Struktura zbioru odwzorowań dodatnich między niskowymiarowymi algebrami macierzowymi

Tomasz Ignacy Tylec

Gdańsk, 2 czerwca 2014 r.

Streszczenie

Stożek odwzorowań dodatnich odgrywa kluczową rolę zarówno w fizyce (teoria układów dynamicznych), w teorii informacji kwantowej (klasyfikacja stanów splątanych), jak i w matematyce (m.in. teoria algebr operatorowych). Z fizycznego punktu widzenia, szczególnie istotny jest wypukły podzbiór odwzorowań dodatnich, które zachowują element jednostkowy algebry obserwabli. Opis struktury tego zbioru jest głównym przedmiotem tej pracy.

Pierwsza część rozprawy ma charakter ogólny i wprowadzający. Zebrane są w niej w spójny sposób najważniejsze pojęcia z teorii iloczynów tensorowych algebr Banacha. Jest to kluczowe narzędzie, które pozwala sformułować izometryczne uogólnienie izomorfizmu Jamiołkowskiego-Choi (również w przypadku nieskończenie wymiarowych algebr operatorowych). Wszelkie niepublikowane dotąd wnioski i stwierdzenia, które w tej części pracy można odnaleźć, wypływają w elementarny sposób z klasycznej monografii Grothendiecka *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.*

Wspomniana izometryczność zastosowanego uogólnienie izomorfizmu Jamiołkowskiego-Choi ma znaczenie fundamentalne, gdyż dzięki niej izomorfizm zachowuje strukturę geometryczną. W oparciu o to, przeprowadzona jest analiza pewnych własności geometrycznych zbioru odwzorowań dodatnich zachowujących element jednostkowy między skończenie wymiarowymi algebrami macierzowymi $M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$. Temu zagadnieniu poświęcona jest druga część pracy.

Zidentyfikowany został podzbiór $\mathfrak{D}_n$ macierzy Choi z $M_n(\mathbb{C}) \otimes M_n(\mathbb{C})$ odpowiadający tym odwzorowaniom. Określono pewne ogólne własności elementów z $\mathfrak{D}_n$. Przedyskutowany został podział tego zbioru, który jest indukowany własnościami odpowiednich odwzorowań dualnych.

W dalszej kolejności podjęto próbę odnalezienia wszystkich odwzorowań eksponowanych w przypadku $M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$. Zidentyfikowano dużą klasę takich odwzorowań, jednak jak się okazuje, poza tą klasą wciąż istnieje podzbiór odwzorowań eksponowanych, który jest gęsty w zbiorze odwzorowań ekstremalnych. Wskazano również jak sytuacja się komplikuje przy przejściu do przypadku $M_3(\mathbb{C}) \to M_3(\mathbb{C})$.

Następnie, przeanalizowano szczegółowo własności rozkładu macierzy Choi odwzorowania Choi [Lin. Alg. Appl. 10, 285 (1975)]. Rozkład ten został po raz pierwszy dyskutowany w [J. Math. Phys. 54, 073508 (2013)]. Zbadano związek tego rozkładu z elementami rodziny odwzorowań Choi [Lin. Alg. Appl. 171, 213 (1992)]. Na tej podstawie podjęto próbę uogólnienia tejże rodziny na przypadki odwzorowań $M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ dla $n \geq 4$.

W następnym kroku, przeanalizowano elementy $\mathfrak{D}_n$ będące blokowododatnimi samosprzężonymi operatorami unitarnymi. Gdy $n = 2, 3$ odwzorowania odpowiadające tym elementom są unitarnie równoważne transpozycji. Przedyskutowano szczegółowo trudności związane z uogólnieniem tego wyniku na $n \geq 4$. Przedstawiono argumenty wskazujące na to, że w $\mathfrak{D}_9$ mogą istnieć samosprzężone operatory unitarne, które odpowiadają odwzorowaniom nie równoważnym transpozycji. Rozprawę kończy krótka dyskusja macierzy Choi, które są samosprzężonymi częściowymi izometriami.

Rozprawa powstała dzięki wsparciu grantu Fundacji na Rzecz Nauki Polskiej
MPD/2009-3/4 *Physics for future quantum-based information technologies.*

INNOWACYJNA GOSPODARKA
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

FNP
Fundacja na rzecz Nauki Polskiej

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO