Autoreferat

1. Imiona i nazwisko: **Tomasz Bernard Dzido**

2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe:

- dyplom magistra matematyki, Uniwersytet Gdański, Wydział Matematyki i Fizyki, 2000;
- stopień doktora matematyki, Uniwersytet Gdański, Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, 2006.

3. Dotychczasowe zatrudnienie w jednostkach naukowych:

- stanowisko asystenta w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego w latach 2000–2006;
- stanowisko adiunkta w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego w latach 2006–2008;
- stanowisko adiunkta w Wyższej Szkole Bankowej w Gdańsku od roku 2006;
- stanowisko adiunkta w Instytucie Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego od roku 2008.

4. Osiągnięcie wynikające z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki stanowi jednotematyczny cykl publikacji pod tytułem:

„Problemy ramseyowskie w wybranych klasach grafów”.

Lista publikacji wchodzących w skład ww. osiągnięcia:

[A1] T. Dzido, R. Fidytek, On some three color Ramsey numbers for paths and cycles, Discrete Mathematics 309 (2009) 4955–4958.

[A2] T. Dzido, A note on Turán numbers for even wheels, Graphs and Combinatorics 29 (2013) 1305–1309.

[A3] J. Dybizbański, T. Dzido, On some Ramsey numbers for quadrilaterals versus wheels, Graphs and Combinatorics 30 (2014) 573–579.

[A4] J. Dybizbański, T. Dzido, S. Radziszowski, On some Zarankiewicz numbers and bipartite Ramsey numbers for quadrilateral, Ars Combinatoria 119 (2015) 275–287.

[A5] J. Cyman, T. Dzido, J. Lapinskas, A. Lo, On-line Ramsey numbers for paths and cycles, Electronic Journal of Combinatorics 22 (2015) #P1.15.

Poniżej znajduje się omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników.

Wstęp

Twierdzenie, nazwane w późniejszych latach twierdzeniem Ramseya, zostało udowodnione przez Ramseya i opublikowane krótko po jego śmierci w 1930 roku [38]. Jedno z jego możliwych, współczesnych sformułowań w języku teorii grafów mówi, że dla każdej liczby $k \in N$ istnieje liczba $t \in N$ taka, że dowolne pokolorowanie krawędzi grafu pełnego K_t dwoma kolorami zawiera monochromatyczny podgraf pełny rozmiaru k. Najmniejsze takie t nazywamy *liczbą Ramseya* i oznaczamy ją przez $r(k)$. Pierwsza praca zawierająca wartości liczb Ramseya to opublikowana w 1955 roku praca Greenwood i Gleason [20]. Ramsey nie badał tego typu problemów.

Bardzo szybko popularne stały się liczby Ramseya dla grafów innych niż grafy pełne. *Dwukolorową liczbą Ramseya* dla grafów G i H, oznaczaną przez $R(G, H)$, nazywamy najmniejsze takie t, że dowolne pokolorowanie krawędzi grafu K_t dwoma kolorami, powiedzmy czerwonym lub niebieskim, zawiera czerwoną kopię grafu G lub niebieską kopię grafu H. Analogicznie definiuje się liczby Ramseya dla większej liczby grafów i kolorów, a także dla hipergrafów. W kolejnych latach powstały liczne nieklasyczne odmiany liczb Ramseya, na przykład dwudzielne, planarne, on-line, indukowane, lokalne, diagonalne, geometryczne, tęczowe, liniowe i inne. Często aktualizowane „Small Ramsey Numbers" Radziszowskiego [37] zawiera przegląd znanych klasycznych liczb Ramseya. Wiele artykułów skupia się na asymptotycznym podejściu do tematu. Niestety, w przypadku dokładnych wartości od wielu lat postęp jest bardzo niewielki i to dla wielu liczb Ramseya. Dla przykładu odnotujmy, że najnowszy dokładny wynik dla dwukolorowej liczby Ramseya dla dwóch grafów pełnych to $r(4, 5) = 25$ i został on uzyskany przez McKaya i Radziszowskiego w 1995 roku. Zatem od 20 lat nie ma tutaj poprawy, mimo że popularność tej tematyki jest duża. W przypadku trójkolorowych liczb tego typu, w pracy Greenwood i Gleason z 1955 roku [20] przedstawiono wynik $r(3, 3, 3) = 17$. Dopiero w 2014 roku w pracy Codish, Frank, Itzhakov i Miller [13] pojawił się drugi rezultat, mianowicie $r(3, 3, 4) = 30$. Przez wiele lat trwało zawężanie oszacowań, a znacznego postępu dokonali tu Piwakowski i Radziszowski w 1998 roku [34] ($30 \leqslant r(3, 3, 4) \leqslant 31$). Analizując dokładniej historię badań, można pokusić się o wniosek, że im bardziej gęsty graf, tym trudniej jest wyznaczyć dla niego wartość liczby Ramseya.

Istnieje wiele tematów badań, wiele otwartych problemów i niewiadomych w teorii Ramseya, część z nich przedstawi poniższe omówienie. Wielu szeroko uznanych badaczy pracowało i pracuje nadal w tej tematyce. Dla przykładu można tu wymienić kilka nowszych artykułów następujących badaczy: Alon [4], Alon i Kostochka [2], [3], Baskoro i inni [5], Conlon i Sudakov [14], Nešetřil [30], Radziszowski [47], czy West [52]. Soifer w swojej książce z 2009 roku [43] przedstawia nie tylko rezultaty ale i znanych badaczy pracujących między innymi w teorii Ramseya.

