częstotliwość centralną pakietu falowego. Operator sprzężenia określony jest jako

$$\hat{L} = \sqrt{\Gamma} \hat{a}, \quad (308)$$

gdzie Γ jest dodatnią stałą sprzężenia układu z polem. Założono, że pole wnęki w chwili początkowej znajduje się w stanie próżni.

W publikacji, odwołując się do wektorów warunkowych, wyznaczono prawdopodobieństwo tego, że średnia liczba fotonów we wnęce będzie równa $c^2n + s^2(n+1)$ w chwili t ,

$$P_{n_\gamma, \xi}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Gamma^k k! e^{-k\Gamma t} \left| \int_{t_0}^t ds \xi_s e^{(i\Delta + \frac{\Gamma}{2})s} \right|^{2k} |a_k(n_\gamma)|^2. \quad (309)$$

Korzystając w tej formuły określono warunki optymalnego wzbudzenia wnęki. Wynik podsumowuje twierdzenie.

Twierdzenie 14 *Maksymalne prawdopodobieństwo „przeniesienia” fotonów pakietu falowego w stanie $|n_\gamma, \xi\rangle$ do wnęki rezonansowej przygotowanej w stanie próżni dla $t > t_0$ wynosi*

$$P_{n_\gamma, \xi}^{\max}(t) := \max_{\xi} P_{n_\gamma, \xi}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\Gamma t} (e^{\Gamma t} - e^{\Gamma t_0})^k |a_k(n_\gamma)|^2, \quad (310)$$

i jest realizowane w rezonansie ($\Delta = 0$) przez impuls z fotonami o profilu czasowym

$$\xi_s = \sqrt{\frac{\Gamma}{e^{\Gamma t} - e^{\Gamma t_0}}} e^{\frac{\Gamma}{2}s} \quad (311)$$

dla $s \in [t_0, t]$ oraz $\xi_s = 0$ poza tym przedziałem.

Stąd możemy wyciągnąć wniosek, że dla ściśniętego stanu Focka z fotonami o rosnącym profilu czasowym w przedziale $(-\infty, t]$ otrzymujemy $P_{n_\gamma, \xi}(t) = 1$. Otrzymana formuła jest, w pewnym sensie, uogólnieniem wyniku dla optymalnego wzbudzenia atomu dwupoziomowego impulsem jednofotonowym [106].

4.3 Inne osiągnięcia

W pracach [P4, P5] rozważana jest stochastyczna ewolucja układu otwartego w reżimie Markowa. Prace [P4, P5] dotyczą filtracji kwantowej z wykorzystaniem światła w stanie ściśniętym. Numeracja jest zgodna z załączonym Wykazem osiągnięć naukowych albo artystycznych, stanowiących znaczny wkład w rozwój określonej dyscypliny.

Praca [P4] **Anita Dąbrowska**, John Gough. Belavkin filtering with squeezed light sources. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 23(2), 172-184, 2016.

Streszczenie:

W pracy przedstawiono problem kwantowej filtracji z wykorzystaniem pola bozonowego w stanie ściśniętym. Należy zaznaczyć, że dla pola w takim stanie nie można zdefiniować procesu liczącego. Obliczenia w tym przypadku wykonujemy w reprezentacji Araki-Woodsa.

Praca zawiera wyprowadzenia dwóch równań filtracji. W pierwszej części pracy rozważono sytuację, gdy oddziałujące z układem otwartym pole bozonowe jest przygotowane w stanie koherentnym. Założono, że pole wyjściowe jest kierowane na płytkę światłodziącą. Na drugim wejściu płytki mamy pole w stanie ściśniętym. W pracy wyznaczono równanie filtracji dla stanu *a posteriori* zależnego od wyników jednoczesnego nieidealnego pomiaru dwóch kwadratur optycznych pola. Otrzymano zatem równanie stochastyczne z dwuwymiarowym procesem dyfuzji.

W drugiej części pracy wyznaczono równanie stochastyczne dla otwartego układu kwantowego, gdy pole wejściowe znajduje się w stanie ściśniętym, a ewolucja układu warunkowana jest pomiarem kwadratury optycznej pola wyjściowego. Jako przykład, w pracy rozważono sytuację, gdy układem kwantowym oddziałującym z otoczeniem jest pole we wnęce rezonansowej. Pokazano, że w tym przypadku ewolucja stochastyczna zachowuje stan gaussowski.

Mój udział w pracy.

- Uczestniczyłam w pracy nad rozwiązywaniem równań stochastycznych.
- Uczestniczyłam w przygotowaniu manuskryptu.

Praca [P5] **Anita Dąbrowska**, John Gough. Quantum trajectories for squeezed input processes: explicit solutions. *Open Systems & Information Dynamics*, 23(1), 1650004-1-1650004-16, 2016.

Streszczenie:

Praca zawiera szczegółową dyskusję na temat rozwiązania dwóch równań filtracji. W pracy rozważano ewolucję warunkową układu otwartego, gdy pole wejściowe jest przygotowane w stanie gaussowskim. Może to być stan próżni, stan koherentny, stan termiczny lub stan ściśnięty. Zakładamy, że pole bozonowe oddziałuje z polem we wnęce rezonansowej (oscylatorem harmonicznym).

W pierwszej części pracy opisano ewolucję oscylatora harmonicznego zależną od wyników obserwacji homodynowej. Założono, że w chwili początkowej oscylator harmoniczny znajduje się w stanie gaussowskim. Pokazano, że stan *a posteriori* będzie w tym przypadku także stanem gaussowskim. W pracy wyznaczono równania różniczkowe dla trzech współczynników definiujących stan warunkowy układu. Pokazano, że tylko jeden z tych współczynników zależy od wyników ciągłej obserwacji pola. Dwa pozostałe współczynniki spełniają niejednorodne macierzowe równanie różniczkowe Riccattiego. W pracy podano rozwiązanie tego równania. Otrzymane formuły pozwoliły określić w jaki sposób zależą od czasu wariancje kwadratur optycznych pola we wnęce. W pracy podano także warunek, gdy równanie filtracji zachowuje stan czysty układu otwartego. Wyniki otrzymane dla ewolucji stochastycznej porównano z rozwiązaniem równania master.

Druga część pracy zawiera dyskusję ewolucji stochastycznej dla podwójnej obserwacji homodynowej, czyli jednoczesnego nieidealnego pomiaru dwóch kwadratur optycznych pola. Założono tutaj, że pole wyjściowe mieszane jest z innym polem bozonowym przygotowanym w stanie ściśniętym. Także w tym przypadku stan gaussowski układu jest zachowany. Dla dwóch współczynników określających stan *a posteriori* wyznaczono jednorodne macierzowe równanie różniczkowe Riccattiego. Praca zawiera uogólnienie wyników pracy [P7].

Mój udział w pracy.

- Uczestniczyłam w pracy nad rozwiązywaniem równań stochastycznych.
- Uczestniczyłam w przygotowaniu manuskryptu.

W powyższej pracy byłam autorem korespondencyjnym.

5 Pozostałe osiągnięcia po doktoracie

Omówienie wyników prac [P1-P3] oraz [P6-P8]

W pracach [P4-P8] rozważana była stochastyczna ewolucja układu otwartego w reżimie Markowa. Otoczenie, pełniące rolę narzędzia mierzącego, znajdowało się w stanie próżni [P8] oraz koherentnym [P6, P7]. Prace omówiono w kolejności od najstarszej do najnowszej.

Praca [P8]: **Anita Dąbrowska**, Przemysław Staszewski. Filtering equation for measurement of a coherent channel. *Journal of the Optical Society of America B*, 28(5), 1238-1244, 2011.

Streszczenie:

W pracy przedstawiono wyprowadzenie równań filtracji dla ciągłej obserwacji pola wyjściowego w przypadku detekcji liczącej oraz heterodynowej dla otoczenia zdefiniowanego jako jednokierunkowe pole elektromagnetyczne przygotowane w stanie koherentnym. Przedstawione wyprowadzenie oparte zostało o kwantowy rachunek stochastyczny Itô. Na początku rozważań zdefiniowano odwzorowanie tworzące dla stochastycznego procesu liczącego powiązanego z bezpośrednim zliczaniem fotonów pola wyjściowego. Następnie wyznaczono równanie różniczkowe dla odwzorowania tworzącego oraz przedstawiono jego rozwiązanie. Podane rozwiązanie, mające postać szeregu von Neumanna-Dysona, pozwoliło określić formułę dla stochastycznego operatora propagacji powiązanego z procesem liczącym. Korzystając z tej formuły otrzymano równanie dla stochastycznego wektora stanu dla układu otwartego dla obserwacji zliczającej fotony pola wyjściowego. W podobny sposób wyprowadzono równanie filtracji dla obserwacji heterodynowej. W tym przypadku założono, że pole wyjściowe trafia na płytkę światłodziącą, na której drugim wejściu jest pole w stanie koherentnym. W pierwszej kolejności otrzymano równanie filtracji dla procesu liczącego, aby ostatecznie przejść do granicy obserwacji dyfuzyjnej. W pracy wykazano także, że oba otrzymane równania filtracji zachowują czystość stanu układu otwartego. W pracy podano zarówno liniowe jak i nieliniowe wersje równań filtracji.

