Autoreferat

I. Imię i nazwisko: Rafał Filipów

II. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe.

- Stopień doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki uzyskany w 2004 roku w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk w Warszawie. Tytuł rozprawy doktorskiej: *„Własność różnicy w sensie de Bruijna dla rodzin funkcji mierzalnych"*. Promotor: prof. dr hab. Ireneusz Recław.

- Tytuł magistra matematyki uzyskany w 2000 roku na Wydziale Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Gdańskiego. Tytuł pracy magisterskiej: *„Własność różnicy dla rodzin funkcji mierzalnych"*. Promotor: prof. dr hab. Ireneusz Recław.

III. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych.

- Od października 2004: adiunkt w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego.

- Od października 2007 do września 2008: staż podoktorski w Ben-Gurion University of the Negev w Izraelu.

- Od września 2002 do grudnia 2002: staż przeddoktorski w Fields Institute for Research in Mathematical Sciences w Kanadzie.

IV. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.):

Cykl 6 publikacji zatytułowany

„Zbieżność ideałowa i kombinatoryka nieskończona"

składający się z następujących prac:

[H1] R. Filipów, N. Mrożek, I. Recław, and P. Szuca, *Ideal convergence of bounded sequences*, J. Symbolic Logic **72** (2007), no. 2, 501–512.

[H2] R. Filipów and P. Szuca, *On some questions of Drewnowski and Łuczak concerning submeasures on* $\mathbb{N}$, J. Math. Anal. Appl. **371** (2010), no. 2, 655–660.

[H3] R. Filipów and P. Szuca, *Rearrangement of conditionally convergent series on a small set*, J. Math. Anal. Appl. **362** (2010), no. 1, 64–71.

[H4] R. Filipów and P. Szuca, *Three kinds of convergence and the associated* $\mathcal{I}$*-Baire classes*, J. Math. Anal. Appl. **391** (2012), no. 1, 1–9.

[H5] R. Filipów, *On Hindman spaces and the Bolzano-Weierstrass property*, Topology Appl. **160** (2013), no. 15, 2003–2011.

[H6] R. Filipów, *The reaping and splitting numbers of nice ideals*, Colloq. Math. **134** (2014), no. 2, 179–192.

Poniżej znajduje się omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania. W całym autoreferacie prace cytowane jako [H1]–[H6] odnoszą się do powyższego cyklu prac; prace cytowane jako [D1]–[D5] i [P1]–[P11] odnoszą się do moich pozostałych publikacji, których pełna lista znajduje się na stronie 12 autoreferatu; a prace cytowane jako [1]–[∞] są pracami innych autorów, których pełna lista znajduje się na stronie 19.

Filip

1. Wstęp

W wymienionych pracach rozważamy zbieżność ideałową ciągów punktów i funkcji, do badania której używamy kombinatoryki nieskończonej. Rodzina $\mathcal{I}$ podzbiorów $\mathbb{N}$ jest *ideałem*, gdy jest zamknięta ze względu na branie podzbiorów i skończonych sum swoich elementów. Ciąg (x_n) w przestrzeni topologicznej X jest *$\mathcal{I}$-zbieżny* (lub *ideałowo zbieżny*, gdy ideał $\mathcal{I}$ jest znany z kontekstu) do $x \in X$, gdy dla każdego otoczenia U punktu x istnieje zbiór $A \in \mathcal{I}$ taki, że $x_n \in U$ dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus A$. W przypadku ideału zbiorów gęstości zero, zbieżność ideałowa jest znana jako zbieżność statystyczna i była rozważana już przez Steinhausa [102, p. 73] oraz Schoenberga [96]. Dla P-ideałów zbieżność ideałowa jest równoważna istnieniu zbioru z filtru dualnego, na którym ciąg jest zbieżny klasycznie (zobacz np. [62]). Zbieżność ideałową można również zdefiniować używając pojęcia „zbieżności filtru do punktu w przestrzeni topologicznej" wprowadzonego przez Cartana [24].

W 1991 roku Mazur [78] scharakteryzował wszystkie ideały typu F_σ w języku półciągłych z dołu podmiar na $\mathbb{N}$, a w 1999 roku Solecki [100] scharakteryzował w podobny sposób analityczne P-ideały. Obie charakteryzacje dostarczyły nowych metod do badania samych ideałów (zobacz np. [38, 52]), jak i zbieżności przez nie wyznaczonej (zobacz np. [P8]).

Innym narzędziem, które ułatwiło badanie zbieżności ideałowej (patrz np. [H4, 70, 87]), są gry nieskończone zdefiniowane przez Laflamme'a [71] w połączeniu z twierdzeniem o determinacji gier borelowskich oraz pewne kombinatoryczne charakteryzacje strategii wygrywających w tych grach.

W wybranym cyklu prac stosujemy te metody do otrzymania nowych rezultatów, w szczególności do rozwiązania kilku problemów postawionych przez Drewnowskiego i Łuczaka [34] oraz Wilczyńskiego [107]. Poniżej pokażę również jak można użyć naszych wyników, żeby dać odpowiedź na pytania postawione później przez Borodulin-Nadzieję, Farkasa i Plebanka [17] oraz Hrušáka [52].