Teoria Ramseya ma szerokie zastosowanie w różnych działach matematyki i informatyki, spośród których wymienić można teorię liczb, algebrę, geometrię, topologię, logikę oraz teorię informacji. Jest przydatna przy budowie i analizowaniu różnego typu sieci komunikacyjnych. Frederickson i Lynch [19] wykorzystali twierdzenie Ramseya w problemie obliczeń rozproszonych, Snir [45] wykorzystał je do problemu przeszukiwania posortowanych tablic przy wykorzystaniu różnych modeli obliczeń równoległych. Więcej o zastosowaniach można przeczytać w przeglądowej pracy Rosty pod tytułem „Ramsey Theory Applications” [40].

Trójkolorowe liczby Ramseya dla ścieżek i cykli

W 2005 roku autor niniejszego omówienia rozpoczął badanie liczb Ramseya postaci $R(P_i, P_j, C_k)$ [P1] i otrzymał szereg pierwszych dokładnych wartości liczb tego typu. Praca ta była później kontynuowana przez wielu autorów, między innymi w artykułach Bielak [8], Omidi, Raeisi [31], Shao, Xu, Shi, Pan [41]. W 2009 roku w pracy [A1] (wspólnej z R. Fidytkiem) otrzymano uogólnienie wcześniejszych rezultatów w postaci następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1 ([A1])**.** *Niech i, k oraz m będą liczbami naturalnymi takimi, że $m \geqslant 3$ jest nieparzyste, $k \geqslant m$ oraz $k > \frac{3i^2-14i+25}{4}$, gdy i jest nieparzyste, oraz $k > \frac{3i^2-10i+20}{8}$, gdy i jest parzyste. Wtedy*

$$R(P_i, P_k, C_m) = 2\left(k + \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor\right) - 3.$$

W dowodzie tego wyniku zastosowano twierdzenia związane z pancyklicznością (twierdzenie Brandta [11]) oraz z wielkością maksymalnych możliwych cykli w grafie (twierdzenia Woodalla [53] i Caccetta-Vijayan [12]). Metody te nie były wcześniej szerzej stosowane, natomiast były później stosowane przez wielu autorów do innych liczb Ramseya, na przykład w pracy Broersma, Chen, Zhang [55] z 2015 roku. Warto wspomnieć, że twierdzenie 1 nie rozpatruje wszystkich możliwych przypadków wartości i, k, m, dalsze rezultaty można odnaleźć w Omidi, Raeisi [31]. Można postawić hipotezę, że twierdzenie 1 jest prawdziwe dla innych wartości parametrów i, k, m. Nie zmienia to jednak faktu, że tylko w niektórych przypadkach znamy wartość liczby $R(P_i, P_k, C_m)$ i w ogólności jest to nadal problem otwarty. Jednym z możliwych sposobów rozwiązania tego problemu jest być może wykorzystanie do tego celu trójkolorowych liczb typu $R(P_i, P_j, P_k)$ i $R(C_i, C_j, C_k)$, które także są intensywnie badane (szczegóły odnaleźć możemy w zestawieniu Radziszowskiego [37]).

Liczby Turána

Bardzo silnie związane z liczbami Ramseya i często wykorzystywane w dowodach ich wartości są liczby Turána. *Liczbą Turána*, oznaczaną często przez $ex(n, G)$, nazywamy największą liczbę krawędzi n-wierzchołkowego grafu, który nie zawiera podgrafu izomorficznego z grafem G. Graf na n wierzchołkach nazywamy *ekstremalnym ze względu na graf G*, jeśli nie zawiera on podgrafu izomorficznego z G i ma dokładnie $ex(n, G)$ krawędzi. Już w 1907 roku Mantel [29] odpowiedział na pytanie, ile wynosi $ex(n, K_3)$, jednak samo pojęcie liczb Turána pojawiło się po 1941 roku, w którym to roku Turán rozwiązał problem wartości $ex(n, G)$ dla G będącego grafem pełnym [51]. Od tego czasu powstało wiele artykułów z tej tematyki. W połowie lat 70-tych całkowicie rozwiązano problem liczb Turána dla ścieżek (Faudree, Schelp [18]). Niestety dla cykli wiadomo znacznie mniej, jest wiele problemów otwartych.

Nawet w przypadku cyklu C_4 znamy dokładne wartości tylko dla $n \leqslant 32$ (ostatni rezultat $ex(32, C_4) = 92$ uzyskano w 2009 roku w pracy Shao, Xu i Xu [42]) i jedynie oszacowania dla większych wartości n. Wiele prac zajmujących się liczbami Turána dla cykli zawiera jedynie wyniki dla $ex(n, C_k)$ gdzie k jest uzależnione od n tak jak na przykład w pracy Bollobás [10], gdzie zawarto następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2 ([10])**.** *Załóżmy, że* $2k - 1 \geqslant \frac{1}{2}(n + 3)$. *Wtedy*

$$ex(n, C_{2k-1}) = \binom{n - (2k-1) + 2}{2} + \binom{(2k-1) - 1}{2}.$$

W pracy [A2] postawiono dwa pytania. Czy rezultatów dla cykli nie da się przenieść na koła? Czy liczby Turána dla kół nie zachowują się podobnie jak liczby Turána dla innych grafów?

Koło W_n jest grafem na n wierzchołkach otrzymanym z C_{n-1} przez dodanie nowego wierzchołka i tylu krawędzi, by był on sąsiedni do wszystkich wierzchołków cyklu C_{n-1}. Rozważmy ponadto n-wierzchołkowy, pełny, zbalansowany, d-dzielny graf $T^{n,d}$ taki, że moc każdej jego partycji wynosi $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ lub $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor + 1$.