W literaturze pojawiła się wcześniej praca [102], w której wyznaczono równanie filtracji dla pola w stanie koherentnym, ale użyto w niej innej metody niż w pracach [P6] i [P8]. Równania filtracji wyznaczone w znanej pracy [5] odpowiadają sytuacji, gdy pole wejściowe znajduje się w stanie próżni. W pracach [17, 103, 104] można znaleźć opis statystyk pola wyjściowego dla pola wejściowego w stanie koherentnym, ale nie wyznaczono tam równania filtracji dla obserwacji w kierunku pola przygotowanego w stanie koherentnym.

Mój udział w pracy.

- Zdefiniowanie problemu.
- Wyznaczenie równań filtracji.
- Przygotowanie manuskryptu.

W powyższej pracy byłam autorem korespondencyjnym.

Praca [P7]: **Anita Dąbrowska**, Przemysław Staszewski. Squeezed coherent state undergoing a continuous nondemolition observation. *Physics Letters A*, 375(45), 3950-3955. 2011.

Streszczenie:

W pracy rozważana jest ewolucja stochastyczna pola elektromagnetycznego we wnęce rezonansowej (oscylatora harmonicznego) zależna od wyników ciągłego w czasie pomiaru pola wyjściowego dla dwóch typów obserwacji: pojedynczej oraz podwójnej obserwacji heterodynowej. Pole wejściowe znajduje się w stanie próżni. W chwili początkowej oscylator harmoniczny znajduje się w ściśniętym stanie koherentnym [105]. W pracy udowodniono, że w tym przypadku stan *a posteriori*, czyli stan układu zależny od wyników pomiaru, pozostaje ściśniętym stanem koherentnym. Wyprowadzono równania różniczkowe dla współczynników definiujących warunkowo ściśnięty stan koherentny. W pracy pokazano, że parametr określający ściśnięcie stanu spełnia równanie różniczkowe Riccatiego. Parametr ten maleje z czasem, a układ zmierza do stanu próżni. Wykazano, że warunkowe wartości średnie kwadratur optycznych oscylatora zależą od wyników pomiaru podczas, gdy ich wariancje są określone w sposób deterministyczny. Warto zaznaczyć, że w tym przypadku równanie master nie zachowuje ściśniętego stanu koherentnego.

Mój udział w pracy.

- Zdefiniowanie problemu.
- Wyznaczenie rozwiązań.
- Przygotowanie manuskryptu.

W powyższej pracy byłam autorem korespondencyjnym.

Praca [P6] **Anita Dąbrowska**, Przemysław Staszewski. Posterior quantum dynamics for a continuous diffusion observation of a coherent channel. *Journal of the Optical Society of America B*, 29(11), 3072-3077, 2012.

Streszczenie:

Praca zawiera wyprowadzenie liniowego oraz nieliniowego równania filtracji dla przypadku, gdy otoczenie kwantowego układu otwartego jest polem elektromagnetycznym przygotowanym w stanie koherentnym. W pracy wyznaczono ewolucję zależną od wyników zrównoważonej obserwacji heterodynowej [93, 94]. Inaczej niż w pracy [P8], tutaj równanie filtracji dla procesu dyfuzji nie jest otrzymywane poprzez wzięcie granicy z równania filtracji dla procesu liczącego. W pracy wyprowadzono równanie różniczkowe dla odwzorowania generującego zdefiniowanego

dla obserwacji kwadratury pola wyjściowego. Korzystając z tego równania otrzymano równanie stochastyczne dla operatora propagacji, a w dalszej części dla stochastycznego wektora stanu.

Jako przykład, rozważono sytuację, w której układem otwartym jest pole we wnęce rezonansowej (oscylator harmoniczny) przygotowane w chwili początkowej w ściśniętym stanie koherentnym. Pokazano, że ewolucja stochastyczna zachowuje ściśnięty stan koherentny. Dowolny początkowy stan koherentny staje się ściśniętym stanem koherentnym, którego parametry zależną od wyników ciągłej w czasie obserwacji pola. Parametr ściśnięcia maleje z czasem do zera, a układ zmierza do stanu koherentnego o amplitudzie niezależnej od stanu początkowego. Wyniki są uogólnieniem wyników z prac [P7] oraz [P8].

Mój udział w pracy.

- Zdefiniowanie problemu.
- Wyznaczenie równania filtracji.
- Wyznaczenie przykładowego rozwiązania równania filtracji.
- Przygotowanie manuskryptu.

W powyższej pracy byłam autorem korespondencyjnym.

Praca [P3] **Anita Dąbrowska**. Quantum filtering equation for system driven by field in a mixture of vacuum and coherent state. *Acta Physica Polonica A*, 132(1), 112-114, 2017.

Streszczenie:

Praca zawiera dyskusję na temat estymacji optymalnej stanu układu kwantowego, oddziałującego z jednokierunkowym polem bozonowym w stanie mieszanym próżni i stanu koherentnego. Rozważana jest tutaj ewolucja układu otwartego warunkowana wynikami ciągłej w czasie obserwacji kwadratury optycznej pola wyjściowego. W tym przypadku zamiast jednego równania stochastycznego, jak to było dla pola wejściowego w stanie gaussowskim, otrzymałam układ dwóch równań różniczkowych. Do wyznaczenia równań stochastycznych użyto w pracy metody opartej o połączone kaskadowo otwarte układy kwantowe. Układ pomocniczy wybrano w taki sposób, aby pole bozonowe, przygotowane w stanie próżni, po oddziaływaniu z układem pomocniczym było w stanie mieszaniny stanów próżni i koherentnego. Takie pole wyjściowe oddziałuje następnie z zasadniczym układem kwantowym. W pracy wyznaczono najpierw równanie filtracji dla układu złożonego z układów pomocniczego oraz zasadniczego. Następnie otrzymano szukane równania filtracji biorąc odpowiedni ślad częściowy, czyli eliminując z opisu stopnie swobody związane z układem pomocniczym.

Praca [P2] **Anita Dąbrowska**. Quantum filtering equations for system driven by non-classical fields. *Open Systems & Information Dynamics*, 25(2), 1850007-1-1850007-23, 2018.

Streszczenie:

Praca zawiera analizę zachowania otwartego układu kwantowego oddziałującego z jednokierunkowym polem bozonowym przygotowanym w stanie superpozycji próżni i stanu jednofotonowego. W tej pracy, aby wyznaczyć ewolucję stochastyczną układu kwantowego użyto metody

opartej o kaskadowe układy otwarte. Oznacza to, że rozszerzono przestrzeń Hilberta układu zasadniczego o przestrzeń układu pomocniczego, który wraz w polem wejściowym pełni rolę generatora pola bozonowego w wybranym stanie. Układ kwantowy połączony jest kaskadowo z układem pomocniczym w taki sposób, że pole bozonowe po oddziaływaniu z układem pomocniczym staje się polem wejściowym układu zasadniczego. Założono, że pole przed oddziaływaniem z układem pomocniczym jest w stanie próżni. W pracy wyznaczono najpierw równanie filtracji dla układu złożonego z układów pomocniczego oraz zasadniczego. W następnym kroku, poprzez eliminację stopni swobody związanych z układem pomocniczym, otrzymano szukane równania filtracji. W pracy wyznaczono równania filtracji odpowiadające dwóm typom pomiarów pola wyjściowego: obserwacji zliczającej oraz obserwacji kwadratury optycznej. W obu przypadkach ewolucja stochastyczna dana poprzez układ czterech sprzężonych ze sobą równań różniczkowych.

W pracy podano także formuły na bezwarunkowe oraz warunkowe wartości średnie przyrostów procesów stochastycznych: Λ_t^{out} oraz $B_t^{out} + B_t^{out\dagger}$. Praca nie ogranicza się tylko do opisu ewolucji stochastycznej układu. Można w niej również znaleźć opis statystyki fotonów po oddziaływaniu z układem. Podano tu ogólny przepis na prawdopodobieństwo braku zliczenia fotonów w przedziale czasu od 0 do t , a także formułę na gęstość prawdopodobieństwa zliczenia n fotonów w chwilach t_1, t_2, \dots, t_n takich, że $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$ i żadnego innego zliczenia w tym przedziale.

Jako przykład układu oddziałującego z polem bozonowym w stanie superpozycji stanów próżni i jednofotonowego rozważono atom dwupoziomowy. Założono, że operator sprzężenia ma postać $L = \sqrt{\kappa}\sigma_-$, gdzie σ_- jest operatorem obniżającym i $\kappa > 0$. Przyjęto, że część jednofotonowa ma amplitudę gaussowską. W pracy pokazano jak w tym przypadku zmienia się w czasie prawdopodobieństwo przebywania atomu w stanie wzbudzonym oraz prawdopodobieństwo braku zliczenia do danego momentu. Praca [P2] zawiera także opis ewolucji stochastycznej układu oddziałującego z polem bozonowym w stanie mieszaniny stanów koherentnych. Otrzymane w pracy wyniki są poprawne, ale wspomnianą mieszaninę uznaje się za stan klasyczny, a nie za stan nieklasyczny.