2. Własność Bolzano-Weierstrassa i podmiary bezatomowe

W pracy [H1] wprowadziliśmy własność Bolzano-Weierstrassa (w skrócie: własność BW) dla ideałów. Ideał $\mathcal{I}$ ma *własność BW*, gdy dla każdego ograniczonego ciągu (x_n) liczb rzeczywistych istnieje $A \notin \mathcal{I}$ taki, że podciąg $(x_n)_{n\in A}$ jest $\mathcal{I}$-zbieżny.

Używając pojęcia zbiorów $\mathcal{I}$-małych wprowadzonych przez Faraha [39], udowodniliśmy [H1, Proposition 3.3] charakteryzację ideałów z własnością BW w języku drzew: ideał $\mathcal{I}$ ma własność BW wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego drzewa binarnego $\mathcal{T}$ wysokości ω takiego, że każdy poziom $\mathcal{T}$ jest partycją $\mathbb{N}$, istnieje nieskończona gałąź $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ drzewa $\mathcal{T}$ oraz zbiór $A \notin \mathcal{I}$ takie, że $A \setminus B_n \in \mathcal{I}$ dla każdego n. Charakteryzacja ta była później wielokrotnie wykorzystywana przez nas do badania własności BW.

Używając charakteryzacji Mazura i powyższej udowodniliśmy [H1, Proposition 3.4], że każdy ideał typu F_σ ma własność BW.

Okazuje się, że własność BW dla analitycznych P-ideałów jest związana z podmiarami bezatomowymi na $\mathbb{N}$ (w książce [15] podmiary bezatomowe są nazywane „silnie ciągłymi podmiarami", a w artykule [89] autor używa nazwy „podmiary zwarte").

filip

Podmiara ϕ jest *bezatomowa*, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona partycja $\mathbb{N} = A_1 \cup \dots \cup A_n$ taka, że $\phi(A_i) < \varepsilon$ dla każdego $i \leqslant n$.

Charakteryzacja Soleckiego mówi, że dla każdego analitycznego P-ideału $\mathcal{I}$ istnieje podmiara półciągła z dołu ϕ taka, że $\mathcal{I} = \{A : ||A||_\phi = 0\}$, gdzie $||A||_\phi = \lim_n \phi(A \setminus \{0, 1, \dots, n\})$.

W pracy [H1, Theorem 3.6] udowodniliśmy, że analityczny P-ideał $\mathcal{I}$ ma własność BW wtedy i tylko wtedy, gdy podmiara $||\cdot||_\phi$ jest bezatomowa. Głównymi narzędziami w dowodzie tego twierdzenia są charakteryzacja Soleckiego oraz charakteryzacja własności BW w języku drzew.

Podmiarom bezatomowym na $\mathbb{N}$ poświęcony jest cykl prac Drewnowskiego i Łuczaka [33–35]. Na przykład, w pracy [34] autorzy podają dwa warunki konieczne na to, żeby podmiara była równoważna granicy górnej ciągu podmiar półciągłych z dołu i stawiają dwa problemy: (1) czy te dwa warunki są równoważne oraz (2) czy te warunki są również warunkami wystarczającymi.

W pracy [H2] rozwiązaliśmy oba problemy: (1) udowodniliśmy, że w pełnej ogólności, warunki te nie są równoważne [H2, Theorem 5] (chociaż dla podmiar znikających na singletonach oba warunki są już równoważne [H2, Theorem 3]); (2) podaliśmy [H2, Example 8] przykład podmiary ϕ spełniającej dane warunki, która nie jest równoważna granicy górnej ciągu podmiar półciągłych z dołu.

Konstrukcję podmiary ϕ można podzielić na trzy etapy. Po pierwsze dowodzimy, że podmiara ψ spełnia rozważane własności wtedy i tylko wtedy, gdy rodzina zbiorów niezerowych względem ψ jest P-koideałem. Następnie pokazujemy, że jeśli podmiara ψ jest równoważna granicy górnej ciągu podmiar półciągłych z dołu, to rodzina zbiorów niezerowych względem ψ jest koideałem typu $G_{\delta\sigma}$. Na koniec używamy maksymalnej prawie rozłącznej rodziny podzbiorów $\mathbb{N}$, żeby skonstruować P-koideał, który nie jest typu $G_{\delta\sigma}$ i z pomocą tego koideału definiujemy podmiarę ϕ.

W [34] autorzy podali również warunek konieczny na to, żeby podmiara była równoważna podmierze $||\cdot||_\phi$, gdzie ϕ jest σ-podmiarą (autorzy nazywają takie podmiary the *core of a σ-submeasure*) i postawili pytanie, czy ten warunek jest również warunkiem wystarczającym.