Klasyczny rezultat Simonovitsa [44] z 1968 roku orzeka:

Twierdzenie 3 ([44])**.** *Niech G będzie grafem, dla którego liczba chromatyczna $\chi(G)$ spełnia warunek $\chi(G) \geqslant d+1$ oraz istnieje w nim krawędź e taka, że $\chi(G - \{e\}) = d$. Wtedy istnieje takie n_0, że jeśli $n > n_0$, to $T^{n,d}$ jest jedynym grafem ekstremalnym ze względu na G.*

Wiadomo, że dla odpowiednio dużego n zachodzi $ex(n, W_{2k}) = ex(n, K_4)$. W artykule [A2] ustalono, jak duże to n powinno być. Korzystając z twierdzenia Woodalla [53] i po ustaleniu własności liczb $ex(n, C_{2k-1})$, uzyskano następującą zależność.

Twierdzenie 4 ([A2])**.** *Dla dowolnego $k \geqslant 3$ oraz $n \geqslant 6k - 10$,*

$$ex(n, W_{2k}) = \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor.$$

Można postawić hipotezę, że liczby Turána typu $ex(n, W_{2k})$ dla innych wartości $n < 6k - 10$ również są równe $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$. Problemem otwartym pozostaje zatem otrzymanie lepszego oszacowania liczby n, dla których zachodzi teza twierdzienia 4. Małe wartości liczb $ex(n, W_{2k})$ dałoby się z pewnością wyznaczyć metodami komputerowymi.

Dwukolorowe liczby Ramseya dla kół i cyklu C_4

W 2002 roku Surahmat i inni [48] udowodnili, że $R(C_4, W_n) = 9, 10$ i 9 odpowiednio dla $n = 4, 5$ i 6. Niezależnie Kung-Kuen Tse [50] pokazał, że $R(C_4, W_n) = 10, 9, 10, 9, 11, 12, 13, 14, 16$ i 17 odpowiednio dla $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ i 13. Następnie, w roku 2005, Surahmat i inni [49] wykazali, że $R(C_4, W_n) \leqslant n + \lceil (n-1)/3 \rceil$.

W pracy [A3] (wspólnej z J. Dybizbańskim) uzyskano dużo lepsze oszacowanie.

Twierdzenie 5 ([A3])**.** *Jeśli n jest liczbą naturalną i $n \geqslant 11$, to*

$$R(C_4, W_n) \leqslant n + \left\lfloor \sqrt{n-2} \right\rfloor + 1.$$

Niech q będzie potęgą liczby pierwszej. Słynny graf Erdős-Rényi $ER(q)$, skonstruowany przez Erdősa and Rényi'ego w 1962 roku, został szczegółowo opisany przez Parsonsa w pracy [33]. Korzystając z własności grafu $ER(q)$, w pracy [A3] (wspólnej z J. Dybizbańskim) otrzymano także następujące:

Twierdzenie 6 ([A3])**.** *Jeśli $q \geqslant 4$ jest potęgą liczby pierwszej, to*

$$R(C_4, W_{q^2+1}) = q^2 + q + 1.$$

Oszacowanie z twierdzenia 5 wydaje się trudne do poprawienia, o czym świadczy praca Wu, Sun, Radziszowski [46] z 2015 roku. Zawarte są w niej między innymi dokładne wartości liczb $R(C_4, W_n)$ dla $n = 35, 36, 37, 44$, które są dokładnie równe $n + \left\lfloor \sqrt{n-2} \right\rfloor + 1$. Inną kontynuację badań z [A3] można odnaleźć w pracach Zhang i innych [54] z 2014 roku oraz Radziszowskiego i innych [47] z 2015 roku.

Wiele problemów otwartych dotyczy kół i innych cykli niż C_4. Najnowsze rezultaty z tego tematu możemy odnaleźć w pracy Broersma, Chen i Zhang [55] z 2015 roku.

Liczby Zarankiewicza i dwudzielne liczby Ramseya

Naturalnym odpowiednikiem liczb Turána dla grafów dwudzielnych są liczby Zarankiewicza. *Liczba Zarankiewicza* $z(m, n; s, t)$ to największa liczba krawędzi w podgrafie $K_{m,n}$, który nie zawiera podgrafu izomorficznego do $K_{s,t}$. Liczby Zarankiewicza i związane z nimi grafy ekstremalne studiowane były przez wielu matematyków w wielu pracach. Warto wymienić tu prace Kövári, Sós, Turán [26], Reiman [39], Irving [25], oraz Goddard, Henning i Oellermann [21]. Podsumowania i przeglądu znanych wyników dostarczył Bollobás w pracy [9].

W pracy [A4] (wspólnej z J. Dybizbańskim i S. Radziszowskim) rozważano jedynie przypadek unikania cyklu C_4, czyli przypadek $s = t = 2$. W związku z tym w dalszej części omówienia odpowiadające temu problemowi liczby Zarankiewicza będą zapisane w formie $z(m, n)$ lub nawet $z(n)$, zamiast odpowiednio $z(m, n; 2, 2)$ lub $z(n, n; 2, 2)$.

Korzystając z własności grafu dwudzielnego odpowiadającego pewnej płaszczyźnie rzutowej w pracy Kövári, Sós, Turán [26] uzyskano:

Twierdzenie 7 ([26]).

$$z(k^2+k+1) = k^3+2k^2+2k+1.$$

W pracy [A4] (wspólnej z J. Dybizbańskim i S. Radziszowskim) kontynuowano te badania i otrzymano następującą własność.

