dr hab. Piotr Mikołaj Sołtan
Katedra Metod Matematycznych Fizyki,
Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski,
E-mail: piotr.soltan@fuw.edu.pl

08.08.2014

Recenzja rozprawy doktorskiej pt. "Struktura zbioru odwzorowań dodatnich między niskowymiarowymi algebrami macierzowymi"

mgr. Tomasza Ignacego Tylca

Niniejszą recenzję opracowano na zlecenie Dziekana Wydziału Matematyki Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego, prof. dr. hab. Piotra Bojarskiego z dnia 10 czerwca 2014 roku.

1 Uwagi ogólne

Praca doktorska mgr. Tylca poświęcona jest poszerzaniu wiedzy na temat odwzorowań dodatnich pomiędzy algebrami macierzy $M_n(\mathbb{C})$ i $M_m(\mathbb{C})$ dla małych $n, m \in \mathbb{N}$ ze szczególnym uwzględnieniem przypadku $m = n = 2, 3$. Motywacja do badania takich odwzorowań pochodzi z fizyki kwantowej i jest ona pokrótce przedstawiona we wstępie do dysertacji. Tematyka ta badana jest od lat siedemdziesiątych XX w., a mimo to nadal wiemy raczej niewiele o geometrii zbioru odwzorowań dodatnich pomiędzy niskowymiarowymi algebrami macierzowymi. Praca doktorska mgr. Tylca stanowi istotny i ciekawy – być może również obiecujący – wkład w opis owej geometrii.

Z punktu widzenia tzw. czystej matematyki bardzo ciekawym elementem rozumowania jest bardziej abstrakcyjna niż w dotychczasowych publikacjach analiza izomorfizmu Jamiołkowskiego-Choi, którego izometryczność dla normy dualnej (sprzężonej) do projektywnej normy na iloczynie tensorowym algebry $M_n(\mathbb{C})$ i przestrzeni predualnej do $M_m(\mathbb{C})$ (izomorficznej z $M_m(\mathbb{C})$, ale z inną normą). Być może właśnie takie techniki pozwolą w przyszłości uzupełnić opis geometrii zbioru odwzorowań dodatnich (zachowujących element jednostkowy). Dalsze elementy pracy mgr. Tylca pokazują jednak, że wspomniany wyżej "teoretyczny" zabieg nie pozwala jeszcze na podanie takiego pełnego opisu.

2 Struktura i techniczna strona pracy

Struktura recenzowanej pracy jest klarowna i dobrze wyważona. Po krótkim wstępie, spisie używanych w pracy oznaczeń i uwagach dotyczących notacji następują dwa rozdziały. Pierwszy zawiera katalog narzędzi stosowanych w rozdziale drugim: podstawy teorii iloczynów tensorowych przestrzeni Banacha z uwzględnieniem uporządkowanych przestrzeni Banacha, pojęcie rozkładu i rzędu Schmidta, elementarne informacje o C^*-algebrach i algebrach von Neumanna, dyskusję odwzorowań dodatnich pomiędzy algebrami operatorów, izomorfizm Jamiołkowskiego-Choi oraz pojęcia odwzorowań ekstremalnych i eksponowanych. W szczególności przypomniane są klasyczne wyniki Størmera i Arvesona.

Praca nabiera rumieńców w drugim rozdziale, w który poświęcony jest badaniu i analizie zbioru $\mathcal{D}_{n,m}$ składającego się z macierzy Choi odpowiadających w izomorfiźmie Jamiołkowskiego-Choi odwzorowaniom dodatnim $M_n(\mathbb{C}) \to M_m(\mathbb{C})$. W szczególnych przypadkach opisane są niektóre ściany wypukłego zbioru $\mathcal{D}_n$ oraz podane są przykłady punktów eksponowanych. W podrozdziale 2.3 wprowadzone jest pojęcie odwzorowania rozkładalnego, opisana jest rodzina *odwzorowań Choi* i wprowadzone oraz badane jest pewne jej uogólnienie.

Podrozdziały 2.4 i 2.5 zawierają bardziej techniczne wyniki związane z macierzami Choi, które są blokowododatnimi (terminologia autora) symetriami i częściowymi symetriami. Wyniki zamieszczone w tych podrozdziałach dotyczą podobieństwa takich macierzy do macierzy Choi transpozycji. Podane są liczne przykłady i szacowania.

Notacja stosowana przez autora pracy jest w większości standardowa i za każdym razem dość dokładnie tłumaczona. Jedynym wyjątkiem jest oznaczenie używane na iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta, który oznaczany jest tak samo jak uporządkowana para wektorów z tej przestrzeni. Prowadzi to do niespecjalnie zgrabnych fragmentów takich jak np. paragraf definiujący normę Hilberta-Schmidta na stronie 20. Jest to tym bardziej dziwne, że autor konsekwentnie używa notacji bra/ket Diraca, co sugerowałoby zapis $\langle\cdot|\cdot\rangle$ dla iloczynu skalarnego.