W pracy [H2, Theorem 11] udowodniliśmy, że odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Dowód tego twierdzenia można podzielić na trzy kroki. W pierwszym kroku dowodzimy, że jeżeli ideał zbiorów zerowych podmiary ψ jest P-ideałem, to ψ spełnia rozważany warunek. W drugim kroku dowodzimy, że nie istnieje σ-podmiara ϕ taka, żeby koideał zbiorów niezerowych względem $||\cdot||_\phi$ był Q-koideałem. W ostatnim kroku używając ultrafiltru selektywnego (tzn. ultrafiltru, który jest jednocześnie P-punktem i Q-punktem) definiujemy szukaną podmiarę. Ostatni krok konstrukcji wymaga dodatkowych założeń teoriomnogościwych (np. hipotezy continuum). Nie wiemy, czy podmiara o takich własnościach istnieje w ZFC.

3. Porządek Katětova na ideałach borelowskich

Porządek Katětova został wprowadzony przez Katětova w pracy [56]. Niech $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ będą ideałami na $\mathbb{N}$. Wówczas *$\mathcal{I}$ jest poniżej $\mathcal{J}$ w porządku Katětova* (w skrócie: $\mathcal{I} \leqslant_K \mathcal{J}$), gdy istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że $f^{-1}[A] \in \mathcal{J}$ dla każdego $A \in \mathcal{I}$.

Fllm

Porządek Katětova ograniczony do ideałów maksymalnych jest identyczny z dobrze znanym porządkiem Rudina-Keislera. Ponadto istnieje związek między porządkiem Katětova a $\mathcal{I}$-ultrafiltrami wprowadzonymi przez Baumgartnera w pracy [13]. Mianowicie, Flašková zauważyła [42], że $\mathcal{U}$ jest $\mathcal{I}$-ultrafiltrem wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{I} \not\leq_K \mathcal{U}^*$. Wiele klasycznych własności kombinatorycznych ultrafiltrów można scharakteryzować w podobny sposób używając ideałów borelowskich (patrz [43]). Na przykład, $\mathcal{U}$ jest P-punktem wtedy i tylko wtedy, gdy CONV $\not\leq_K \mathcal{U}^*$, gdzie CONV jest ideałem złożonym z tych podzbiorów $\mathbb{Q}$, które mają tylko skończenie wiele punktów skupienia.

Zawężając porządek Katěova do ideałów borelowskich Guzman-González i Meza-Alcántara [48] otrzymali interesujący wynik (podobny wynik otrzymał niezależnie Mrożek [83]) mówiący, że istnieją antyłańcuchy długości $\mathfrak{c}$ i łańcuchy długości $\mathfrak{b}$ ideałów borelowskich w porządku Katětova.

W pracy [52, Question 5.16] Hrušák postawił pytanie, czy ideał borelowski $\mathcal{I}$ można rozszerzyć do ideału typu F_σ wtedy i tylko wtedy, gdy CONV $\not\leq_K \mathcal{I}$. Używając pewnego wyniku Meza-Alcántary [80] pytanie Hrušáka można sformułować równoważnie jako pytanie, czy ideał $\mathcal{I}$ można rozszerzyć do ideału typu F_σ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{I}$ ma własność finBW (gdzie własność finBW jest zdefiniowana analogicznie do własności BW, tylko zamiast zbieżności ideałowej wymagamy, żeby podciąg był zbieżny klasycznie [H1]).

W artykule [H1, Theorem 4.2] udowodniliśmy, że odpowiedź na pytanie Hrušáka jest pozytywna dla P-ideałów borelowskich (cały czas nie znamy odpowiedzi dla dowolnych ideałów borelowskich). Głównym narzędziem w dowodzie tego twierdzenia jest charakteryzacja własności BW w języku podmiar bezatomowych [H1, Theorem 3.6], która została omówiona w rozdziale 2 autoreferatu.

4. Rozszerzanie ideałów do ideałów sumowalnych

Ideał $\mathcal{I}$ nazywamy *ideałem sumowalnym*, gdy istnieje szereg rozbieżny $\sum a_n$ liczb nieujemnych taki, że $\mathcal{I} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n\in A} a_n < \infty\}$. Ideały sumowalne zostały wprowadzone przez Mazura w pracy [78], chociaż pewna podklasa ideałów sumowalnych była rozważana wcześniej przez Mathiasa [74].

W 1930 roku Auerbach udowodnił [3], że jeżeli szereg liczb nieujemnych $\sum_n a_n$ jest rozbieżny, to istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ gęstości zero taki, że podszereg $\sum_{n\in A} a_n$ też jest rozbieżny (to samo twierdzenie było później wielokrotnie odkrywane na nowo np. przez Agnew [1] w 1947 roku i przez Estradę i Kanwala [37] w 1986 roku). Używając ideałów sumowalnych, wynik Auerbacha można wyrazić jako stwierdzenie, że ideał zbiorów gęstości zero nie rozszerza się do żadnego ideału sumowalnego.

W pracy [97] Freedman i Sember pokazali, że ideał zbiorów jednostajnej gęstości zero również nie rozszerza się do żadnego ideału sumowalnego (autorzy używają tam nazwy „full class" na określenie ideałów, które nie rozszerzają się do ideałów sumowalnych).