Twierdzenie 8 ([A4]). *Dla liczby naturalnej k będącej potęgą liczby pierwszej, dla $h \in \{1,2,3,4\}$ i dla $n = k^2+k+1-h$ istnieją wolne od C_4 podgrafy grafu $K_{n,n}$ o rozmiarach dających dolne oszacowania $z(n)$ następująco:*

$$z(k^2+k+1-h) \geqslant \begin{cases} k^3+2k^2 & \textit{dla} \quad h=1, \\ k^3+2k^2-2k & \textit{dla} \quad h=2, \\ k^3+2k^2-4k+1 & \textit{dla} \quad h=3, \\ k^3+2k^2-6k+2 & \textit{dla} \quad h=4. \end{cases}$$

W pracy [A4] udało się także uzyskać górne oszacowania liczb $z(k^2+k+1-h)$ dla $h=1,2,3$. Otrzymano równości, które przedstawia następujące:

Twierdzenie 9 ([A4]). *Dla dowolnego k będącego potęgą liczby pierwszej, a także dla $k=1$, zachodzi*

$$z(k^2+k+1-h) = \begin{cases} k^3+2k^2 & \textit{dla} \quad h=1, \\ k^3+2k^2-2k & \textit{dla} \quad h=2, \\ k^3+2k^2-4k+1 & \textit{dla} \quad h=3. \end{cases}$$

Uzyskano także wartość $z(17) = 74$. Oznacza to, że znamy wszystkie wartości $z(n)$ dla $n \leqslant 21$ i najmniejszym nieznanym przypadkiem jest $z(22)$. Najnowsze rozważania na temat różnego typu liczb Zarankiewicza odnaleźć możemy w pracy Damásdi, Héger i Szőnyi [16].

Liczby Zarankiewicza są pomocne w wyznaczaniu wartości lub oszacowań dwudzielnych liczb Ramseya. *Dwudzielną liczbą Ramseya* $b(n_1, \cdots, n_k)$ nazywamy najmniejsze naturalne b takie, że dowolne pokolorowanie krawędzi grafu $K_{b,b}$ przy użyciu k kolorów prowadzi do monochromatycznej kopii grafu K_{n_i,n_i} w i-tym kolorze dla pewnego i, $1 \leqslant i \leqslant k$. Powstało wiele prac zawierających dokładne wartości i oszacowania dwudzielnych liczb Ramseya. Podobnie jak w przypadku klasycznych liczb Ramseya jest wiele problemów otwartych.

Jeśli $n_i = m$ dla wszystkich i, to dwudzielną liczbę Ramseya oznaczamy przez $b_k(m)$. Ustalenie dokładnej wartości nawet takiej liczby jak $b_k(2)$ wydaje się być trudne. Świadczy o tym fakt, że znano tylko rezultaty Beineke i Schwenka, którzy udowodnili że $b_2(2) = 5$ [7] oraz Exoo, który znalazł drugą wartość $b_3(2) = 11$ [17]. Fakt ten stał się inspiracją do rezultatów zawartych w pracy [A4].

Modyfikując nieznacznie konstrukcję Lazebnika i Woldara [28], w pracy [A4] otrzymano następującą nierówność.

Twierdzenie 10 ([A4]). *Jeśli k jest potęgą liczby pierwszej, to*

$$b_k(2) \geqslant k^2 + 1.$$

Kolejne twierdzenie zaprezentowane w pracy [A4] poprawia o 1 ustalone w 1998 roku przez Hattingha i Henninga [24] górne oszacowanie liczby $b_k(2)$ dla wszystkich $k \geqslant 5$.

Twierdzenie 11 ([A4]). *Jeśli $k \geqslant 5$ jest liczbą naturalną, to*

$$b_k(2) \leqslant k^2 + k - 2.$$

Korzystając między innymi z powyżej zaprezentowanych rezultatów dla liczb Zarankiewicza, otrzymano:

Twierdzenie 12 ([A4]).

$$b_4(2) = 19.$$

Najmniejszą nieznaną liczbą tego typu jest więc teraz $b_5(2)$. Warto jednak podkreślić, że z twierdzeń 10 i 11 dostajemy jej całkiem precyzyjne oszacowania.

Twierdzenie 13 ([A4]).

$$26 \leqslant b_5(2) \leqslant 28.$$

Liczby Ramseya on-line

Liczby Ramseya on-line zdefiniowali niezależnie Beck [6] oraz Kurek i Ruciński [27]. Najłatwiej je zrozumieć rozpatrując grę pomiędzy Budowniczym a Malarką, rozgrywaną na nieskończonym zbiorze wierzchołków. W każdej rundzie Budowniczy łączy dwa niesąsiednie wierzchołki krawędzią, a Malarka koloruje ją na czerwono lub niebiesko. Celem Budowniczego jest zmuszenie Malarki do stworzenia monochromatycznej kopii wcześniej ustalonego grafu H w jak najmniejszej możliwej liczbie ruchów. Malarka będzie próbować przeszkodzić temu jak długo się tylko da. *Liczbą Ramseya on-line* $\tilde{r}(H)$ grafu H jest najmniejsza liczba rund, w której Budowniczy osiągnie swój cel, zakładając, że oboje gracze rozgrywają grę optymalnie. Asymetryczna liczba Ramseya on-line $\tilde{r}(G, H)$ to najmniejsza liczba rund, w której Budowniczy zmusi Malarkę do stworzenia czerwonej kopii grafu G lub niebieskiej kopii grafu H, ponownie zakładając, że oboje gracze grają optymalnie.

Teoria Ramseya on-line była dość szeroko rozważana. Najlepsze znane górne oszacowanie liczby $\tilde{r}(K_t)$ mówi, że istnieje stała $c > 0$ taka, że $\tilde{r}(K_t) \leqslant t^{-c\frac{\log t}{\log\log t}} 4^t$ (Conlon [15]). Najlepsze dolne oszacowanie postaci $\tilde{r}(K_t) \geqslant \frac{r(t)-1}{2}$ udowodnił Alon (było ono najpierw przedstawione w pracy Becka [6]). Conlon w pracy [15] udowodnił również, że $\tilde{r}(K_t) \leqslant C^{-t}\binom{r(t)}{2}$ dla pewnej stałej $C > 1$ i nieskończenie wielu wartości t.

