

**Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Tomasza Tylca
pt. *Struktura zbioru odwzorowań dodatnich między
niskowymiarowymi algebraami macierzowymi***

Zgodnie tytułem rozprawy, tematem badań naukowych mgr. Tomasza Tylca, które złożyły się na jego doktorat były odwzorowania dodatnie między algebraami macierzy, czy ogólniej algebraami operatorów liniowych. Odwzorowania takie, tzn. odwzorowania liniowe z definicji zachowujące dodatniość operatorów, były od dłuższego czasu obiektem zainteresowania z punktu widzenia mechaniki kwantowej, za ich pomocą bowiem, można reprezentować najogólniejsze, dopuszczalne przez mechanikę kwantową przekształcenia, którym może podlegać układ kwantowy. Zagadnienie struktury zbioru odwzorowań dodatnich ma więc dla mechaniki kwantowej zasadnicze znaczenie. Szczególnie ciekawy jest tu związek odwzorowań dodatnich z korelacjami kwantowymi w układach złożonych. Otóż kwantowa ewolucja podukładów układów złożonych jest opisana odwzorowaniami całkowicie dodatnimi, których opis strukturalny dany jest w terminach operatorów Krausa, to dzieje się tak tylko przy dodatkowym założeniu, że stan początkowy stan całego układu był separowalny. W tym sensie odwzorowania dodatnie nie są "w niczym gorsze" od operatorów całkowicie dodatnich - odwzorowania dodatnie, ale nie całkowicie dodatnie, także mogą poprawnie opisywać dynamikę kwantową. Niejako komplementarną właściwością odwzorowań dodatnich, które nie są całkowicie dodatnie, jest efektywna możliwość wykrywania za ich pomocą splątania, jak to zostało pokazane w pracy Horodeckich z roku 1996. Dlatego też gwałtowny rozwój informatyki kwantowej, dla której splątanie jest jednym z głównych "zasobów", spowodował nową intensyfikację badań nad odwzorowaniami dodatnimi. Ponieważ zagadnienie ich efektywnego opisu okazuje się być problemem nadspodziewanie trudnym, każdy drobny krok w tym obszarze ma duże znaczenie.

Ten nieco przydługi wstęp był niezbędny, aby zrozumieć istotny wkład, jaki wnosi rozprawa doktorska pana mgr. Tylca do problematyki. Zajął się on w swoich badaniach szeregiem aspektów struktury zbioru odwzorowań dodatnich, m. in. własnościami geometrycznymi zbioru wynikającymi z wypukłości tego zbioru. Strukturalny opis zbioru wypukłego jest koncepcyjnie prosty, jeśli tylko znane są punkty ekstremalne tego zbioru. Twierdzenie Kreina-Milmana pozwala wówczas na przedstawienie dowolnego punktu zbioru wypukłego w postaci kombinacji wypukłej punktów ekstremalnych (ewentualnie, elementu domknięcia zbioru takich kombinacji). Jednak identyfikacja punktów ekstremalnych jest zagadnieniem dalece nietrywialnym nawet w wypadku niskich wymiarów, zasadnicze trudności pojawiają się już przy przejściu od wymiaru 2 do wymiaru 3. Teoria odwzorowań dodatnich nabiera dodatkowych aspektów w wypadku gdy przestrzenie, w których działają operatory są nieskończenie wymiarowe. Skończenie-wymiarowe przestrzenie liniowe są tu zastąpione przez przestrzenie Banacha, a zamiast algebry macierzy rozpatrywać należy ogólne C^* -algebry. Z obszaru algebry liniowej przechodzimy do analizy funkcjonalnej, co wymaga dodatkowej dbałości w definiowaniu i operowaniu takimi obiektami, jak np. fundamentalny z