Pokażemy teraz, że nasze wyniki dotyczące własności BW pozwalają uogólnić powyższe twierdzenia. Ideały sumowalne mają własność finBW (wynika to z obserwacji, że ideały sumowalne są typu F_σ oraz z tego, że wszystkie ideały typu F_σ mają własność finBW [H1, Proposition 3.4]). Z drugiej strony można pokazać, że

Fllyp

jeżeli jakiś ideał ma własność finBW, to każdy ideał zawarty w nim również ma własność finBW. Jako wniosek otrzymujemy, że żaden ideał bez własności finBW nie rozszerza się do ideału sumowalnego. Ponieważ ideały zbiorów gęstości zero i zbiorów jednostajnej gęstości zero nie mają własności finBW (patrz [H1, P4]), powyższa obserwacja jest rozszerzeniem wyników Auerbacha, Freedmana i Sembera.

Kolejnym wynikiem dotyczącym rozszerzania ideałów do ideałów sumowalnych jest twierdzenie Paštéki [89] mówiące, że żaden ideał zbiorów zerowych podmiary bezatomowej nie rozszerza się do ideału sumowalnego. W pracy [P4, Theorem 1] udowodniliśmy, że ideał zbiorów zerowych podmiary bezatomowej nie ma własności finBW. Wynik ten, łącznie z wcześniejszą uwagą, że ideały bez własności finBW nie rozszerzają się do ideałów sumowalnych, można traktować jako uogólnienie twierdzenia Paštéki.

Z innych prac, w których badano rozszerzanie ideałów do ideałów sumowalnych, warto wspomnieć jeszcze o dwóch interesujących artykułach [2, 36] (w obu tych pracach autorzy używają nazwy „Positive Summability Property" na określenie ideałów, które nie rozszerzają się do ideałów sumowalnych). W pracy [36] Drewnowski i Paúl udowodnili między innymi, że uogólnione ideały gęstościowe (są to ideały związane z macierzowymi metodami sumowania szeregów) rozszerzają się do ideału sumowalnego wtedy i tylko wtedy, gdy nie mają własności Nikodýma. W pracy [2] Alon, Drewnowski i Łuczak, używając grafu Knesera, skonstruowali ideał z własnością Nikodýma i własnością finBW, który nie rozszerza się do ideału sumowalnego (w pracy tej autorzy używają nazwy „ideał bezatomowy" zamiast „ideał z własnością finBW").

Okazuje się, że z rozszerzaniem ideałów do ideałów sumowalnych związane jest twierdzenie Riemanna o szeregach warunkowo zbieżnych (tj. twierdzenie mówiące, że w dowolnym szeregu warunkowo zbieżnym można tak przestawić wyrazy, żeby dostać dowolną ustaloną liczbę jako sumę tego szeregu). W pracy [107] Wilczyński wzmocnił wynik Riemanna pokazując, że można przestawiać tylko wyrazy, których indeksy tworzą zbiór mający gęstość zero i postawił problem o podanie charakteryzacji wszystkich ideałów mających analogiczną własność tzn. ideałów $\mathcal{I}$ takich, że dla dowolnego szeregu warunkowo zbieżnego $\sum_n a_n$ i dla dowolnego $r \in \mathbb{R}$ istnieje permutacja $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że $\sum_n a_{\sigma(n)} = r$ oraz $\{n : \sigma(n) \neq n\} \in \mathcal{I}$. Będziemy mówić, że ideały takie mają *własność Riemanna* (w skrócie: *własność R*).

W pracy [H3, Theorem 3.3] rozwiązaliśmy ten problem dowodząc, że ideał ma własność Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy nie rozszerza się do ideału sumowalnego. W dowodzie tej charakteryzacji można wyróżnić dwie najważniejsze składowe. Po pierwsze pokazujemy, że żaden ideał sumowalny nie ma własności R. Po drugie, zakładając, że ideał $\mathcal{I}$ nie ma własności R i używając szeregu, który jest świadkiem na brak tej własności, konstruujemy ideał sumowalny rozszerzający $\mathcal{I}$.

W pracy [17] Borodulin-Nadzieja, Farkas i Plebanek uogólniają pojęcie ideału sumowalnego używając szeregów w przestrzeniach Banacha lub przemiennych grupach polskich i nazywają je ideałami reprezentowalnymi w danej przestrzeni (ideały sumowalne są to ideały reprezentowalne w przestrzeni $\mathbb{R}$). W tej samej pracy autorzy dowodzą, że wszystkich analityczne P-ideały są reprezentowalne w przemiennych

Flaj

grupach polskich, a niepatologiczne P-ideały analityczne są reprezentowalne w przestrzeniach Banacha. Ponadto autorzy stawiają pytanie [17, Question 6.13] o charakteryzację ideałów (analitycznych P-ideałów), które można rozszerzyć do ideałów sumowalnych.

