

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Piotra Nowaka-Przygodzkiego

pt. „Typ homotopijny przestrzeni odwzorowań gradientowych”

Przedstawiona rozprawa doktorska została przygotowana na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego. Promotorem pracy jest dr hab. Grzegorz Graff, prof. PG, a promotorem pomocniczym dr Piotr Bartłomiejczyk. Rozprawa przedstawiona została w formie czterech artykułów (trzech opublikowanych i jednego przyjętego do druku):

- [R1] P. Bartłomiejczyk, P. Nowak-Przygodzki, *Path components of the space of gradient vector fields on the two dimensional disc*, zaakceptowana do druku w *Mathematica Slovaca* (10 stron);
- [R2] P. Bartłomiejczyk, P. Nowak-Przygodzki, *The homotopy type of the space of gradient vector fields*, *Glasgow Mathematical Journal* 54 (2012), 619-626;
- [R3] P. Bartłomiejczyk, P. Nowak-Przygodzki, *Gradient otopies of gradient local maps*, *Fund. Math.* vol. 214, No. 1 (2011), 89-100;
- [R4] P. Bartłomiejczyk, P. Nowak-Przygodzki, *Proper gradient otopies*, *Topol. Appl.* 159 (2012), 2570-2579.

Rozprawa została poprzedzona krótkim streszczeniem w języku polskim i angielskim (odpowiednio 5 i 4 strony). Ponadto do rozprawy załączono oświadczenie współautora, z którego wynika, że mgr Nowak-Przygodzki jest współautorem istotnych części wszystkich wyżej wymienionych prac.

Punktem wyjścia do rozważań rozprawy jest pytanie o to czy w klasie odwzorowań gradientowych można wprowadzić niezmiennik homotopijny, który będzie nietrywialny w sytuacji, gdy stopień topologiczny Brouwera jest zerowy. Pozytywna odpowiedź na to pytanie oznaczałaby, że klasa homotopii odwzorowania gradientowego w przestrzeni odwzorowań ciągłych (tj. względem ciągłych homotopii) zawierałaby odwzorowania, które nie są z nim homotopijne w przestrzeni odwzorowań gradientowych (tj. poprzez homotopie gradientowe). W 1990 A. Parusiński (w pracy *Gradient homotopies of gradient vector fields*, *Studia Math.* XCVI, 73-80) pokazał, że inkluzja przestrzeni \mathcal{G} gradientowych pól wektorowych na dysku $D^n \subset \mathbb{R}^n$ nieznikających na brzegu S^{n-1} w przestrzeń $\mathcal{V} := C((D^n, S^{n-1}), (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ indukuje bijekcję pomiędzy zbiorami składowych spójności tych przestrzeni, dając tym samym negatywną odpowiedź na wspomniane wyżej wyjściowe pytanie. Prace wchodzące

w skład rozprawy stanowią kontynuację tych poszukiwań w kierunku dokładniejszego zbadania inkluzji $\mathcal{G} \subset \mathcal{V}$ oraz znalezienia odpowiedzi na analogiczne pytania w klasie odwzorowań lokalnych i przy zastąpieniu relacji homotopii tzw. *otopią*.

W pracy [R1], wykazano, że, w przypadku $n = 2$, dowolne dwa odwzorowania gradientowe w \mathcal{G} o tym samym stopniu topologicznym są gradientowo homotopijne. W szczególności wynika stąd, że istnieje homotopia gradientowa łącząca identyczność id z $-id$, co stanowi istotne uzupełnienie rezultatów Parusińskiego. Natomiast w pracy [R2] autorzy wykazują, że inkluzja $\mathcal{G} \subset \mathcal{V}$ jest homotopijną równoważnością w przypadku $n = 2$. Główna technika dowodowa, użyta również w pracy Parusińskiego, to rozkład pola wektorowego obciętego do brzegu (w tym przypadku S^1) na składowe styczną i normalną. Składowa styczna jest wówczas stycznym polem wektorowym na S^1 , a składowa normalna może być wówczas utożsamiana z funkcją 2π -okresową.