Praca [P1] **Anita Dąbrowska**, Sylwia M. Kolenderska, Jakub Szlachetka, Karolina Słowik, Piotr Kolenderski. Quantum-inspired optical coherence tomography using classical light in a single-photon counting regime. *Optics Letters*, 49(2), 363-366, (2024).

Streszczenie:

Niniejsza praca poświęcona jest kwantowej optycznej tomografii koherentnej (Q-OCT, od ang. quantum optical coherence tomography), która ma wiele zalet w porównaniu ze swoim klasycznym odpowiednikiem, optyczną tomografią koherentną (OCT, od ang. optical coherence tomography). W szczególności zapewnia zwiększoną rozdzielczość osiową i jest odporna na nawet dwa rzędy dyspersji. Istotą Q-OCT jest interferencja kwantowa ujemnie skorelowanych splątanych par fotonów, które w obrazie Fouriera obserwuje się za pomocą pomiaru widma wspólnego. W tym artykule zbadano zastosowanie podejścia spektralnego w nowatorskim podejściu, w którym zamiast splątanych fotonów wykorzystuje się klasyczne impulsy świetlne. Intensywność użytych impulsów świetlnych została zredukowana do poziomu pojedynczego fotonu. W artykule przedstawiono analizę teoretyczną wraz z jej weryfikacją eksperymentalną, która wy-

kazała, że chociaż takie klasyczne światło jest znacznie łatwiejsze do wprowadzenia do układu eksperymentalnego, oferuje ono ograniczone korzyści w porównaniu z Q-OCT opartą na świetle splątanych. W artykule dokonano analizy różnic w charakterystyce widma wspólnego otrzymanego dla splątanych fotonów i klasycznych impulsów optycznych.

Mój udział w pracy.

- Wykonanie analizy teoretycznej problemu.
- Przygotowanie suplementu.
- Udział w przygotowaniu manuskryptu.

Udział w publikacjach [P9-P22] oraz [R1-R5]

Część mojej aktywności naukowej po uzyskaniu stopnia doktora dotyczyła zastosowania metod statystycznych w badaniach naukowych. Po uzyskaniu stopnia doktora brałam udział w wielu projektach badawczych realizowanych w pięciu katedrach działających w Collegium Medicum UMK. Uczestniczyłam w procesach analizowania i interpretowania wyników badań a także projektowania eksperymentów badawczych. Część tych projektów była realizowana we współpracy z innymi ośrodkami badawczymi w kraju i za granicą.

Mój udział w projektach polegał na doborze odpowiedniego modelu statystycznego reprezentującego badane procesy i zjawiska, wykonaniu analizy statystycznej i zinterpretowaniu jej wyników. Celem moich badań było określenie struktury analizowanych danych oraz wyznaczenie istotnych zależności między badanymi zmiennymi. W swojej pracy wykorzystywałam metody analiz wielowymiarowych. Szczególnie ważny w prowadzonych przeze mnie badaniach okazał się problem adjustacji porównań, który polega na ideantyfikacji i uwzględnienia wpływu na badane zmienne potencjalnych czynników zakłócających (ang. confounding factors). Dopiero uwzględnienie wpływu tych zmiennych umożliwia poprawną interpretację wyników i pozwala uniknąć przedstawiania fałszywych wniosków wynikających z wpływu czynników zakłócających. Otrzymane modele przyczyniły się do lepszego zrozumienia badanych zjawisk, są wykorzystywane do podejmowania decyzji diagnostycznych i terapeutycznych, prognozowania przyszłych wyników oraz identyfikowania potencjalnych problemów w czasie terapii.

W roku 2010 rozpoczęłam współpracę z dr hab. Grzegorzem Przybylskim, kierownikiem Katedry Chorób Płuc, Nowotworów i Gruźlicy Wydziału Lekarskiego Collegium Medicum UMK. Najstarsze prace, które powstały we współpracy z dr hab. Grzegorzem Przybylskim, [P22, R3, R4], dotyczą wpływu środowiskowych czynników ryzyka na rozwój alergii, oceny poziomu wiedzy na temat astmy wśród osób z astmą i związku między wiedzą na temat choroby a jakością życia przewlekle chorych pacjentów. Cztery kolejne prace [P18, P19, P21, R2] powstały na podstawie retrospektywnego badania dotyczącego ponad 2000 pacjentów leczonych na gruźlicę w Kujawsko-Pomorskim Centrum Pulmonologii w Bydgoszczy w okresie od 2001 do 2010 roku. W pracach [P18, P19, R2] przeanalizowano rolę czynników społecznych i demograficznych w zachorowalności na gruźlicę oraz zbadano wpływ tych czynników na przebieg leczenia gruźlicy. W [P21] analizie poddano palenie tytoniu wśród chorych na gruźlicę. W pracy [R1] przedstawiono związek

między wybranymi elementami prozdrowotnego stylu życia a jakością życia oraz kontrolą astmy u osób chorych na astmę oskrzelową. Prace [P10, P11, P14] dotyczą oceny poziomu wybranych parametrów zapalnych i immunologicznych, w tym białka C-reaktywnego (CRP) i krążących kompleksów immunologicznych (CIC) oraz wskaźnika CRP/CIC, u osób z obturacyjnymi chorobami płuc oraz osób leczonych z powodu raka płuc. Wyniki wspólnej pracy były prezentowane podczas trzech międzynarodowych konferencji organizowanych przez the European Respiratory Society.

W wyniku współpracy z dr hab. Magdaleną Pasińską z Katedry Genetyki Klinicznej Wydziału Lekarskiego Collegium Medicum UMK powstały 3 publikacje [P12, P20, R5]. Prace te dotyczą genetycznych przyczyn niepowodzeń ciąży oraz wpływu czynników środowiskowych na dobrostan płodu i noworodka. Wyniki współpracy były prezentowane między innymi podczas Zjazdu Polskiego Towarzystwa Genetyki Człowieka w Bydgoszczy w 2014 roku.

W latach 2015 - 2019 brałam udział w pracach zespołu naukowo-badawczego prowadzonego przez prof. dr hab. Jacka Kubicę kierującego Katedrą Kardiologii i Chorób Wewnętrznych Wydziału Lekarskiego Collegium Medicum UMK. Byłam członkiem interdyscyplinarnego międzynarodowego zespołu, który zrealizował randomizowane badanie „IMPRESSION”. Celem tego badania była ocena wpływu morfiny na farmakokinetykę i farmakodynamikę tikagreloru, leku hamującego agregację płytek krwi, u pacjentów z zawałem serca. Wspomniane badanie wykazało istnienie negatywnych interakcji między tikagrelorem i morfiną, podstawowymi lekami stosowanymi w leczeniu pacjentów z zawałem serca. Potwierdziło ono, że morfina osłabia i opóźnia działanie tikagreloru. W oparciu o wyniki badania „IMPRESSION”, Europejskie Towarzystwo Kardiologiczne w 2017 roku zmieniło zalecenia dotyczące stosowania morfiny u pacjentów z zawałem mięśnia sercowego. Jestem współautorem przeglądowego artykułu na temat wpływu morfiny na opóźnienie i osłabienie działania doustnych inhibitorów receptora P2Y₁₂ u pacjentów z zawałem mięśnia sercowego [P16].

Wzięłam także udział w wielośrodkowym projekcie „UNICORN”, który dotyczył porównania wyników pomiarów temperatury w przelyku i pęcherzu moczowym u pacjentów przebywających w śpiączce po zatrzymaniu krążenia, którzy zostali poddani łagodnej hipotermii terapeutycznej. W wyniku współpracy powstały prace [P15, P9].

Brałam także udział w pracach zespołu prof. dr hab. Michała Marszałła, kierującego Katedrą Chemii Leków Collegium Medicum UMK. Badania prowadzone przez ten zespół dotyczyły poszukiwania nowych biomarkerów zmian nowotworowych gruczołu prostaty. Była to część projektu prowadzonego z ośrodkami zagranicznymi. W wyniku tej współpracy powstała praca [P13].

Publikacja [P17] powstała we współpracy z dr hab. Dariuszem Nowakiem i dotyczyła wyników pilotażowego badania nad wpływem spożycia soku z aronii na profil lipidowy i funkcję śródbłoka u osób zdrowych.

6 Aktualne badania

- Pracuję nad rozwijaniem metod stochastycznych do analizy oddziaływania układów kwantowych z polem w stanach nieklasycznych. W pracach [H5, H7] rozważałam jednokierunkowe pole ciągłomodowe z nieskorelowanymi fotonami, które mają takie same profile

czasowe. Otrzymane wyniki uogólniłam do stanów dwufotonowych typu

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \phi(t_1)\xi(t_2)dB^\dagger(t_1)dB^\dagger(t_2)|vac\rangle, \quad (312)$$

gdzie $N = 1 + |\langle \xi | \phi \rangle|^2$ oraz

$$\langle \xi | \phi \rangle = \int_0^{+\infty} dt \xi(t)^* \phi(t), \quad \int_0^{+\infty} dt |\xi(t)|^2 = \int_0^{+\infty} dt |\phi(t)|^2 = 1, \quad (313)$$

W następnym kroku rozważyłam dowolny czysty stan dwufotonowy postaci

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \Phi(t_2, t_1) dB^\dagger(t_2) dB^\dagger(t_1) |vac\rangle \quad (314)$$

z amplitudą $\Phi(t_2, t_1)$, która w ogólności może definiować pole z fotonami skorelowanymi w czasie. Otrzymałam ponadto wyniki dla pola dwukierunkowego w stanie dwufotonowym

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \phi(t_1)\xi(t_2)dB_2^\dagger(t_2)dB_1^\dagger(t_1)|vac, vac\rangle \quad (315)$$

z operatorami pola spełniającymi relacje komutacji

$$[B_i(t), B_j(t')] = [B_i^\dagger(t), B_j^\dagger(t')] = 0, \quad [B_i(t), B_j^\dagger(t')] = \delta_{ij} t \wedge t', \quad (316)$$

gdzie $t \wedge t' = \min(t, t')$. Korzystając z trajektorii kwantowych dla pola wejściowego w stanie (315) otrzymałam wyniki dla stanu

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \Phi(t_2, t_1) dB_2^\dagger(t_2) dB_1^\dagger(t_1) |vac, vac\rangle, \quad (317)$$

który w ogólności może być stanem splątany dwóch fotonów. Dla podanych stanów pola wyznaczyłam równania stochastyczne dla wektorów warunkowych powiązanych z procesami zliczającymi, odpowiednio jedno- i dwuwymiarowym. Wyniki te zostały opublikowane w pracy arXiv:2409.07428. Praca jest w trakcie recenzji. Współautorem pracy jest dr hab. Gniewomir Sarbicki. W pracy wyprowadzono wzory dla absorpcji dwufotonowej dla atomu trójpoziomowego wzbudzanego światłem w stanie dwufotonowym. Przedstawiono także formuły dla stanów optymalnie wzbudzających układ atomowy. Część wyników była prezentowana w tym roku podczas dwóch konferencji naukowych. Dr hab. Gniewomir Sarbicki uczestniczył w pracy nad wyznaczaniem stanów dwufotonowych optymalnie wzbudzających atom trójpoziomowy.

Anita Dąbrowska, Gniewomir Sarbicki. Quantum trajectories and output field properties for systems driven by two-photon input field, arXiv:2409.07428

- Wraz z dr hab. Karoliną Słowik, dr hab. Gniewomirem Sarbickim oraz mgr Masoodem Valipourem z UMK prowadzę badania dotyczące optymalnego wzbudzenia atomów wielopoziomowych za pomocą pakietów falowych o ustalonej liczbie fotonów. Opis teoretyczny wzbudzenia atomu dwupoziomowego przez pakiet falowy w stanie jednofotonowym oraz N -fotonowym znaleźć można, na przykład, w pracach [44, 45, 47, 95, 106]. Maksymalna wartość prawdopodobieństwa wzbudzenia atomu zależy nie tylko od typu stanu światła, ale

także od kształtu profilu czasowego. Optymalnym wyborem dla atomu dwupoziomowego jest stan jednofotonowy o profilu wykładniczym rosnącym w czasie. W przypadku atomów wielopoziomowych optymalizacja wzbudzenia jest zależna od większej liczby parametrów i przez to bardziej skomplikowana. W pracy rozwijamy wyniki modelu teoretycznego opartego o przybliżenie Wignera-Weisskopfa opublikowane w arXiv:2409.07428. Badamy wpływ splątania czasowego fotonów na prawdopodobieństwo wzbudzenia atomu trójpoziomowego. W przygotowaniu są dwie publikacje. Część otrzymanych wyników była już prezentowana w tym roku podczas czterech konferencji naukowych.

Dostępny jest preprint: Masood Valipour, Gniewomir Sarbicki, Karolina Słowik, **Anita Dąbrowska**. Optimization of two-photon absorption for three-level atom. arXiv:2411.13274

- Kontynuuję współpracę z dr hab. Piotrem Kolenderskim z UMK. Współpraca dotyczy tematu optycznej tomografii koherencyjnej (OCT od ang. optical coherence tomography) i jej kwantowej wersji (Q-OCT). W eksperymentach przeprowadzanych pod kierunkiem dr hab. Kolenderskiego, w Q-OCT do obrazowania obiektów wykorzystywane jest światło w stanach nieklasycznych ze splątanymi czasowo fotonami. Wyniki dla światła nieklasycznego są testowane i porównywane z wynikami otrzymanymi tradycyjnymi metodami OCT. Mój wkład polega na opracowaniu teoretycznych podstaw testowanych metod.

7 Bibliografia

Artykuły habilitantki po doktoracie niewymienione w punkcie 4.1

Oznaczenia:

P oznacza publikacje, która ukazały się w czasopiśmie naukowym.

R oznacza rozdziały z książek naukowych.

A oznacza preprinty, które ukazały się w archiwum ArXiv.

[P1] **Anita Dąbrowska**, Sylwia M. Kolenderska, Jakub Szlachetka, Karolina Słowik, Piotr Kolenderski. Quantum-inspired optical coherence tomography using classical light in a single-photon counting regime. *Optics Letters*, 49(2), 363-366, (2024).

[P2] **Anita Dąbrowska**. Quantum filtering equations for system driven by non-classical fields. *Open Systems & Information Dynamics*, 25(2), 1850007-1-1850007-23, 2018.

[P3] **Anita Dąbrowska**. Quantum filtering equation for system driven by field in a mixture of vacuum and coherent state. *Acta Physica Polonica A*, 132(1), 112-114, 2017.

[P4] **Anita Dąbrowska**, John Gough. Belavkin filtering with squeezed light sources. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 23(2), 172-184, 2016.

[P5] **Anita Dąbrowska**, John Gough. Quantum trajectories for squeezed input processes: explicit solutions. *Open Systems & Information Dynamics*, 23(1), 1650004-1-1650004-16, 2016.

[P6] **Anita Dąbrowska**, Przemysław Staszewski. Posterior quantum dynamics for a continuous diffusion observation of a coherent channel. *Journal of the Optical Society of America B*, 29(11), 3072-3077, 2012.

- [P7] **Anita Dąbrowska**, Przemysław Staszewski. Squeezed coherent state undergoing a continuous nondemolition observation. *Physics Letters A*, 375(45), 3950-3955, 2011.
- [P8] **Anita Dąbrowska**, Przemysław Staszewski. Filtering equation for measurement of a coherent channel. *Journal of the Optical Society of America B*, 28(5), 1238-1244, 2011.
- [P9] Julia M. Umińska, Katarzyna Buszko, Jakub Ratajczak, Piotr Łach, Krzysztof Pstragowski, **Anita Dąbrowska**, Piotr Adamski, Grzegorz Skonieczny, Jacek Manitius, and Kubica Jacek, *Comparison of temperature measurements in esophagus and urinary bladder in comatose patients after cardiac arrest undergoing mild therapeutic hypothermia*, *Cardiology Journal*, **27**(6), 735-741, 2020.
- [P10] Marta Pilaczyńska-Cemel, Ryszard Gołda, **Anita Dąbrowska**, and Grzegorz Przybylski, Analysis of the level of selected parameters of inflammation, circulating immune complexes, and related indicators (neutrophil/lymphocyte, platelet/lymphocyte, CRP/CIC) in patients with obstructive diseases. *Central European Journal of Immunology*, 44(3), 292-298, 2019.
- [P11] Marta Pilaczyńska-Cemel, Ryszard Gołda, **Anita Dąbrowska**, and Grzegorz Przybylski. Analiza poziomu wybranych parametrów stanu zapalnego, krążących kompleksów immunologicznych oraz związanych z nimi wskaźników (neutrofil/limfocyt, płytki/limfocyt, CRP/KKI) w raku płuc. *Państwo i Społeczeństwo*, *Państwo i Społeczeństwo*, 19(4), 9-25, 2019.
- [P12] Magdalena Pasińska, **Anita Dąbrowska**, Ewelina Łazarczyk, Anna Repczyńska, I. Avramenko, and Grzegorz Przybylski. The concentration of pregnancy-associated plasma protein-a in the blood serum of tobacco smoking pregnant women in the first trimester of pregnancy. *Prinatology i pediatriya*, 1, 91-94, 2017.
- [P13] Wiktor Sroka, Berin A. Boughton, Priyanka Reddy, Utee Roessner, Piotr Słupski, Piotr Jarzemski, **Anita Dąbrowska**, Michał Markuszewski, and Michał P. Marszał. Determination of amino acids in urine of patients with prostate cancer benign prostate growth., *European Journal of Cancer Prevention* 26(2), 131-134, 2017.
- [P14] Marta Pilaczyńska-Cemel, Ryszard Gołda, **Anita Dąbrowska**, and Grzegorz Przybylski. Charakterystyka poziomów białka C-reaktywnego, krążących kompleksów immunologicznych u osób z chorobami obturacyjnymi płuc palących i niepalących papierosy. *Przegląd Lekarski*, 74(10), 502-505, 2017.
- [P15] Julia M. Kubica, Krzysztof Pstragowski, Piotr Adamski, Michał Kasprzak, Ewa Obońska, Karolina Obońska, **Anita Dąbrowska**, Salvatore di Somma, Andrzej Kleinrok, Marcin Gruchała, Piotr Kasztelowicz, Przemysław Sobczak, Przemysław Paciorek, Marek Koziński Marek, and Jacek Kubica. Mild therapeutic hypothermia for patients with acute coronary syndrome and cardiac arrest treated with percutaneous coronary intervention (UNICORN). The design and rationale for the prospective, observational, multicenter study. *Medical Research Journal*, 1(1), 23-27, 2016.
- [P16] Jacek Kubica, Aldona Kubica, Bernd Jilma, Piotr Adamski, Eva L. Hobl, Eliano P. Navarese, Jolanta M. Siller-Matula, **Anita Dąbrowska**, Tomasz Fabiszak, Marek Koziński, Paul A. Gurbel. Impact of morphine on antiplatelet effects of oral P2Y12 receptor inhibitors. *Interna-*

tional Journal of Cardiology, 215, 201-208, 2016.

[P17] Dariusz Nowak, Zofia Grąbczewska, Michał Gośliński, Karolina Obońska, **Anita Dąbrowska**, and Jacek Kubica. Effect of chokeberry juice consumption on antioxidant capacity, lipids profile and endothelial function in healthy people: a pilot study. *Czech Journal of Food Sciences*, 43(1), 39-46, 2016.

[P18] Grzegorz Przybylski, **Anita Dąbrowska**, Hanna Trzcinska, Alcoholism and other socio-demographic risk factors for adverse TB-drug reactions and unsuccessful tuberculosis treatment - data from ten years observation at the Regional Centre of Pulmonology, Bydgoszcz, Poland. *Medical Science Monitor*, 20, 444-453, 2014.

[P19] Grzegorz Przybylski, **Anita Dąbrowska**, Marta Pilaczyńska-Cemel, Dorota Krawiecka. Unemployment in TB patients - ten-year observation at Regional Center of Pulmonology in Bydgoszcz, Poland. *Medical Science Monitor*, 20, 2125-2131, 2014.

[P20] Magdalena Pasińska, Krystyna Soszyńska, Agata Runge, **Anita Dąbrowska**, Anetta Juraszek, Tatiana Janiszewska, Olga Haus. Badania molekularne w kierunku trombofilii u pacjentek skierowanych do poradni genetycznej z powodu niepowodzeń ciąży. Doświadczenia jednego ośrodka. *Ginekologia Polska*, 83(3), 178-182, 2012.

[P21] Grzegorz Przybylski, **Anita Dąbrowska**, Ryszard Gołda, Aleksandra Gadzińska, and Hanna Trzcinska. Analiza palenia tytoniu wśród chorych na gruźlicę - dane z dziesięciu lat obserwacji z Kujawsko Pomorskiego Centrum Pulmonologii w Bydgoszczy. *Przegląd Lekarski*, 69(10), 953-957, 2012.

[P22] Grzegorz Przybylski, **Anita Dąbrowska**, Małgorzata Pyskir, Magdalena Pasińska, R. Pujso, Jerzy Pyskir, Aleksandra Gadzińska, and Małgorzata Bannach. Jakość życia a kontrola astmy oskrzelowej u palących astmatyków. *Przegląd Lekarski*, 68(10), 690-693, 2011.

[R1] Grzegorz Przybylski, **Anita Dąbrowska**, Marta Pilaczyńska-Cemel, Agnieszka Nowakowska-Arendt, and Ryszard Gołda. The influence of chosen elements of healthy lifestyle on health-related quality of life and asthma control. *Człowiek w zdrowiu i chorobie*. Redakcja: E. Barnaś. PWSZ w Tarnowie, 571-585, 2016.

[R2] Grzegorz Przybylski, **Anita Dąbrowska**, Aleksandra Gadzińska, Małgorzata Pyskir, Ryszard Gołda, Jerzy Pyskir, and Magdalena Pasińska. Alcohol use as a risk factor for tuberculosis - data from ten years observation in Regional Center of Pulmonology in Bydgoszcz. *Public health in the aspect of modern civilization*. Ed. B. Sokołowska. Biała Podlaska: Państwowa Szkoła Wyższa, 174-185, 2012.

[R3] Grzegorz Przybylski, **Anita Dąbrowska**, Małgorzata Bannach, Małgorzata Pyskir, Magdalena Pasińska, Ryszard Gołda, Jerzy Pyskir, and Aleksandra Gadzińska. Evaluation of asthma knowledge and quality of life in outpatients with asthma. *Environmental factors shaping wellness in sickness and disability*. pod red. J. Bergiera. Lublin: Wydaw. NeuroCentrum, 217-232, 2010.

[R4] Grzegorz Przybylski, **Anita Dąbrowska**, Małgorzata Pyskir, Magdalena Pasińska, Małgorzata Bannach, Ryszard Gołda, Jerzy Pyskir, and Aleksandra Gadzińska. Analysis of the environ-

mental risk factors in patients with allergies of respiratory system allergic to molds. *Civilization and social diseases*. Ed. B. Sokołowska. Biała Podlaska: Państwowa Szkoła Wyższa, 209-220, 2010.

[R5] Magdalena Pasińska, Ryszard Gołda, Grzegorz Przybylski, **Anita Dąbrowska**, Anna Pawlikowska, L. Nowak. Circulating immune complexes and atypical proteins in serum of women with habitual abortions in history. *Civilization and social diseases*. Ed. B. Sokołowska. Biała Podlaska: Państwowa Szkoła Wyższa, 127-136, 2010.

[A1] Masood Valipour, Gniewomir Sarbicki, Karolina Słowik, **Anita Dąbrowska**. Optimization of two-photon absorption for three-level atom. arXiv:2411.13274

[A2] **Anita Dąbrowska**, Gniewomir Sarbicki. Quantum trajectories and output field properties for systems driven by two-photon input field. arXiv:2409.07428

Literatura

- [1] A. Jazwinski. *Stochastic process and filtering theory*. Academic Press, New York and London, 1970.
- [2] V. Krishnan. *Nonlinear filtering and smoothing*. Dover Publications, Mineola, New York, 2005.
- [3] V. P. Belavkin. A continuous counting observation and posterior quantum dynamics. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 22, L1109, 1989.
- [4] V. P. Belavkin. A posterior Schrödinger equation for continuous nondemolition measurement. *J. Math. Phys.*, 31, 2930, 1990.
- [5] A. Barchielli and V. P. Belavkin. Measurements continuous in time and a posteriori states in quantum mechanics. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 24, 1495, 1991.
- [6] H. Carmichael. *An Open Systems Approach to Quantum Optics*, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg, 1993.
- [7] P. Goetsch and R. Graham. Linear stochastic wave equations for continuously measured quantum systems. *Phys. Rev. A*, 50, 5242, 1994.
- [8] H. P. Breuer and F. Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford University Press, New York, 2002.
- [9] C. W. Gardiner and P. Zoller. *Quantum noise*, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg, 2010.
- [10] W. M. Wiseman and G. J. Milburn. *Quantum measurement and control*, Cambridge University Press, 2010.
- [11] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy. Quantum Ito's formula and stochastic evolutions. *Commun. Math. Phys.*, 93, 301, 1984.
- [12] K. R. Parthasarathy. *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*, Basel: Birkhäuser Verlag, 1992.
- [13] D. B. Applebaum and R. L. Hudson. Fermion Itô's formulas and stochastic evolutions. *Commun. Math. Phys.*, 96, 473, 1984.
- [14] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy. Unification of fermion and boson stochastic calculus. *Commun. Math. Phys.*, 104, 457, 1986.
- [15] C. W. Gardiner. Input and output in damped quantum systems III: Formulation of damped systems driven by Fermion fields. *Opt. Commun.*, 243, 57, 2004.
- [16] C. W. Gardiner and M. J. Collet. Input and output in damped quantum systems: Quantum stochastic differential equations and the master equation. *Phys. Rev. A*, 31, 3761, 1985.
- [17] A. Barchielli. *Continual measurements in quantum mechanics and quantum stochastic calculus in Open Quantum Systems III. Recent Developments*, S. Attal, A. Joye, and C.-A. Pillet, eds. Berlin Heidelberg: Springer LNM, 2006, pp. 207-288.

