Prof. dr hab. Roman Srzednicki
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego

OPINIA O ROZPRAWIE DOKTORSKIEJ PANA MGR. PIOTRA NOWAK-PRZYGODZKIEGO

Rozprawa doktorska mgr. Piotra Nowak-Przygodzkiego składa się z czterech prac, z których trzy zostały już opublikowane, a jedna została przyjęta do druku. Współautorem wszystkich prac jest Piotr Bartłomiejczyk. Tematyką rozprawy są homotopijne własności gradientowych pól wektorowych ze zwartym zbiorem zer. Głównymi wynikami są:

1. Uzupełnienie i modyfikacja dowodu twierdzenia Parusińskiego.
2. Homotopijna równoważność okręgu z przestrzenią gradientowych pól wektorowych na dysku mających jednakowy stopień Brouwera.
3. Bijektywność inkluzji między klasami otopii pól wektorowych, gradientowych pól wektorowych i pól wektorowych właściwych.

Problem znalezienia homotopijnych niezmienników gradientowych pól wektorowych o zwartym zbiorze zer został postawiony przez prof. Kazimierza Gębę. W roku 1990 Adam Parusiński udowodnił, że klasy homotopii pól gradientowych na n-wymiarowym dysku są wyznaczone przez stopień Brouwera. Twierdzenie Parusińskiego wraz z niemal dosłownym powtórzeniem oryginalnego dowodu zostało umieszczone w monografii S.V. Emelyanov, S.K. Korovin, N.A. Bobylev, A.V. Bulatov, *Homotopy of Extremal Problems*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2007. Faktycznie, ten dowód wymaga pewnego uzupełnienia: brak w nim jest wyjaśnienia istnienia gradientowej homotopii między polami id i $-$id na płaszczyźnie. Taką homotopię skonstruowali (prawdopodobnie nie zauważając luki w oryginalnym dowodzie) A.V. Gordeichuk i V.B. Moroz w pracy *An example of the gradient homotopy of gradient vector fields*, Nonlinear analysis and applications, Tr. Inst. Mat. Natl. Akad. Nauk Belarusi, Minsk, 1998, Tom 1, 30–33.

We wchodzącej w zakres rozprawy przyjętej do druku w Math. Slovaca pracy *Path components of the space of gradient vector fields on the two-dimensional disc* został przedstawiony nieco zmodyfikowany dowód twierdzenia Parusińskiego (w przypadku dwuwymiarowym), zawierający dwie konstrukcje gradientowej homotopii łączącej id z $-$id (różne od konstrukcji Gordeichuka i Moroza, która zapewne nie była znana autorom). Moim zdaniem jest to najbardziej klarowny z dotychczas opublikowanych dowodów tego twierdzenia.

Idea konstrukcji homotopii z pracy w Math. Slovaca została wykorzystana w opublikowanej w Glasgow Math. J. pracy *The homotopy type of the space of gradient vector fields on the two-dimensional disc.* Dowodzi się w niej, że odwzorowanie ewaluacji jest równoważnością homotopijną z przestrzeni gradientowych pól wektorowych mających stopień Brouwera równy k do okręgu S^1. Dowód najtrudniejszego przypadku $k = 0$ jest oparty na deformacji do pewnego standardowego pola gradientowego. Muszę przyznać, że tę pracę czytało mi się gorzej od poprzedniej. Wolałbym, by np. zapis $(a(s), b(s)) \in \mathcal{G}_0$ nie dotyczył zarówno $(a(s), b(s))$ we współrzędnych kartezjańskich jak i biegunowych; nie ułatwia czytania odmienne znaczenie γ pisanego zwykłą i pogrubioną czcionką (przynajmniej dla mnie niemal nieodróżnialnych).

Pojęcie otopii, jako homotopii między określonymi lokalnie polami wektorowymi ze zwartym zbiorem zer, zostało wprowadzone przez Beckera i Gottlieba w roku 1991 (chociaż analogiczne pojęcie pod nazwą „kontynuacji" była wcześniej używana w teorii indeksu Conleya). W pracach opublikowanych w Fund. Math. 214 i Topology Appl. 159, Bartłomiejczyk i Nowak-Przygodzki rozważają klasy otopii $\mathcal{F}$ i klasy otopii właściwych $\mathcal{P}$ pól wektorowych na $\mathbb{R}^n$ w ciągłym, gradientowym (∇) i „gradient-like" (gl) przypadkach i dowodzą, że wszystkie odwzorowania indukowane przez inkluzje między klasami $\mathcal{P}[n]$, $\mathcal{P}_\nabla[n]$, $\mathcal{P}_{\mathrm{gl}}[n]$, $\mathcal{F}[n]$, $\mathcal{F}_\nabla[n]$ oraz $\mathcal{F}_{\mathrm{gl}}[n]$ są bijekcjami (oczywista jest bijektywność między $\mathcal{P}[n]$ i $\mathcal{F}[n]$; surjektywność odwzorowań też nie nastręcza większych problemów). Używając, między innymi, teorii Morse'a, w pracy z Fund. Math. udowodniono najpierw, że inkluzje

$$\mathcal{F}_\nabla \hookrightarrow \mathcal{F}_{\mathrm{gl}} \hookrightarrow \mathcal{F}$$

indukują bijekcje klas otopii, a następnie, że $\mathcal{P}_{\mathrm{gl}} \hookrightarrow \mathcal{F}_{\mathrm{gl}}$ także indukuje bijekcję. Metody dowodu (dość naturalnej) nie dało się bezpośrednio przenieść na brakujący przypadek inkluzji $\mathcal{P}_\nabla \hookrightarrow \mathcal{F}_\nabla$. Złożony, oparty na szeregu lematach dowód w tym ostatnim przypadku został przeprowadzony w pracy opublikowanej w Topology Appl.

Rozprawa doktorska nie zawiera istotnych uchybień redakcyjnych (wszystkie prace wchodzące w jej skład były już poddane korekcie po recenzjach). Zauważyłem jedną drobną usterkę: w pracy w Glasgow Math. J. na stronie 622 w linii 6 od dołu powinno być „from $\mathcal{V}_0^\#$ to $\mathcal{W}_0$". Ponadto dla czytelnika, który chce wydobyć z pracy idee dowodów bez wnikania w szczegóły, kłopotliwe może być wspomniane powyżej (dla pracy w Glasgow Math. J.) używanie tych samych oznaczeń w różnych sytuacjach oraz rozpoczynanie rozdziałów od technicznych lematów, bez sformułowania na początku (a nie na końcu rozdziału) wyniku do którego te lematy zmierzają (jak np. w rozdziale 6 pracy z Fund. Math.). Oczywiście jest to uwaga subiektywna, w żaden sposób nie umniejszająca wartości omawianych tu prac.

W mojej opinii rozprawa doktorska mgr. Piotra Nowak-Przygodzkiego wnosi istotny wkład do analizy nieliniowej i zdecydowanie spełnia wymogi merytoryczne (a także formalne) obecnie obowiązującej ustawy o stopniach naukowych. Oceniam ją jako rozprawę wyróżniającą. Pan Nowak-Przygodzki jest od wielu lat aktywny naukowo; w bazie MathSciNet umieszczono jego 16 prac. Jest współautorem (wraz z, między innymi, Grzegorzem Graffem oraz Jerzym Jezierskim) szeregu ważnych prac dotyczących indeksu punktów stałych iteracji odwzorowań. Uważam, że jest bardzo dojrzałym matematykiem w pełni zasługującym na przyznanie mu stopnia naukowego doktora.

Roman Srzednicki

Kraków, 13 listopada 2013