Negacja własności Riemanna charakteryzuje ideały rozszerzalne do ideałów sumowalnych, daje to więc odpowiedź na ich pytanie w przypadku dowolnych ideałów. W przypadku pewnej podrodziny analitycznych P-ideałów można również podać inną charakteryzację. Mianowicie, w pracy [H3, Proposition 3.7] udowodniliśmy, że dla rodziny wszystkich ideałów gęstościowych rozważanych przez Faraha (zobacz np. [38]) (jest to właściwa podrodzina analitycznych P-ideałów) własność R jest równoważna negacji własności BW. Jako wniosek dostajemy, że ideał gęstościowy rozszerza się do ideału sumowalnego wtedy i tylko wtedy, gdy ma własność BW. Charakteryzacja taka nie jest jednak prawdziwa w rodzinie wszystkich analitycznych P-ideałów, gdyż pokazaliśmy [H3, Example 3.6], że istnieje P-ideał typu F_σ (czyli mający własność BW), który nie rozszerza się do ideału sumowalnego.

W pracy [14] Bermúdez i Martinón wykorzystali nasz wynik, żeby udowodnić ideałową wersję twierdzenia dotyczącego zmieniania znaków wyrazów w szeregu warunkowo zbieżnym.

Wielowymiarowy odpowiednik twierdzenia Riemanna został udowodniony przez Lévy'ego i Steinitza na początku XX wieku, a niedawno Klinga w pracy [58] udowodnił, że ideałowa wersja twierdzenia Lévy'ego-Steinitza zachodzi również dla ideałów, które nie rozszerzają się do ideałów sumowalnych.

5. Współczynniki kardynalne ilorazowych algebr Boole'a

Zbiór $S \subseteq \mathbb{B}$ nazywamy *zbiorem rozcinającym* w algebrze Boole'a $\mathbb{B}$, gdy dla dowolnego niezerowego elementu $b \in \mathbb{B}$ istnieje $s \in S$ taki, że $b \cdot s \neq 0$ i $b - s \neq 0$.

Wiadomo, że dowolny zbiór rozcinający w algebrze ilorazowej $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathrm{Fin}$ (gdzie Fin jest ideałem wszystkich zbiorów skończonych) jest nieprzeliczany. Minimalną moc zbioru rozcinającego oznaczamy przez $\mathfrak{s}$ i nazywamy *liczbą rozcinającą* (ang. *splitting number*) (zobacz np. [106] lub [16]).

Okazuje się, że istnieje związek między zbiorami rozcinającymi a własnością BW. W pracy [H1, Theorem 5.1] udowodniliśmy, że ideał $\mathcal{I}$ nie ma własności BW wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przeliczalny zbiór rozcinający w $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathcal{I}$.

Głównym narzędziem używanym w dowodzie tego twierdzenia jest charakteryzacja własności BW w języku drzew (patrz rozdział 2 autoreferatu), a dowód można streścić następująco. Jeśli $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathcal{I}$ ma przeliczalny zbiór rozcinający S, to konstruujemy odpowiednie drzewo (na danym poziomie dzielimy zbiory z poprzedniego poziomu używając zbioru S) i wykorzystując charakteryzację pokazujemy, że ideał nie ma własności BW. Z drugiej strony, jeżeli ideał nie ma własności BW, to bierzemy drzewo wynikające z charakteryzacji i pokazujemy, że suma wszystkich poziomów tego drzewa jest przeliczalnym zbiorem rozcinającym.

W pracach [5, 50] Balcar, Hernández-Hernández i Hrušák udowodnili, że istnieją przeliczalne zbiory rozcinające w $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathcal{I}_d$ (gdzie $\mathcal{I}_d$ jest ideałem wszystkich zbiorów gęstości zero) i $\mathcal{P}(\mathbb{Q})/\mathrm{NWD}$ (gdzie NWD jest ideałem wszystkich nigdziegęstych podzbiorów $\mathbb{Q}$). Ponieważ ideały NWD i $\mathcal{I}_d$ nie mają własności BW ([H1]), więc ich wyniki można traktować jako szczególne przypadki naszego twierdzenia.

Filip

W pracy [50] autorzy dowodzą również, że dla analitycznych P-ideałów, jeżeli $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathcal{I}$ ma przeliczalny zbiór rozcinający, to ideał $\mathcal{I}$ jest całkowicie ograniczony (tzn. $\phi(\mathbb{N}) < \infty$ dla dowolnej podmiary ϕ definiującej ideał $\mathcal{I}$ zgodnie z charakteryzacją Soleckiego). Pokażemy teraz, że to twierdzenie również wynika z charakteryzacji własności BW w języku zbiorów rozcinających. Używając naszej charakteryzacji własności BW dla analitycznych P-ideałów w języku podmiar bezatomowych (patrz rozdział 2 autoreferatu) wiemy, że jeśli ideał $\mathcal{I}$ nie ma własności BW, to podmiara $||\cdot||_\phi$ jest bezatomowa. Ponadto, można pokazać, że jeśli $||\cdot||_\phi$ jest bezatomowa, to $\phi(\mathbb{N}) < \infty$. Ostatecznie, jeśli $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathcal{I}$ ma przeliczalny zbiór rozcinający, to $\mathcal{I}$ nie ma własności BW, więc $\mathcal{I}$ jest całkowicie ograniczony.