- [18] R. Dum, P. Zoller, and H. Ritsch. Monte Carlo simulation of the atomic master equation for spontaneous emission. *Phys. Rev. A*, 45, 4879, 1992.
- [19] K. Mølmer, Y. Castin, and J. Dalibard. A Monte–Carlo wave function method in quantum optics. *J. Opt. Soc. Am. B*, 10, 524, 1993.
- [20] V. Gorini, A. Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan. Completely positive dynamical semigroups of N -level systems. *J. Math. Phys.*, 17, 821, 1976.
- [21] G. Lindblad. On the generators of quantum dynamical semigroups. *Comm. Math. Phys.*, 48, 119, 1976.
- [22] H. P. Breuer, E. M. Laine, J. Piilo, and B. Vacchini. Colloquium: Non-Markovian dynamics in open quantum systems. *Rev. Mod. Phys.*, 88, 021002, 2016.
- [23] J. E. Gough. Principles and applications of quantum control engineering. *Philos. T. Roy. Soc. A*, 370, 5241, 2012.
- [24] J. S. Neergaard-Nielsen, B. M. Nielsen, C. Hettich, K. Mølmer, and E. S. Polzik. Generation of a Superposition of Odd Photon Number States for Quantum Information Networks. *Phys. Rev. Lett.*, 97, 083604, 2006.
- [25] A. Ourjoumtsev, R. Tualle-Brouri, J. Laurat, P. Grangier. Generating optical Schrödinger kittens for quantum information processing. *Science*, 312, 83, 2006.
- [26] A. Ourjoumtsev, F. Ferreyrol, R. Tualle-Brouri, and P. Grangier. Preparation of non-local superpositions of quasi-classical light states. *Nature*, 448, 784, 2007.
- [27] M. G. Raymer, J. Noh, K. Banaszek, and I. A. Walmsley. Pure-state single-photon wavepacket generation by parametric down-conversion in a distributed microcavity. *Phys. Rev. A*, 72 (2), 023825, 2005.
- [28] M. Cooper, L. J. Wright, C. Söller, and B. J. Smith. Experimental generation of multi-photon Fock states. *Opt. Express*, 21, 5309, 2013.
- [29] M. Yukawa, K. Miyata, T. Mizuta, H. Yonezawa, P. Marek, R. Filip, and A. Furusawa. Generating superposition of up-to three photons for continuous variable quantum information processing. *Opt. Express*, 21 (5), 5529, 2013.
- [30] B. Peaudecerf, C. Sayrin, X. Zhou, T. Rybarczyk, S. Gleyzes, I. Dotsenko, J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche. Quantum feedback experiments stabilizing Fock states of light in a cavity. *Phys. Rev. A*, 87, 042320, 2013.
- [31] A. Reiserer, G. Rempe. Cavity-based quantum networks with single atoms and optical photons. *Rev. Mod. Phys.*, 87, 1379, 2015.
- [32] P. Lodahl, S. Mahmoodian, and S. Stobbe. Interfacing single photons and single quantum dots with photonic nanostructures. *Rev. Mod. Phys.*, 87 (2), 347, 2015.
- [33] H. Ogawa, H. Ohdan, K. Miyata, M. Taguchi, K. Makino, H. Yonezawa, J. I. Yoshikawa, and A. Furusawa. Real-time quadrature measurement of a single-photon wave packet with continuous temporal-mode matching. *Phys. Rev. Lett.*, 116, 233602, 2016.
- [34] P. Lodahl, S. Mahmoodian, S. Stobbe, A. Rauschenbeutel, P. Schneeweiss, J. Volz, H. Pichler, and P. Zoller. Chiral quantum optics. *Nature*, 541 (7638), 473, 2017.
- [35] S. Sun, H. Kim, Z. Luo, G. S. Solomon, and E. Waks. A single-photon switch and transistor enabled by a solid-state quantum memory. *Science*, 361 (6397), 57, 2018.
- [36] K. J. Blow, R. Loudon, S. J. D. Phoenix, and T. J. Sheperd. Continuum fields in quantum optics. *Phys. Rev. A*, 42 4102, 1990.
- [37] R. Loudon. *The Quantum Theory of Light* third edition, Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [38] Z. Y. Ou. Temporal distinguishability of an N -photon state and its characterization by quantum interference. *Phys. Rev. A*, 74, 063808, 2006.
- [39] G. J. Milburn. Coherent control of single photon states. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 159, 113, 2008.
- [40] P. P. Rohde, W. Mauerer, and Ch. Silberhorn. Spectral structure and decompositions of optical states, and their applications. *New J. Phys.*, 9, 91, 2007.

- [41] M. K. Gheri, K. Ellinger, T. Pellizzari, and P. Zoller. Photon-Wavepackets as Flying Quantum Bits. *Fortschr. Phys.* 46 4-5, 401, 1998.
- [42] P. Domokos, P. Horak, and H. Ritsch. Quantum description of light-pulse scattering on a single atom in waveguides. *Phys. Rev. A*, 65, 033832, 2002.
- [43] J. E. Gough, M. R. James, and H. I. Nurdin. Quantum master equation and filter for systems driven by fields in a single photon state. in 50th *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference* (IEEE, 2011), pp.5570 - 5576.
- [44] Y. Wang, J. Minář, L. Sheridan, and V. Scarani. Efficient excitation of a two-level atom by a single photon in a propagating mode. *Phys. Rev. A*, 83, 063842, 2011.
- [45] Y. Wang, J. Minář, G. Hétet, and V. Scarani. Quantum memory with a single two-level atom in a half cavity. *Phys. Rev. A*, 85, 013823, 2012.
- [46] B. Q. Baragiola, R. L. Cook, A. M. Brańczyk, and J. Combes, N -photon wave packets interacting with an arbitrary quantum system. *Phys. Rev. A*, 86, 013811, 2012.
- [47] H. S. Rag, and J. Gea-Banacloche. Two-level-atom excitation probability for single- and N -photon wave packets. *Phys. Rev. A*, 96, 033817, 2017.
- [48] J. E. Gough, M. R. James, H. I. Nurdin, and J. Combes. Quantum filtering for systems driven by fields in single-photon states or superposition of coherent states. *Phys. Rev. A*, 86, 043819, 2012.
- [49] J. E. Gough, M. R. James, and H. I. Nurdin. Single photon quantum filtering using non-Markovian embeddings. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 370, 5408, 2012.
- [50] A. R. R. Carvalho, M. R. Hush, and M. R. James. Cavity driven by a single photon: conditional dynamics and non-linear phase shift. *Phys. Rev. A*, 86, 023806, 2012.
- [51] J. E. Gough, M. R. James, and H. I. Nurdin. Quantum filtering for systems driven by fields in single photon states and superposition of coherent states using non-Markovian embeddings. *Quantum Inf. Process.*, 12, 3, 1469, 2013.
- [52] J. E. Gough, M. R. James, and H. I. Nurdin. Quantum trajectories for a class of continuous matrix product input states. *New J. Phys.*, 16, 075008, 2014.
- [53] J. E. Gough, and G. Zhang. Generating nonclassical quantum input field states with modulating filters. *EPJ Quantum Technology*, 2, 15, 2015.
- [54] Z. Dong, G. Zhang, and N. H. Amini. Quantum filtering for multiple measurements driven by fields in single-photon states. in *Proceedings of American Control Conference* (IEEE, 2016) pp. 4754-4759.
- [55] H. T. Song, G. F. Zhang, and Z. R. Xi. Continuous-mode multi-photon filtering. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 54, 1602, 2016.
- [56] Y. Pan, D. Dong, and G. F. Zhang. Exact analysis of the response of quantum systems to two photons using a QSDE approach. *New. J. Phys.*, 18, 033004, 2016.
- [57] B. Q. Baragiola, and J. Combes. Quantum trajectories for propagating Fock states. *Phys. Rev. A*, 96, 023819, 2017.
- [58] G. F. Zhang. Control engineering of continuous-mode single-photon states: a review. *Control Theory and Technology*, 19, 544, 2021.
- [59] Z. Dong, G. Zhang, and N. H. Amini. Quantum filtering for a two-level atom driven by two counter-propagating photons. *Quantum Inf. Process.*, 18, 136, 2019.
- [60] J. Gross, B. Baragiola, T. M. Stace, and J. Combes. Master equations and quantum trajectories for squeezed wave packet. *Phys. Rev. A*, 105, 023721, 2022.
- [61] H. J. Carmichael. Quantum Theory for Cascaded Open Systems. *Phys. Rev. Lett.*, 70, 15, 1993.
- [62] J. Gough and M. R. James. The Series Product and Its Application to Quantum Feedforward and Feedback Networks. *IEEE Trans. Aut. Control*, 54, 2530, 2009.