punktu widzenia kwantowych układów złożonych, iloczyn tensorowy przestrzeni liniowych i algebr. Przypadek nieskończeniewymiarowy pozostaje, co oczywiste, w centrum zainteresowania mechaniki kwantowej, choć w informatyce kwantowej często możemy się ograniczyć do wymiarów skończonych z uwagi na charakter rozpatrywanych układów kwantowych, takich jak układy spinów, których sprzężenie z przestrzennymi stopniami swobody może być pominięte lub układy, w których tylko skończona liczba wzbudzeń ma istotne znaczenie. w każdym jednak wypadku ograniczenie do przestrzeni skończeniewymiarowej będzie tylko, mniej lub bardziej realistycznym, przybliżeniem opisu nieskończeniewymiarowego.

Rozprawa doktorska pana mgr. Tomasza Tylca składa się z dwóch istotnych rozdziałów poprzedzonych kilkustronicowym "Wstępem" zawierającym m.in. krótki opis problematyki odwzorowań dodatnich, oraz zawartości rozprawy.

Pierwszy z dwóch rozdziałów ma w dużym stopniu charakter monograficzny i zawiera problematykę odwzorowań dodatnich w ujęciu nieskończeniewymiarowym (które, oczywiście, daje się zastosować do wymiaru skończonego). Materiał przedstawiony jest z dużą dbałością o ścisłość matematyczną, tak niezbędną, jak już wspominałem powyżej, w tym wypadku. Taka monograficzna, spójna i ogólna prezentacja zagadnień jest sama w sobie godna uwagi i ważna dla literatury przedmiotu - nie znam bowiem podobnego ujęcia. Na tym jednak zalety tej części pracy się nie kończą, zawiera ona bowiem również oryginalne wyniki autora. Takim wynikiem jest, np., pokazanie różnic między zbiorami odwzorowań ekstremalnych w przypadku dwu- i trójwymiarowym (Lemat 1.32). Rozdział ten zawiera również spostrzeżenie, istotne z punktu widzenia dalszej części pracy, że tzw. izomorfizm Jamiołkowskiego-Choi może być traktowany jako izometria. Izomorfizm Jamiołkowskiego-Choi, w wypadku skończeniewymiarowym, przekształca zbiór odwzorowań liniowych między dwoma algebraми macierzy w zbiór operatorów liniowych na iloczynie tensorowym tych algebr, a w nieskończeniewymiarowym uogólnieniu, szczegółowo omówionym w pierwszej części rozprawy, wyjściowe odwzorowania liniowe są między C^* -algebra i algebra von-Neumana, a obrazem odpowiednio zdefiniowany ich iloczyn tensorowy i, ze względu na swoje właściwości, stanowi naturalne narzędzie badania dodatniości odwzorowań.

Geometria zbioru odwzorowań dodatnich na algebraх macierzowych skończonego wymiaru jest głównym tematem drugiego, a zarazem ostatniego, rozdziału pracy doktorskiej pana mgr. Tylca. Zasadniczo, w obszarze zainteresowań pozostaje tu wymiar 3 (jak już wspominałem powyżej, nierozwiązane dotychczas problemy pojawiają się już tutaj), choć część wyników dotyczy też wyższych, skończonych wymiarów. Rozdział 2. składa się z pięciu podrozdziałów poświęconych kolejno:

1. charakterystyce zbioru macierzy będących obrazami izomorfizmu Jamiołkowskiego-Choi odwzorowań dodatnich zachowujących identyczność w terminach normy na przestrzeni stanów, tzn. właśnie owej normy dającej izometryczność odwzorowania Jamiołkowskiego-Choi po stronie obrazu. Podrozdział ten zawiera kilka interesujących spostrzeżeń dotyczących ścian tego zbioru.