Jest niesprzeczne z aksjomatami teorii mnogości ZFC, że $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathrm{Fin}$ nie ma zbioru rozcinającego mocy mniejszej niż $\mathfrak{c}$ (nawet gdy $\aleph_1 < \mathfrak{c}$). Przykładowo jest tak przy założeniu aksjomatu Martina i negacji hipotezy continuum (patrz np. [16]).

W pracy [H6, Theorem 4.3] udowodniliśmy, że analogiczny wynik jest prawdziwy dla wszystkich analitycznych P-ideałów z własnością BW (przypomnijmy, że dla ideałów bez własności BW zawsze istnieje przeliczalny zbiór rozcinający).

Poniżej przedstawię krótki szkic dowodu. Pokażemy, że dowolna rodzina $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mocy mniejszej niż $\mathfrak{c}$ nie jest zbiorem rozcinającym w $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathcal{I}$. Używając rodziny $\mathcal{F}$ definiujemy zbiór częściowo uporządkowany $\mathbb{P}$ (w tym przypadku jest to tak zwany częściowy porządek Mathiasa ze względu na rodzinę $\mathcal{F}$) oraz odpowiednią rodzinę $\mathcal{D}$ zbiorów gęstych w $\mathbb{P}$. Wówczas z aksjomatu Martina istnieje filtr $F \subseteq \mathbb{P}$, który przecina wszystkie elementy $\mathcal{D}$. Używając filtru F definiujemy zbiór, który nie jest rozcinany przez żaden element rodziny $\mathcal{F}$ (tzn. $\mathcal{F}$ nie jest rodziną rozcinającą).

W powyższym schemacie dowodu, wykorzystującego aksjomat Martina, są dwa kroki, których przeprowadzenie wymaga dodatkowych narzędzi. Po pierwsze, używamy charakteryzacji Soleckiego analitycznych P-ideałów, żeby zdefiniować odpowiednie zbiory gęste (wykorzystujemy tutaj fakt, że podmiara definiująca ideał jest półciągła z dołu, czyli zbiory spoza ideału można przybliżać zbiorami skończonymi). Po drugie, potrzebujemy lematu [H6, Lemma 2.7], żeby pokazać, że zbiory z rodziny $\mathcal{D}$ są gęste. Lemat ten jest kolejną charakteryzacją własności BW mówiącą, że analityczny P-ideał ma własność BW wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\delta > 0$ i $x : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0, 1\}$ takie, że $||\bigcap\{A^{x(A)} : A \in \mathcal{G}\}||_\phi > \delta$ dla każdej skończonej rodziny $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (gdzie $A^0 = A$ i $A^1 = \mathbb{N} \setminus A$). Warto zauważyć, że funkcja x nie zależy od wyboru rodziny $\mathcal{G}$, tzn. dla każdego zbioru A wiemy wcześniej czy bierzemy A lub $\mathbb{N} \setminus A$ w odpowiednim przekroju dla każdej rodziny $\mathcal{G}$ zawierającej A.

W pracy [H6, Theorem 3.2] dowodzimy również, że aksjomat Martina implikuje, że nie ma zbioru rozcinającego mocy mniejszej niż $\mathfrak{c}$ w $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathcal{I}$ dla każdego ideału $\mathcal{I}$ typu F_σ. Taki sam wynik dla ideałów typu F_σ i analitycznych P-ideałów uzyskał również niezależnie Mrożek [83].

W pracy [H6] badamy również liczbę $\mathfrak{r}$ (ang. *reaping number*). Udowodniliśmy, że w $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathcal{I}$, gdzie $\mathcal{I}$ jest ideałem typu F_σ lub analitycznym P-ideałem, liczba $\mathfrak{r}$ jest nieprzeliczalna [H6, Proposition 3.1 and 4.1], a przy założeniu aksjomatu Martina $\mathfrak{r} = \mathfrak{c}$ [H6, Theorem 3.2 and 4.2]. Warto zauważyć, że w tym przypadku powyższe wyniki są prawdziwe dla wszystkich ideałów, bez względu na to czy mają czy też nie mają własności BW. Bardzo interesujący wynik dotyczący liczby $\mathfrak{r}$ otrzymał

Filipa

Steprāns [103], mianowicie udowodnił (w ZFC), że liczba $\mathfrak{r}$ w $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathcal{I}_d$ (gdzie $\mathcal{I}_d$ jest ideałem zbiorów gęstości zero) wynosi $\mathfrak{c}$.

Innym współczynnikiem kardynalnym, który badaliśmy jest liczba $\mathfrak{b}$ (ang. *bounding number*). Liczba ta w ilorazowych algebrach Boole'a $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathcal{I}$ była już rozważana przez Farkasa i Soukupa [40] oraz Brendle i Mejía [19]. Na przykład, w [40] autorzy udowodnili, że liczba $\mathfrak{b}$ w $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathcal{I}$, gdzie $\mathcal{I}$ jest analitycznym P-ideałem jest równa swojemu klasycznemu odpowiednikowi w algebrze $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathrm{Fin}$. Dokładna analiza ich dowodu w połączeniu z charakteryzacją Talagranda [104] ideałów z własnością Baire'a pokazuje, że ich wynik można rozszerzyć na wszystkie ideały z własnością Baire'a.