Jak wiadomo, w pracy o objętości około siedemdziesięciu stron nie sposób uniknąć małych błędów językowo-typograficznych. Nie dziwi więc pewna ich liczba w recenzowanej dysertacji. Mimo wspomnianej we wstępie do pracy korekty językowej, można dostrzec całkiem sporo niezręczności. Podobnie jest z odwołaniami i innymi elementami struktury pracy. Przykładowo stwierdzenie 1.11 jest w którymś miejscu nazwane lematem 1.11, a definicja odwzorowania rozkładalnego podana jest po użyciu tego pojęcia (części 2.2 i 2.3). Jednak takie niewielkie usterki nie rzutują na całość wysiłku autora i stanowią chleb powszedni pracy naukowej.

3 Strona merytoryczna pracy

Uzyskane przez mgr. Tylca wyniki przedstawione w drugim rozdziale pracy są nowe i ciekawe. Uwagę zwracają wysoce nietrywialne rezultaty takie jak twierdzenie 2.16, podające dokładną wartość normy α macierzy w_n^- związanej z odwzorowaniem Choi, twierdzenie 2.22 oraz następująca po nim dyskusja niemożliwości uogólnienia go (a w każdym razie techniki jego dowodu) na wyższe wymiary. Uzyskane rezultaty z pewnością poprawiają nasze rozumienie geometrii zbioru $\mathcal{D}_n$ dla małych n.

Jednym z kluczowych punktów rozumowania jest izometryczność odwzorowania $\phi \mapsto \rho_\phi$ dla odpowiedniej normy na $M_n(\mathbb{C}) \otimes M_m(\mathbb{C})$ (gdzie ϕ jest odwzorowaniem, a ρ_ϕ jego macierzą Choi). W opinii recenzenta jest to bardzo elegancki wynik, który zapewne będzie bardzo pomocny w dalszych badaniach zbioru $\mathcal{D}_{n,m}$, a być może także szerszych klas odwzorowań pomiędzy algebrami macierzowymi (i odpowiadających im macierzy Choi). Prezentacja tej tematyki recenzowanej rozprawie dobitnie pokazuje, że jej autor gruntownie przemyślał i zrozumiał przedmiot badań. Jednak teoria iloczynów tensorowych przestrzeni Banacha jest najeżona pułapkami i w kilka z nich doktorant dał się złapać. Nie są prawdziwe zawierania opisane dwoma ostatnimi formułami na stronie 28. To, że norma projektywna na algebraicznym iloczynie tensorowym majoryzuje wszystkie inne tzw. normy krzyżowe (*cross norms*), nie dowodzi, że iloczyn projektywny wkłada się w inne uzupełnienia tego iloczynu. Podobnie ma się rzecz z tezą lematu 1.24. Symbol iloczynu tensorowego użyty w tym lemacie nie jest udekorowany żadną literką, a więc nie wiadomo jaki to miałby być iloczyn. Z kontekstu można domyślać się, że chodzi o tak zwany iloczyn "przestrzenny", ale wtedy, jeśli algebry $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są nieskończenie wymiarowe, nie jest jasne jak rozszerzyć odwzorowanie $\mathrm{id} \otimes \chi$ przez ciągłość - najpewniej nie będzie ciągłe. Szczęśliwie wszystkie te małe pomyłki nie burzą podstaw dla właściwych wyników pracy.

Ostatnia uwaga dotyczy bardzo umiejętnie stosowanego w pracy narzędzia, a mianowicie rzędu Schmidta. Jednym z kluczowych wyników jest stwierdzenie 1.11 pochodzące z cytowanej pracy oznaczonej numerem [11]. Wynik ten wygląda na prawdziwy (na ile recenzent dał radę go prześledzić), ale jest bardzo nieprecyzyjnie sformułowany. Sformułowanie to jest niejasne już w cytowanej publikacji i właściwie trudno winić mgr. Tylca za jego powtórzenie. Być może należało jednak uściślić wynik i opatrzyć go jakimiś komentarzami (choćby komentując, że chodzi o podprzestrzenie, których *niezerowe* elementy mają zadany rząd Schmidta i omówić zachowanie rzędu Schmidta przy braniu kombinacji liniowych). Jednak, jak już wspomniałem powyżej, stwierdzenie 1.11 jest prawdziwe i jego zastosowanie w pracy jest nie tylko prawidłowe, ale nawet bardzo sprytne.

4 Konkluzja

Recenzowana praca doktorska stoi na dobrym poziomie technicznym i naukowym. Jej tematyka jest nowoczesna i wpisuje się w najnowsze trendy badań. Mgr Tylec stawia ciekawe pytania i w dojrzały sposób znajduje odpowiedzi na niektóre z nich. Całość podana jest w przejrzysty sposób, a umieszczone na końcu otwarte problemy posłużą za motywację do dalszych badań.

Nie ulega najmniejszej wątpliwości, że recenzowana praca spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane dysertacjom doktorskim. Tym samym stawiam wniosek o dopuszczenie pana Tomasza Ignacego Tylca do następnych etapów przewodu doktorskiego.

Piotr Sołtan

Piotr Mikołaj Sołtan