- [63] J. Gough and M. R. James. Quantum Feedback Networks: Hamiltonian Formulation. *Commun. Math. Phys.*, 287 1109, 2009.
- [64] J. Combes, J. Kerckhoff, and M. Sarovar. The SLH framework for modeling quantum input-output networks. *Adv. Phys: X*, 2, 3, 784, 2017.
- [65] S. Attal. Approximating the Fock space with the toy Fock space. Séminaire de probabilités (Strasbourg), 36, 477-491, 2002.
- [66] S. Attal and Y. Pautrat. From Repeated to Continuous Quantum Interactions. *Ann. Henri Poincaré*, 7, 59, 2006.
- [67] C. Pellegrini. Existence, uniqueness and approximation of a stochastic Schrödinger equation: The diffusive case. *Ann. Probab.*, 36, No. 6, 2332, 2008.
- [68] C. Pellegrini and F. Petruccione. Non-Markovian quantum repeated interactions and measurements. *J. Phys. A Math. Theor.*, 42, 425304, 2009.
- [69] C. Pellegrini. Existence, uniqueness and approximation of the jump-type stochastic Schrödinger equation for two-level systems. *Stoch. Proc. Appl.*, 120 Issue 9, 1722, 2010.
- [70] S. Kretschmer, K. Luoma, and W. T. Strunz. Collision model for non-Markovian quantum dynamics. *Phys. Rev. A*, 94, 012106, 2016.
- [71] F. Ciccarello. Collision models in quantum optics. *Quantum Measurements and Quantum Metrology*, 4, 53, 2017.
- [72] N. Altamirano, P. Corona-Ugalde, R. B. Mann, and M. Zych. Unitarity, feedback, interactions-dynamics emergent from repeated measurements. *New. J. Phys.*, 19, 013035, 2017.
- [73] S. N. Filippov, J. Piilo, S. Maniscalco, and M. Ziman. Divisibility of quantum dynamical maps and collision models. *Phys. Rev. A*, 96, 032111, 2017.
- [74] J. A. Gross, C. M. Caves, G. J. Milburn, and J. Combes. Qubit models of weak continuous measurements: markovian conditional and open-system dynamics. *Quantum Sci. Technol.*, 3, 024005, 2018.
- [75] D. Cilluffo and F. Ciccarelli. Quantum Non-Markovian Collision Models from Colored-Noise Baths. in *Advances in Open Systems and Fundamental Tests of Quantum Mechanics*. Springer Proceedings in Physics, vol 23, B. Vacchini, H. P. Breuer, and A. Bassi, eds. (Springer, Cham, 2019), pp. 29-40.
- [76] T. Rybár, S. N. Filippov, M. Ziman, and V. Bužek. Simulation of indivisible qubit channels in collision models. *J. Phys. B*, 45, 154006, 2012.
- [77] N. K. Bernardes, A. R. R. Carvalho, C. H. Monken, and M. F. Santos. Environmental correlations and Markovian to non-Markovian transitions in collisional models. *Phys. Rev A*, 90, 032111, 2014.
- [78] N. K. Bernardes, A. R. R. Carvalho, C. H. Monken, and M. F. Santos. Coarse graining a non-Markovian collisional model. *Phys. Rev. A*, 95, 032117, 2017.
- [79] E. Mascarenhas, and I. de Vega. Quantum critical probing and simulation of colored quantum noise. *Phys. Rev. A*, 96, 062117, 2017.
- [80] A. K. Fischer, R. Trivedi, V. Ramasesh, I. Siddiqi, and J. Vučković. Scattering into one-dimensional waveguides from a coherently-driven quantum-optical system. *Quantum*, 2, 69, 2018.
- [81] K. Fischer. Derivation of the quantum-optical master equation based on coarse-graining of time. *J. Phys. Commun.*, 2, 091001, 2018.
- [82] F. Ciccarello, S. Lorenzo, V. Giovannetti, and G. M. Palma. Quantum collision models: open system dynamics from repeated interactions. *Phys. Rep.*, 954, 1, 2022.
- [83] P. A. Meyer. *Quantum Probability for Probabilists*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1995.
- [84] T. A. Brun. A simple model of quantum trajectories. *Amer. J. Phys.*, 70, 719, 2002.
- [85] J. E. Gough, A. Sobolev. Stochastic Schrödinger Equations as Limit of Discrete Filtering. *Open Syst. Inf. Dyn.* 11, 235, 2004.

- [86] L. Bouten and R. Handel. Discrete approximation of quantum stochastic models. *J. Math. Phys.*, 49, 102109, 2008.
- [87] L. Bouten, R. Handel, and M. R. James. A discrete invitation to quantum filtering and feedback control. *SIAM REVIEW*, 51, 239, 2009.
- [88] T. Rybár, S. N. Filippov, M. Ziman, and V. Bužek. Simulation of indivisible qubit channels in collision models. *J. Phys. B*, 45, 154006, 2012.
- [89] Á. Rivas, S. F. Huelga, and M. B. Plenio. Entanglement and Non-Markovianity of Quantum Evolutions. *Phys. Rev. Lett.*, 105, 050403, 2010.
- [90] H. P. Breuer, E. M. Laine, and J. Piil. Measure for the Degree of Non-Markovian Behavior of Quantum Processes in Open Systems. *Phys. Rev. Lett.*, 103, 210401, 2009.
- [91] S. Lorenzo, F. Plastina, and M. Paternostro. Geometrical characterization of non-Markovianity. *Phys. Rev. A*, 88, 020102(R), 2013.
- [92] D. Chruściński, C. Macchiavello, and S. Maniscalco. Detecting Non-Markovianity of Quantum Evolution via Spectra of Dynamical Maps. *Phys. Rev. Lett.*, 118, 080404, 2017.
- [93] M. O. Scully and M. S. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [94] H. P. Yuen and V.W. S. Chan. Noise in homodyne and heterodyne detection. *Optics Lett.*, 8, 177, 1983.
- [95] A. Roulet, and V. Scarani. Solving the scattering of N photons on a two-level atom without computation. *New J. Phys.*, 18, 09303, 2016.
- [96] J. T. Shen and S. Fan. Coherent Single Photon Transport in a One-Dimensional Waveguide Coupled with Superconducting Quantum Bits. *Phys. Rev. Lett.*, 95, 213001, 2005.
- [97] E. Rephaeli and S. Fan. Stimulated emission from a single excited atom in a waveguide. *Phys. Rev. Lett.*, 108, 143602, 2012.
- [98] A. Nysteen, D. P. S. McCutcheon, and J. Mørk. Strong nonlinearity-induced correlations for counterpropagating photons scattering on a two-level emitter. *Phys. Rev. A*, 91, 063823, 2015.
- [99] N. Megier, D. Chruściński, J. Piilo, and W. T. Strunz. Eternal non-Markovianity: from random unitary to Markov chain realisations. *Sci. Rep.*, 7 (1), 6379, 2017.
- [100] S. N. Filippov, A. N. Glinov, and L. Leppäjärvi. Phase covariant qubit dynamics and divisibility. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 41, 617, 2020.
- [101] J. Teittinen, H. Lyyra, B. Sokolov, and S. Maniscalco. Revealing memory effects in phase-covariant quantum master equations. *New J. Phys.* 20, 073012, 2018.
- [102] J.E. Gough and C. Köstler. Quantum filtering in coherent states. *Commun. Stoch. Anal.*, 4, 505, 2010.
- [103] A. Barchielli. Direct and heterodyne detection and other applications of quantum stochastic calculus to quantum optics. *Quantum Opt.* 2, 423, 1990.
- [104] A. Barchielli and N. Pero. A quantum stochastic approach to the spectrum of a two-level atom. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 4, 272, 2002.
- [105] L. Mandel and E. Wolf. *Optical coherence and quantum optics*, Cambridge University Press, 1995.
- [106] M. Stobińska, G. Alber, and G. Leuchs. Perfect excitation of a matter qubit by a single photon in free space. *Euro. Phys. Lett.*, 86, 14007, 2009.

8 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej.

Aktywność na uczelniach polskich

Moje publikacje powstały podczas pracy na dwóch polskich uczelniach. Obecnie współpracuję z pracownikami naukowymi Uniwersytetu Gdańskiego oraz Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu.

- Uniwersytet Gdański
Prace z osiągnięcia habilitacyjnego: H2, H3, H4 oraz H7 mają afiliację Uniwersytetu Gdańskiego.
- Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
Prace z osiągnięcia habilitacyjnego: H1, H5 oraz H6 mają afiliację Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu.

Aktywność w zagranicznych instytucjach naukowych

- Artykuł [P4] powstał częściowo podczas mojego trzytygodniowego pobytu w Wielkiej Brytanii, finansowanego przez University of Cambridge. Praca nad publikacją prowadzona była w Isaac Newton Institute for Mathematical Science. Czas pobytu: 21.07–15.08.2014.
- W okresie 01.03–31.08.2006 odbyłam staż przed uzyskaniem doktoratu pod opieką Prof. V. P. Belavkina w School of Mathematical Sciences będącej częścią University of Nottingham.

9 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę

9.1 Działalność dydaktyczna

Zajęcia dydaktyczne prowadzone na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego w latach 2019 — 2024

Wykłady:

- Analiza statystyczna i rachunek prawdopodobieństwa dla bioinformatyków, kierunek: bioinformatyka, studia licencjackie, 30 godz. w latach: 2021/2022, 2022/2023, 2023/2024, 2024/2025 (w trakcie)
- Biotermodynamika z elementami fizyki statystycznej, kierunek: fizyka medyczna, studia licencjackie, 30 godz. w latach: 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022, 2022/2023, 2023/2024, 2024/2025 (w trakcie)

- Metody matematyczne bioinformatyki — dyskretny rachunek prawdopodobieństwa, kierunek: bioinformatyka, studia licencjackie, 15 godz. w latach: 2020/2021, 2021/2022, 2022/2023, 2023/2024
- Procesy stochastyczne: podstawy i zastosowania, kierunek: modelowanie matematyczne i analiza danych, studia licencjackie, 30 godz. w latach: 2020/2021, 2021/2022, 2022/2023
- Procesy stochastyczne, kierunki: modelowanie matematyczne i analiza danych, matematyka, studia drugiego stopnia, 30 godz. w roku 2024/2025 (w trakcie)
- Rachunek prawdopodobieństwa, kierunek: bioinformatyka, studia licencjackie, 15 godz. w roku 2020/2021
- Rachunek prawdopodobieństwa i elementy statystyki, kierunek: fizyka medyczna, studia licencjackie, 30 godz. w latach: 2020/2021, 2021/2022, 2022/2023, 2023/2024
- Zaawansowana matematyka teoretyczna w fizyce, kierunek: fizyka, studia licencjackie, wykład prowadzony wspólnie z dr hab. Marcinem Marciniakiem, 12 godz. w roku 2021/2022