Liczba $\mathfrak{b}$ w algebrach ilorazowych okazała się ważna w badaniu związku między ideałową zbieżnością punktową a ideałową zbieżnością równą ciągów funkcyjnych. Temat ten jest dokładnie omówiony na stronie 16 autoreferatu.

6. Zbieżność równa (quasi-normalna) ciągów funkcji ciągłych

Ciąg funkcji $f_n : X \to \mathbb{R}$ jest *ideałowo punktowo zbieżny* do $f : X \to \mathbb{R}$, gdy ciąg liczbowy $(f_n(x))_n$ jest ideałowo zbieżny do $f(x)$ dla każdego $x \in X$.

Ideałową punktową zbieżnością ciągów funkcji ciągłych zajmował się już Katětov w latach siedemdziesiątych XX wieku ([55, 57]). Pokazał on, że dla każdej przeliczalnej liczby porządkowej α istnieje ideał borelowski taki, że rodzina wszystkich ideałowych punktowych granic ciągów funkcji ciągłych jest równa rodzinie wszystkich funkcji klasy α Baire'a (w szczególności istnieje ideał i ciąg funkcji ciągłych taki, że ideałowa punktowa granica tego ciągu nie jest pierwszej klasy Baire'a).

Wiadomo również, że dla każdego ideału maksymalnego istnieje ciąg funkcji ciągłych taki, że ideałowa punktowa granica tego ciągu nie jest nawet mierzalna w sensie Lebesgue'a.

Z drugiej strony, interesujące wydaje się zbadanie dla jakich ideałów ideałowa punktowa zbieżność ciągów funkcji ciągłych nie wyprowadza poza pierwszą klasę Baire'a. W pracy [62] Kostyrko, Šalát i Wilczyński udowodnili, że ideał zbiorów gęstości zero ma taką własność. Później problem ten był badany przez Laczkovicha i Recława [70] oraz przez Debsa i Saint Raymonda [31]. Przykładowo w [70] i niezależnie w [31] autorzy udowodnili, że ideałowa punktowa granica ciągu funkcji ciągłych jest pierwszej klasy Baire'a wtedy i tylko wtedy, gdy ideał nie zawiera izomorficznej kopii ideału $\mathrm{Fin} \times \mathrm{Fin}$.

W pracy [H4], poza zbieżnością punktową, rozważamy również zbieżność dyskretną i zbieżność równą (nazywaną również zbieżnością quasi-normalną lub zbieżnością σ-jednostajną). Oba rodzaje zbieżności zostały wprowadzone przez Császára i Laczkovicha [27] (zbieżność dyskretna była również rozważana przez Sierpińskiego [99] w przypadku ciągów pozaskończonych). Przestrzenie topologiczne zdefiniowane przy pomocy zbieżności równej (tzw. przestrzenie QN) były badane przez Bukovskiego, Recława i Repickiego w cyklu prac [22, 23, 94].

W pracy [H4] używamy nieskończonej gry Laflamme'a [71], żeby opisać ideałowe (punktowe, dyskretne i równe) klasy Baire'a. Poniżej omówię wyniki jakie otrzymaliśmy dla zbieżności równej.

Filip

Ciąg funkcji $f_n : X \to \mathbb{R}$ jest *idealowo równo zbieżny* do $f : X \to \mathbb{R}$, gdy istnieje ciąg liczb nieujemnych $(\varepsilon_n) \to 0$ taki, że $\{n : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$ dla każdego $x \in X$.

Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem. Rozważmy następującą grę $G(\mathcal{I})$. Gracz I w n-tym ruchu wybiera zbiór $A_n \in \mathcal{I}$, a gracz II wybiera zbiór skończony $F_n \subseteq \mathbb{N} \setminus A_n$. Gracz I wygrywa, gdy $\bigcup_n F_n \in \mathcal{I}$. W przeciwnym przypadku wygrywa gracz II.

Udowodniliśmy [H4, Theorem 5.5], że jeśli gracz II ma strategię wygrywającą w grze $G(\mathcal{I})$, to ideałowe równe granice ciągów funkcji równej klasy α Baire'a są równej klasy $\alpha + 1$ Baire'a dla każdego skończonego α (w szczególności ideałowe równe granice ciągów funkcji ciągłych są pierwszej równej klasy Baire'a). Problem dla nieskończonych α pozostaje otwarty.

W dowodzie można wyróżnić dwa główne elementy (dla prostoty omówię tylko przypadek ciągów funkcji ciągłych). Po pierwsze, używamy charakteryzacji Laflamme'a [71] ideałów, dla których gracz II ma strategię wygrywającą. Charakteryzacja ta jest techniczna i nie będę jej tutaj przytaczał, ale jej najważniejszą cechą jest to, że wszystkie zbiory z filtru dualnego można opisać używając pewnej ustalonej przeliczalnej rodziny zbiorów skończonych. Po drugie, używamy charakteryzacji Császára-Laczkovicha [28] funkcji pierwszej równej klasy Baire'a, która mówi, że f jest pierwszej równej klasy Baire'a wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją zbiory domknięte $A_n \subseteq X$ takie, że $\bigcup_n A_n = X$ i $f \restriction A_n$ można rozszerzyć do funkcji ciągłej na X dla każdego n.