2. Punktom ekstremalnym i eksponowanym zbioru odwzorowań dodatnich zachowujących identyczność. Na uwagę zasługuje to identyfikacja pewnego podzbioru zawierającego gęsty podzbiór punktów ekstremalnych w przypadku dwuwymiarowym (Twierdzenie 2.12).
3. Dyskusji pewnego uogólnienia tzw. odwzorowania Choi (historycznie jednego z pierwszych przykładów odwzorowań nierozkładalnych) na wymiary wyższe niż 3, dla którego to wymiaru odwzorowanie to było oryginalnie zdefiniowane. Rzuca to pewne światło na istotne różnice między zbiorami odwzorowań dodatnich zachowujących identyczność w przypadku trój- i czterowymiarowym.
4. Rozszerzeniu z przypadku dwuwymiarowego na trójwymiarowy charakterystyki symetrii spośród elementów zbioru odwzorowań dodatnich zachowujących identyczność poprzez lokalną równoważność transpozycji na poziomie macierzy Choi. Tu również okazuje się, że przejście do wyższych wymiarów wprowadza dodatkowe komplikacje, uniemożliwiające dalsze rozszerzenie tego wyniku.
5. Analizie częściowych symetrii. Opisane tu badania miały, jak rozumiem, na celu głównie znalezienie postaci blokowododatnich częściowych symetrii w przypadku trójwymiarowym, trudno mi jednak wskazać jakiś spektakularny ich sukces.

Najbardziej interesujące wydały mi się badania wspomniane powyżej w punktach 3. i 4. pokazujące jak struktura zbioru odwzorowań dodatnich komplikuje się ze wzrostem wymiaru. Oczywiście jest to fakt powszechnie znany i często przytaczany, w szczególności przy porównywaniu przypadku dwu- i trójwymiarowego. W rozprawie pokazano na konkretnych przykładach, co dzieje się przy przechodzeniu do wymiaru 4 i wyższych.


Praca, we fragmentach dotyczących poszczególnych twierdzeń i dowodów napisana jest bez zarzutu. Dowody i rozumowania są podane przejrzysto przy zachowaniu należytego rygoru matematycznej ścisłości. Podstawowym jej mankamentem jest barak jakiegokolwiek syntetycznego podsumowania, pozwalającego czytelnikowi na wyrobienie sobie poglądu na wagę zmieszczonych w niej rezultatów, ich znaczenie dla teorii odwzorowań dodatnich na algebrach macierzy, czy ewentualne zastosowania w innych obszarach matematyki, czy fizyki matematycznej. Dotyczy to głównie drugiej części pracy, gdyż, jak już powyżej wspomniałem, część pierwsza jest bardzo dobrym monograficznym ujęciem przypadku nieskończeniowym. Część druga pracy, jak pisze autor we "Wstępie", jest w istocie 'skutkiem ubocznym' pierwotnego celu badań tzn. próby scharakteryzowania zbioru odwzorowań dodatnich za pomocą jego punktów eksponowanych. Niestety odbiło się to na strukturze rozprawy. Zawiera ona wiele ciekawych i ważnych wyników, bez próby ich syntetycznego powiązania.

Redakcja tekstu jest dobra, znalazłem tylko kilka mało istotnych przejęzyczeń i błędów typograficznych nie wpływających w żadnym stopniu na klarowność wywodu. Notacja i definicje są przejrzyste. Jedynym moim zastrzeżeniem jest tu to, że wprowadzony Twierdzeniem 1.15 izomorfizm jest właśnie izomorfizmem Jamiołkowskiego-Choi czytelnik musi przebiegle odgadnąć z tytułu podrozdziału.

Autor rozprawy wykazuje się, dużą znajomością tematyki i swobodnie się porusz w literaturze przedmiotu. świadczy też o tym obszerna i wyczerpująca bibliografia.

Podsumowując stwierdzam, że rozprawa pana mgr. Tomasza Tylca pt. *Struktura zbioru odwzorowań dodatnich między niskowymiarowymi algebraami macierzowymi* spełnia wszelkie wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane pracom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie go do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Warszawa, 7.07.2014


prof. dr hab. Marek Kuś