Ćwiczenia audytoryjne i laboratoryjne:

- Algebra, ćwiczenia audytoryjne, kierunek: bezpieczeństwo jądrowe i ochrona radiologiczna, studia licencjackie, 30 godz. w roku 2019/2020
- Algebra liniowa, ćwiczenia audytoryjne, kierunek: fizyka medyczna, studia licencjackie, 30 godz. w roku 2019/2020
- Algebra liniowa z geometrią, ćwiczenia audytoryjne, kierunek: fizyka, studia licencjackie, 60 godz. w roku 2019/2020
- Analiza statystyczna i rachunek prawdopodobieństwa dla bioinformatyków, ćwiczenia laboratoryjne, kierunek: bioinformatyka, studia licencjackie, 45 godz. w latach: 2021/2022, 2022/2023, 2023/2024, 2024/2025 (w trakcie)
- Biotermodynamika z elementami fizyki statystycznej, ćwiczenia audytoryjne, kierunek: fizyka medyczna, studia licencjackie, 30 godz. w latach: 2019/2020, 2020/2021, 2021/2022, 2022/2023, 2023/2024, 2024/2025 (w trakcie)
- Elementy statystyki, ćwiczenia laboratoryjne, kierunek: fizyka medyczna, studia licencjackie, 45 godz. w roku 2019/2020
- Rachunek prawdopodobieństwa, ćwiczenia audytoryjne, kierunek: bioinformatyka, studia licencjackie, 30 godz. w roku 2020/2021
- Rachunek prawdopodobieństwa i elementy statystyki, ćwiczenia laboratoryjne, kierunek: fizyka medyczna, studia licencjackie, 45 godz. w latach: 2020/2021, 2021/2022, 2022/2023, 2023/2024

- Podstawy teorii procesów stochastycznych, ćwiczenia audytoryjne, kierunek: modelowanie matematyczne i analiza danych, studia licencjackie, 15 godz. w roku 2019/2020
- Pracownia rotacyjna, kierunek: bioinformatyka, studia licencjackie, 20 godz. w roku 2021/2022, 15 godz. w roku 2023/2024
- Procesy stochastyczne: podstawy i zastosowania, ćwiczenia audytoryjne, kierunek: modelowanie matematyczne i analiza danych, studia licencjackie, 15 godz. w roku 2020/2021
- Zaawansowana matematyka praktyczna w fizyce, ćwiczenia audytoryjne, kierunek: fizyka, studia licencjackie, 12 godz. w roku 2021/2022

Zajęcia dydaktyczne prowadzone w Collegium Medicum UMK w latach 2000 — 2019

Wykłady:

- Matematyka, kierunek: biotechnologia, studia licencjackie, 38 godz. w roku 2017/2018, 60 godz. w roku 2018/2019
- Matematyka, kierunek: farmacja, studia magisterskie, 10 godz. w latach: 2016/2017, 2017/2018, 2018/2019
- Matematyczne i statystyczne podstawy nauk biomedycznych, kierunek: kosmetologia, studia niestacjonarne, 5 godz. w roku 2014/2015
- Medical statistics na anglojęzycznym kierunku lekarskim, 10 godz. w roku 2013/2014
- Statystyka medyczna, kierunek: lekarski, 10 godz. w roku 2013/2014
- Podstawy fizyki medycznej, kierunek: elektroradiologia, studia dzienne, studia licencjackie, 30 godz. w latach: 2013/2014, 2014/2015, 2015/2016, 2016/2017, 2017/2018
- Podstawy fizyki medycznej, kierunek: elektroradiologia, studia niestacjonarne, studia licencjackie, 30 godz. w latach: 2013/2014, 2014/2015
- Statystyka medyczna na studiach podyplomowych z analityki medycznej, 5 godz. w latach: 2014/2015, 2015/2016, 2016/2017, 2017/2018

Ćwiczenia:

- Elementy fizyki na kierunku biotechnologia
- Informatyka na kierunkach: elektroradiologia (studia niestacjonarne), pielęgniarstwo (studia niestacjonarne) oraz na kierunku lekarskim
- Matematyka na kierunkach: biotechnologia, farmacja oraz analityka medyczna
- Matematyczne i statystyczne podstawy nauk biomedycznych na kierunku kosmetologia (studia niestacjonarne)

- Matematyka z elementami statystyki na kierunku kosmetologia (studia niestacjonarne)
- Medical statistics na anglojęzycznym kierunku lekarskim
- Podstawy fizyki medycznej na kierunku elektroradiologia
- Statystyka na kierunkach: analityka medyczna, farmacja oraz kosmetologia
- Statystyka medyczna na kierunku lekarskim

Koordinator następujących przedmiotów:

- Matematyka na kierunku biotechnologia w latach: 2017/2018, 2018/2019, przedmiot realizowany w wymiarze 60 godz. wykładów, 60 godz. ćwiczeń
- Matematyka na kierunku farmacja w latach: 2016/2017, 2017/2018, 2018/2019, przedmiot realizowany w wymiarze 10 godz. wykładów, 25 godz. ćwiczeń
- Medical statistics na anglojęzycznym kierunku lekarskim w roku 2013/2014, przedmiot realizowany w wymiarze 10 godz. wykładów, 5 godz. ćwiczeń
- Podstawy fizyki medycznej na kierunku elektroradiologia (studia stacjonarne oraz niestacjonarne) w latach: 2013/2014, 2014/2015, 2015/2016, 2016/2017, 2017/2018, przedmiot realizowany w wymiarze 30 godz. wykładów, 30 godz. ćwiczeń, w roku akademickim 2013/2014 przedmiot realizowany w wymiarze 30 godz. wykładów i 60 godz. ćwiczeń
- Statystyka medyczna na kierunku lekarskim w roku 2013/2014, przedmiot realizowany w wymiarze 10 godz. wykładów, 5 godz. ćwiczeń

9.2 Promotorstwo prac magisterskich i doktorskich

- promotor pomocniczy w projekcie doktorskim mgr. Masooda Valipoura, uczestnika studiów doktoranckich przy Wydziale Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, UMK, tytuł projektu: *Charakterystyka teoretyczna absorpcji dwufotonowej dla pól klasycznych i kwantowych*, promotor główny: dr hab. Gniewomir Sarbicki, prof. UMK, projekt w trakcie realizacji
- promotor pracy magisterskiej Rafała Kluski, tytuł pracy: *Relacyjne bazy danych w laboratorium analitycznym*, Collegium Medicum UMK, 2018

9.3 Praca organizacyjna

- aktualnie członek komisji programowej na kierunku studiów Fizyka medyczna
- aktualnie członek komisji programowej na kierunku studiów Bezpieczeństwo jądrowe i ochrona radiologiczna
- praca w latach 2021–2023 w zespole realizującym projekt czterech letnich szkół pod nazwą: "GENERATION QI. Next generation of quantum information scientists. Series of international schools for students in Gdańsk", projekt realizowany na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki UG, nazwy szkół: *Quantum computation*, *Quantum dynamics and open systems*, *Quantum cryptography*, *Picturing quantum weirdness*, strona projektu: <https://gqi.ug.edu.pl>
- praca w zespole przygotowującym wniosek o sfinansowanie szkół letnich na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki UG złożonym w ramach projektu SPINAKER — intensywne międzynarodowe programy kształcenia 2020
- praca podczas reformy programowej kierunku bioinformatyka na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki UG w roku 2020, przygotowywanie sylabusów
- udział w przygotowywaniu programu studiów podyplomowych Biostatystyka na Wydziale Farmaceutycznym, Collegium Medicum, UMK
- opiekun I roku analityki medycznej w Collegium Medicum UMK, nieprzerwanie od roku akademickiego 2004/2005 do roku 2018/2019

9.4 Popularyzacja nauki

- Wzięłam udział w imprezie popularyzującej naukę pod tytułem *Nauka? Taką — to ja lubię!*, która odbyła się w roku 2021 na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki, UG. Poprowadziłam wykład pod tytułem *Czy można spotkać prawdopodobieństwo warunkowe w szpitalu, na ulicy lub sali sądowej?* w dwóch szkołach średnich.
- W dniu 22.03.2019 r. na zaproszenie Koła Naukowego Chemików UMK poprowadziłam na Wydziale Chemii UMK wykład pod tytułem *Regresja i korelacja liniowa*. Wykład dotyczył wnioskowania statystycznego w modelowaniu regresji oraz implementacji w programie SPSS.

10 Nagrody i wyróżnienia

- Nagroda indywidualna IV-go stopnia Rektora Uniwersytetu Gdańskiego za wyróżniającą pracę organizacyjną, dydaktyczną oraz badawczą w roku 2021
- Nagroda indywidualna III-go stopnia Rektora Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu za osiągnięcia w działalności naukowo-badawczej w roku 2018



Signed by / Podpisano przez:

Anita Magdalena
Dąbrowska
Uniwersytet Gdański

Date / Data: 2024-11-24 20:36