Dla ogólnych grafów G, dolne oszacowanie dla $\tilde{r}(G)$ zostało pokazane przez Grytczuka, Kiersteada i Prałata [22]:

Twierdzenie 14 ([22]). *Dla dowolnego grafu G zachodzi*

$$\tilde{r}(G) \geqslant \beta(G)(\Delta(G) - 1)/2 + e(G),$$

gdzie $\beta(G)$ to wielkość najmniejszego pokrycia wierzchołkowego grafu G.

Rozważano wiele różnych ogólnych strategii dla Budowniczego i Malarki. Opis kilku z nich znajdziemy w pracy [A5] (wspólnej z J. Cyman, J. Lapinskasem i A. Lo).

Najprawdopodobniej wyznaczenie dokładnych wartości liczb Ramseya on-line jest trudniejsze niż wyznaczenie dokładnych wartości klasycznych liczb Ramseya. W związku z tym niewiele jest znanych dokładnych wartości tego typu liczb i to nawet dla stosunkowo niedużych grafów. W przypadku gdy G i H są ścieżkami, Grytczuk, Kierstead i Prałat [22] oraz Prałat [35, 36] wyznaczyli dokładne wartości liczb $\tilde{r}(P_{k+1}, P_{l+1})$, gdy $\max\{k, l\} \leqslant 8$ (gdzie P_s jest ścieżką na s wierzchołkach). W pracy [22] podano też następujące oszacowania.

Twierdzenie 15 ([22]). *Dla dowolnych $k, l \in N$, zachodzi*

$$k + l - 1 \leqslant \tilde{r}(P_{k+1}, P_{l+1}) \leqslant 2k + 2l - 3.$$

W pracy [A5] (wspólnej z J. Cyman, J. Lapinskasem i A. Lo) wykorzystując opisaną strategię F-blokowania udało się uzyskać dwa ogólne rezultaty dla liczb Ramseya on-line, które są pierwszymi tego typu ogólnymi wynikami.

Twierdzenie 16 ([A5]). *Dla każdej liczby $l \geqslant 2$ mamy*

$$\tilde{r}(P_3, P_{l+1}) = \lceil 5l/4 \rceil.$$

Ponadto

$$\tilde{r}(P_3, C_l) = \begin{cases} l + 2, & \text{jeśli } l = 3, 4, \\ \lceil 5l/4 \rceil, & \text{jeśli } l \geqslant 5. \end{cases}$$

Dodatkowo podano następujące oszacowania na $\tilde{r}(C_4, P_{l+1})$.

Twierdzenie 17 ([A5]). *Jeśli $l \geqslant 3$, to $2l \leqslant \tilde{r}(C_4, P_{l+1}) \leqslant 4l - 4$. Ponadto $\tilde{r}(C_4, P_4) = 8$.*

W pracy [A5] udało się również w niektórych szczególnych przypadkach poprawić nierówności z twierdzenia 15.

5. Na pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze składają się następujące publikacje:

Artykuły w czasopismach – przed uzyskaniem doktoratu:

[P1] T. Dzido, Multicolor Ramsey numbers for paths and cycles, Discussiones Mathematicae Graph Theory 25 (2005) 57–65.

[P2] T. Dzido, A. Nowik, P. Szuca, New lower bound for multicolor Ramsey numbers for even cycles, Electronic Journal of Combinatorics 12 (2005) #N13.

Artykuły w czasopismach – po uzyskaniu doktoratu:

[P3] T. Dzido, M. Kubale, K. Piwakowski, On some Ramsey and Turán-type numbers for paths and cycles, Electronic Journal of Combinatorics 13 (2006) #R55.

[P4] T. Dzido, R. Zakrzewska, The upper domination Ramsey number $u(4,4)$, Discussiones Mathematicae Graph Theory 26 (2006) 419–430.

[P5] T. Dzido, R. Fidytek, The number of critical colorings for some Ramsey numbers, International Journal of Pure and Applied Mathematics 38 (2007) 433–444.

[P6] T. Dzido, R. Zakrzewska, The nonclassical mixed domination Ramsey numbers, Australasian Journal of Combinatorics 45 (2009) 109–115.

[P7] T. Dzido, H. Furmańczyk, Altitude of wheels and wheel-like graphs, Central European Journal of Mathematics 8 (2010) 319–326.

[P8] J. Dybizbański, T. Dzido, On some Ramsey numbers for quadrilaterals, Electronic Journal of Combinatorics 18 (2011) #P154.

[P9] L. Boza, J. Dybizbański, T. Dzido, Three color Ramsey numbers for graphs with at most 4 vertices, Electronic Journal of Combinatorics 19 (2012) #P47.

[P10] J. Cyman, T. Dzido, A note on on-line Ramsey numbers for quadrilaterals, Opuscula Mathematica 34 (2014) 463–468.

[P11] T. Dzido, K. Krzywdziński, On a local similarity of graphs, Discrete Mathematics 338 (2015) 983–989.

[P12] T. Dzido, K. Krzywdziński, Edit distance measure for graphs, przyjęta do druku w Czechoslovak Mathematical Journal.

[P13] J. Dybizbański, T. Dzido, S. Radziszowski, On some values of three-color Ramsey numbers for paths, przedłożona do druku.

[P14] T. Dzido, A. Jastrzębski, Turán numbers for odd wheels, przedłożona do druku.