Niejako drugą część rozprawy, stanowią prace [R3] i [R4], w których postawiono pytanie o klasyfikację (odp. właściwych) lokalnych odwzorowań gradientowych względem relacji *otopii*. Główny wynik pracy [R3] to dowód, że każde dwa otopijne w przestrzeni lokalnych pól wektorowych $\mathcal{F}(n)$ odwzorowania gradientowe są otopijne w zbiorze lokalnych odwzorowań gradientowych $\mathcal{F}_{\nabla}(n)$, innymi słowy inkluzja $\mathcal{F}_{\nabla}(n) \subset \mathcal{F}(n)$ implikuje bijekcję pomiędzy zbiorami klas otopii. W przypadku inkluzji zbiór $\mathcal{P}_{\nabla}(n)$ właściwych lokalnych odwzorowań gradientowych w przestrzeni $\mathcal{P}(n)$ właściwych lokalnych odwzorowań ciągłych, wykazano, że indukowane odwzorowanie pomiędzy zbiorami klas otopii jest surjekcją (tzn. w każdej klasie otopii lokalnych odwzorowań właściwych znajduje się odwzorowanie gradientowe). Główna trudność polegała na wykazaniu, że stopień topologiczny rozróżnia klasy otopii w $\mathcal{F}_{\nabla}(n)$. Dowód polegał na klasyfikowaniu odwzorowań poprzez otopijne przekształcanie pól do odpowiednich *odwzorowań standardowych* określonych na rozłącznych kulach składających się z dwóch typów odwzorowań: przesuniętych identyczności oraz przesuniętych odbić. Kluczową własnością takich odwzorowań jest własność anihilacji odwzorowań różnych typów, która polega na tym, że dwa odwzorowania różnego typu, które są określone na rozłącznych kulach, są otopijne z odwzorowaniem pustym (Lemma 3.2). Pozwala to na odpowiednią redukcję (poprzez otopię) do odwzorowania pustego lub odwzorowania standardowego składającego się z jednego typu odwzorowań (które z kolei jest jednoznacznie rozróżniane przez stopień topologiczny). Natomiast w pracy [R4] autorzy wzmocnili wynik dla odwzorowań właściwych, tj. pokazali, że inkluzja $\mathcal{P}_{\nabla}(n) \subset \mathcal{P}(n)$ jest również injekcją. Tu udało się pokazać, że stopień topologiczny rozróżnia klasy otopii w zbiorze $\mathcal{P}_{\nabla}(n)$ właściwych lokalnych odwzorowań gradientowych. Podobnie jak w poprzedniej pracy zastosowano tu technikę klasyfikowania odwzorowań poprzez równoważność otopijną z odpowiednio dobranymi odwzorowaniami standardowymi oraz zauważono i użyto odpowiedniej anihilacji.

Przedstawioną rozprawę doktorską mgr. Piotra Nowaka-Przygodzkiego oceniam bardzo wysoko. Wszystkie z prezentowanych prac są napisane w sposób przejrzysty i z troską o geometryczne zilustrowanie zastosowanych pomysłów. Prace [R1] i [R2] opierają się w zasadniczy sposób na metodach używanych we wspomnianej pracy przez Parusińskiego, jednak autorzy poszli istotnie dalej w swoich rozważaniach i poprzez staranną analizę uzyskali ładne i nietrywialne wzmocnienie wcześniejszych

rezultatów. Natomiast w pracach [R3] i [R4] rozważano klasy homotopii odwzorowań gradientowych w nowym kontekście (odwzorowań lokalnych i relacji otopeni), w którym potrzeba było zupełnie nowych pomysłów zarówno na poziomie technicznym, jak i samych idei. Mam tu na myśli przede wszystkim podanie odpowiednich funkcji standardowych oraz przeprowadzenie otopenijnej klasyfikacji odwzorowań gradientowych. W mojej ocenie, uzyskane rezultaty to fragment solidnej matematyki.

Konkluzja. Biorąc pod uwagę wyżej sformułowane oceny stwierdzam, że przedstawiona rozprawa doktorska mgr. Piotra Nowaka-Przygodzkiego spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim oraz wnoszę o dopuszczenie go do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Aleksander Ćwizewski

Aleksander Ćwizewski