Zawartość wszystkich prac, w których brał udział autor rozprawy w całej dotychczasowej karierze naukowej, można podzielić na kilka zasadniczych tematów.

Klasyczne liczby Ramseya

Oprócz prac [A1] i [A3] wchodzących w skład osiągnięcia naukowego, powstały w tej tematyce również prace [P1-P3], [P5], [P8], [P9], [P13]. Prace [P1-P3] stanowiły trzon pracy doktorskiej autora rozprawy. W pracy [P5] (wspólnej z R. Fidytkiem) z pomocą komputera wyznaczono wszystkie kolorowania krytyczne dla liczb $R(K_4, K_5 - e) = 18$ i $R(K_5, K_4 - e) = 15$, co może być pomocne w pracach nad poprawieniem oszacowań liczby $30 \leqslant R(K_5, K_5 - e) \leqslant 34$, które nie zmieniły się od 1992 roku. W pracy [P8] (wspólnej z J. Dybizbańskim) udowodniono, że $R(C_4, C_4, K_4 - e) = 16$, co rozwiązało jeden z otwartych problemów postawionych w pracy Arste, Klamroth, Mengersen [1]. Skorygowano przy tej okazji wartość liczby $R(C_4, P_4, K_4-e)$ z 10, jak błędnie podano w [1], na 11. Przy użyciu komputera uzyskano także szereg nowych oszacowań wielokolorowych liczb Ramseya z cyklem C_4. Praca [P9] (wspólna z L. Bozą i J. Dybizbańskim) to nowa wersja pracy Arste, Klamroth, Mengersen [1] zawierająca przegląd wszystkich wartości i oszacowań trójkolorowych liczb Ramseya dla małych grafów oraz rozwiązanie wielu otwartych problemów. Praca [P13] (wspólna z J. Dybizbańskim i S. Radziszowskim) zawiera wartości nieznanych wcześniej liczb Ramseya $R_3(P_8) = 14$ i $R_3(P_9) = 17$. Wartości te potwierdzają znany wynik $R(P_n, P_n, P_n) = 2n-2+(n \bmod 2)$, który w 2007 roku został udowodniony dla odpowiednio dużego n przez Gyárfás, Ruszinkó, Sárközy oraz Szemerédi [23].

Liczby Ramseya z parametrami dominowania

Artykuły [P4] i [P6] łączą klasyczne liczby Ramseya z parametrami dominowania grafów. *Liczbą Ramseya górnego dominowania* $u(m, n)$ nazywamy najmniejsze takie p, że dowolne 2-pokolorowanie krawędzi grafu K_p kolorem czerwonym lub niebieskim spełnia warunek $\Gamma(B) \geqslant m$ lub $\Gamma(R) \geqslant n$. B i R oznaczają podgraf K_p indukowany odpowiednio przez niebieskie i czerwone krawędzie, a $\Gamma(G)$ to największy rozmiar minimalnego zbioru dominującego grafu G. Praca [P4] (z R. Zakrzewską) zawiera dowód faktu, że $u(4, 4) \leqslant 15$.

W artykule [P6] (wspólnym z R. Zakrzewską) zdefiniowano *nieklasyczną mieszaną liczbę Ramseya dominowania* $v(m, G)$ jako najmniejszą taką n, że dowolne 2-pokolorowanie krawędzi grafu K_n kolorem czerwonym lub niebieskim spełnia warunek, że $\Gamma(B) \geqslant m$ lub istnieje niebieska kopia grafu G. Praca [P6] zawiera dowody wielu wartości liczb $v(m, G)$; do najciekawszych należy $v(3, K_6 - e) = 13$.

Parametr altitude

Praca [P7] (wspólna z H. Furmańczyk) dotyczy jednego z parametrów opisujących etykietowanie krawędzi grafu (czyli nadawanie krawędziom kolejnych numerów od 1 do $|E(G)|$), a mianowicie altitude. Jeśli rozpatrzymy wszystkie możliwe etykietowania $f \in \mathcal{F}$ grafu G i dla każdego z nich znajdziemy długość $h(f)$ najdłuższej ścieżki, w której etykiety rosną, to parametr *altitude* oznaczany przez $\alpha(G)$ możemy zdefiniować następująco:

$$\alpha(G) = \min_{f \in \mathcal{F}} h(f).$$

W pracy [P7] pokazano między innymi, że $\alpha(W_n) = 3$ dla wszystkich $n \geqslant 5$.

Liczby Ramseya on-line

Oprócz pracy [A5] wchodzącej w skład osiągnięcia naukowego, powstała w tej tematyce również praca [P10] (wspólna z J. Cyman), która zawiera dowód kilku dokładnych wartości liczb Ramseya on-line, spośród których najbardziej interesujący jest niekomputerowy dowód faktu, że $\tilde{r}(C_4) = 10$.

Podobieństwo grafów

Artykuły [P11] i [P12] (wspólne z K. Krzywdzińskim) zawierają dokładne wartości i oszacowania dwóch różnych parametrów opisujących podobieństwo grafów. Pierwsza z prac wprowadza parametr $\eta(k, l)$, który jest najmniejszym takim n, że w dowolnej l-elementowej rodzinie n-wierzchołkowych grafów istnieje k-podobna para grafów. Mówimy, że dwa grafy G i H, mające tą samą liczbę wierzchołków n, są *k-podobne* jeśli zawierają wspólny indukowany k-wierzchołkowy podgraf. W artykule pokazano, że $\eta(k, 3) = r(k)$, czyli $\eta(k, l)$ może być traktowane jako uogólnienie liczby Ramseya. Wykazano także szereg dokładnych wartości oraz konstrukcyjnych i asymptotycznych oszacowań.

Druga z prac wprowadza zupełnie inny parametr, niezwiązany z liczbami Ramseya, a mianowicie $g(n, l)$, którego wartość to największe k gwarantujące, że istnieje l grafów na n wierzchołkach, z których każde dwa są odległe o przynajmniej k. Przez *odległość* dwóch grafów Gi F rozumiemy tutaj liczbę krawędzi, które potrzeba dodać lub odjąć z grafu G, by uzyskać graf F. Z ciekawszych rezultatów można wymienić tu następujące:

Twierdzenie 18 ([P12]). *Niech $l \in \{3, 4, 5, 6\}$. Wtedy*

$$\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} \leqslant g(n, l) \leqslant \left\lfloor \frac{\binom{n}{2}}{2} \right\rfloor.$$

Liczby Turána

Ostatnia z prac, a mianowicie [P14] (wspólna z A. Jastrzębskim), przedstawia dowody dokładnych wartości i oszacowań dla liczb Turána dla kół z nieparzystą liczbą wierzchołków. Praca ta stanowi kontynuację badań zaprezentowanych w pracy [A2], w której rozpatrywano koła o parzystej liczbie wierzchołków. Zawiera ona między innymi dokładne wartości liczb $ex(n, W_5)$ i $ex(n, W_7)$, zebrane w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 19 ([P14]).

$$ex(n, W_5) = \begin{cases} \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor & \textit{jeśli } n \neq 2 \ mod\ 4, \\ \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor & \textit{jeśli } n = 2 \ mod\ 4; \end{cases}$$

$$ex(n, W_7) = \begin{cases} \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 & \textit{jeśli } n = 0 \ mod\ 2, \\ \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 & \textit{jeśli } n = 1 \ mod\ 2. \end{cases}$$

W ogólnym przypadku nadal nie są znane rezultaty dla $ex(n, C_4)$ i $ex(n, C_6)$ czyli dla obręczy kół W_5 i W_7.

Literatura

[1] J. Arste, K. Klamroth, I. Mengersen, Three color Ramsey numbers for small graphs, Utilitas Mathematica 49 (1996) 85–96.

[2] N. Alon, J. Balogh, A. Kostochka, W. Samotij, Sizes of induced subgraphs of Ramsey graphs, Combinatorics, Probability and Computing 18 (2009) 459–476.

[3] N. Alon, A. Kostochka, Hypergraph list coloring and Euclidean Ramsey Theory, Random Structures and Algorithms 39 (2011) 377–390.

[4] N. Alon, Size and degree anti-Ramsey numbers, przedłożona do druku i dostępna on-line.

[5] I. Sudarsana, E. Baskoro, H. Assiyatun, S. Uttunggadewa, On the union of graphs Ramsey numbers, Applied Mathematical Sciences 8 (2014) 767–773.

[6] J. Beck, Achievement games and the probabilistic method in: Combinatorics, Paul Erdös is Eighty, Bolyai Society Mathematicas Studies, vol. 1 (1993) 51–78.

[7] L. W. Beineke, A. J. Schwenk, On a bipartite form of the Ramsey Problem, Proceedings of the Fifth British Combinatorial Conference 1975, Congressus Numerantium XV (1976) 17–22.

[8] H. Bielak, Multicolor Ramsey numbers for some paths and cycles, Discussiones Mathematicae Graph Theory 29 (2009) 209–218.

[9] B. Bollobás, Extremal Graph Theory, in: Handbook of Combinatorics, Vol. II, Elsevier, Amsterdam 1995, 1231–1292.

[10] J. A. Bondy, U. S. Murty, Graph Theory with Applications, American Elsevier Publishing Co. INC (1976).

[11] S. Brandt, A sufficient condition for all short cycles, Discrete Applied Mathematics 79 (1997) 63–66.

[12] L. Caccetta, K. Vijayan, Maximal cycles in graphs, Discrete Mathematics 98 (1991) 1–7.

[13] M. Codish, M. Frank, A. Itzhakov, A. Miller, Breaking symmetries in graph coloring problems with degree matrices: the Ramsey number $R(4,3,3) = 30$, przedłożona do druku, arXiv 1409.5189.

[14] D. Conlon, J. Fox, C. Lee, B. Sudakov, Ramsey numbers of cubes versus cliques, Combinatorica (2014), aktualnie dostępna tylko on-line na stronie czasopisma.

[15] D. Conlon, On-line Ramsey numbers, SIAM Journal on Discrete Mathematics 23 (2009) 1954–1963.

[16] G. Damásdi, T. Héger, T. Szőnyi, The Zarankiewicz Problem, Cages, and Geometries, Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica 56 (2013) 3–37.

[17] G. Exoo, A bipartite Ramsey number, Graphs and Combinatorics 7 (1991) 395–396.

[18] R. Faudree, R. Schelp, Path Ramsey numbers in multicolorings, Journal of Combinatorial Theory Series B 19 (1975) 150–160.

[19] G. Frederickson, N. Lynch, Electing a leader in a synchronous ring, Journal of Association for Computing Machinery 34 (1987) 98–115.

[20] R. E. Greenwood, A. M. Gleason, Combinatorial relations and chromatic graphs, Canadian Journal of Mathematics 7 (1955) 1–7.

[21] W. Goddard, M. A. Henning, O. R. Oellermann, Bipartite Ramsey numbers and Zarankiewicz numbers, Discrete Mathematics 219 (2000) 85–95.

[22] J. Grytczuk, H. Kierstead, P. Prałat, On-line Ramsey numbers for paths and stars, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 10 (2008) 63–74.

[23] A. Gyárfás, M. Ruszinkó, G. N. Sárközy, E. Szemerédi, Three color Ramsey numbers for paths, Combinatorica 27 (2007) 35–69.

[24] J. H. Hattingh, M. A. Henning, Bipartite Ramsey Theory, Utilitas Mathematica 53 (1998) 217–230.

[25] R. W. Irving, A bipartite Ramsey Problem and Zarankiewicz numbers, Glasgow Mathematical Journal 19 (1978) 13–26.

[26] T. Kövári, V. T. Sós, P. Turán, On a problem of K. Zarankiewicz, Colloquium Mathematicum 3 (1954) 50–57.

[27] A. Kurek, A. Ruciński, Two variants of the size Ramsey number, Discussiones Mathematicae Graph Theory 25 (2005) 141–149.

[28] F. Lazebnik, A. Woldar, New Lower Bounds on the Multicolor Ramsey Numbers $r_k(4)$, Journal of Combinatorial Theory Series B 79 (2000) 172–176.

[29] W. Mantel W, Problem 28, soln. by H. Gouventak, W. Mantel, J. Teixeira de Mattes, F. Schuh and W.A. Wythoff, Wiskundige Opgaven 10 (1907) 60–61.

[30] J. Nešetřil, P. Ossona de Mendez, Fraternal augmentations, arrangeability and linear Ramsey numbers, European Journal of Combinatorics 30 (2009) 1696–1703.

[31] G. Omidi, G. Raeisi, On multicolor Ramsey number of path versus cycles, Electronic Journal of Combinatorics 18 (2011) #P24.

[32] L. Maherani, G. Omidi, G. Raeisi, M. Shahsiah, On three-color Ramsey numbers of paths, Graphs and Combinatorics (2015), aktualnie dostępna tylko on-line na stronie czasopisma.

[33] T. D. Parsons, Graphs from projective planes, Aequationes Mathematicae 14 (1976) 167–189.

[34] K. Piwakowski, S.Radziszowski, $30 \leqslant R(3,3,4) \leqslant 31$, Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing 27 (1998) 135–141.

[35] P. Prałat, A note on off-diagonal small on-line Ramsey numbers for paths, Ars Combinatoria 107 (2012) 295–306.

[36] P. Prałat, A note on small on-line Ramsey numbers for paths and their generalisations, Australasian Journal of Combinatorics 40 (2008) 27–36.

[37] S. Radziszowski, Small Ramsey numbers, Electronic Journal of Combinatorics Dynamic Survey 1, revision #14 (2014).

[38] F. P. Ramsey, On a problem of formal logic, Proceedings London Mathematical Society 30 (1930) 264–286.

[39] I. Reiman, Über ein Problem von K. Zarankiewicz, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 9 (1958) 269–273.

[40] V. Rosta, Ramsey Theory Applications, Electronic Journal of Combinatorics, Dynamic Survey 13 (2004).

[41] Z. Shao, X. Xu, X. Shi, L. Pan, Some three-color Ramsey numbers, $R(P_4, P_5, C_k)$ and $R(P_4, P_6, C_k)$, European Journal of Combinatorics 30 (2009) 396–403.

[42] Z. Shao, J. Xu, X. Xu, A new Turán number for quadrilateral, Utilitas Mathematica 79 (2009) 51—58.

[43] A. Soifer, The Mathematical Coloring Book, Mathematics of coloring and the colorful life of its creators, Springer (2009).

[44] M. Simonovits, A method for solving extremal problems in graph theory, stability problems, Theory of Graphs, Academic Press, New York (1968).

[45] M. Snir, On parallel searching, SIAM Journal Computing 14 (1985) 688–708.

[46] Y. Sun, Y. Wu, S. Radziszowski, Wheel and star-critical Ramsey numbers for quadrilateral, Discrete Applied Mathematics (2015), aktualnie dostępna tylko on-line na stronie czasopisma.

[47] Y. Sun, Y. Wu, R. Zhang, S. Radziszowski, Ramsey numbers of C_4 versus wheels and stars, Graphs and Combinatorics 31 (2015), aktualnie dostępna tylko on-line na stronie czasopisma.

[48] Surahmat, E. T. Baskoro, S. M. Nababan, The Ramsey numbers for a cycle of length four versus a small wheel, Proceedings of the 11-th Conference Indonesian Mathematics, Malang, Indonesia, July 22-25 (2002) 172–178.

[49] Surahmat, E. T. Baskoro, S. Uttunggadewa, H. J. Broersma, An upper bound for the Ramsey number of a cycle of length four versus wheels, Lecture Notes in Computer Science 3330, Springer, Berlin, (2005) 181–184.

[50] Kung-Kuen Tse, On the Ramsey number of the quadrilaterals versus the book and the wheel, Australasian Journal of Combinatorics 27 (2009) 163–167.

[51] P. Turán P, On an extremal problem in graph theory, Matematikai és Fizikai Lapok 48 (1941) 436–452.

[52] D. West, T. Jiang, K. G. Milans, Degree Ramsey numbers of cycles and blowups of trees, European Journal of Combinatorics 34 (2013) 414–423.

[53] D. R. Woodall, Maximal circuits of graphs I, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 28 (1976) 77–80.

[54] Y. Zhang, H. Broersma, Y. Chen, A remark on star-C_4 and wheel-C_4 Ramsey numbers, Electronic Journal of Graph Theory and Applications 2 (2014) #2.

[55] Y. Zhang, H. Broersma, Y. Chen, Three results on cycle-wheel Ramsey numbers, Graphs and Combinatorics (2015), aktualnie dostępna tylko on-line na stronie czasopisma.

Tomasz Dzido

Gdańsk, 24.03.2015 ....

Tomasz Dzido