W pracy [87] Natkaniec i Szuca użyli innej gry Laflamme'a do zbadania ideałowych granic punktowych ciągów funkcji quasi-ciągłych. Ideałowe dyskretne i równe granice ciągów funkcji quasi-ciągłych zostały zbadane przez Kwelę, Natkańca, Staniszewskiego i Szucę, a prace zawierające te wyniki są w przygotowaniu.

Kontynuujemy badanie różnych rodzajów ideałowej zbieżności ciągów funkcyjnych, a wyniki jakie uzyskaliśmy do tej pory zostały opublikowane w artykułach [P10, P11], które są omówione szczegółowo na stronie 16 autoreferatu.

7. Przestrzenie Hindmana

Przestrzeń topologiczna X ma *własność BW względem ideału* $\mathcal{I}$, gdy z każdego ciągu w X można wybrać podciąg $\mathcal{I}$-zbieżny na zbiorze spoza ideału ([H1]).

Można pokazać, że ideał $\mathcal{I}$ ma własność BW wtedy i tylko wtedy, gdy przedział $[0, 1]$ ma własność BW względem $\mathcal{I}$. Jeśli przestrzeń topologiczna Hausdorffa X ma własność BW względem jakiegokolwiek ideału, to X jest przestrzenią przeliczalnie zwartą. Przestrzeń X ma własność BW względem ideału wszystkich skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią ciągowo zwartą. Ponadto każda metryczna przestrzeń zwarta ma własność BW względem każdego ideału mającego własność BW (twierdzenie to nie jest prawdziwe, gdy opuścimy założenie o metryczności) [H1, str. 505].

Zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ jest *IP-zbiorem*, gdy istnieje zbiór nieskończony $B \subseteq \mathbb{N}$ taki, że $\mathrm{FS}(B) \subseteq A$ (gdzie $\mathrm{FS}(B)$ jest zbiorem wszystkich skończonych sum elementów B). Twierdzenie Hindmana [51] mówi, że dla każdej skończonej partycji $\mathbb{N} = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ istnieje $i \leqslant n$ taki, że A_i jest IP-zbiorem.

Przestrzenie topologiczne związane z twierdzeniem Hindmana były badane w cyklu prac Kojmana, Jonesa i Shelaha [53, 59, 61]. Definicja tych przestrzeni wymaga pojęcia IP-zbieżności wprowadzonego przez Furstenberga i Weissa [47]. Ciąg $(x_n)_{n\in \mathrm{FS}(A)}$ jest *IP-zbieżny do* x, gdy dla każdego otoczenia U punktu x istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $x_n \in U$ dla każdego $n \in \mathrm{FS}(A \setminus \{0, 1, \dots, N\})$. Przestrzeń topologiczna X jest *przestrzenią Hindmana*, gdy z każdego ciągu w X można wybrać podciąg IP-zbieżny ([59]).

W pracy [41] Flašková porównuje przestrzenie Hindmana z przestrzeniami mającymi własność BW względem ideałów sumowalnych. Przykładowo udowodniła, że istnieje przestrzeń mająca własność BW względem danego ideału sumowalnego, która nie jest przestrzenią Hindmana.

W artykule [H5] badamy zależności między przestrzeniami Hindmana a przestrzeniami mającymi własność BW względem *ideału Hindmana* $\mathcal{H} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ nie jest IP-zbiorem}\}$.

Udowodniliśmy [H5, Proposition 3.5], że każda przestrzeń Hindmana ma własność BW względem ideału $\mathcal{H}$. Z drugiej strony, skonstruowaliśmy [H5, Theorem 3.7] przestrzeń topologiczną mającą własność BW względem ideału $\mathcal{H}$, która nie jest przestrzenią Hindmana. Przykład, który podaliśmy, jest jednopunktowym uzwarceniem przestrzeni Mrówki [81], zdefiniowanej przy pomocy maksymalnej prawie rozłącznej rodziny zbiorów z $\mathcal{H}$.

W tym samym artykule udowodniliśmy [H5, Theorem 3.3], że ideał Hindmana $\mathcal{H}$ ma własność BW. W dowodzie tego twierdzenia używamy ultrafiltrów idempotentnych na $\mathbb{N}$ tzn. ultrafiltrów $\mathcal{U}$ takich, że $\mathcal{U} + \mathcal{U} = \mathcal{U}$, gdzie „+" jest rozszerzeniem działania dodawania liczb naturalnych na rodzinę wszystkich ultrafiltrów. Drugim narzędziem wykorzystanym w dowodzie jest charakteryzacja własności BW w języku drzew [H1, Proposition 3.3] (szczegóły dotyczące tej charakteryzacji zostały opisane w rozdziale 2 autoreferatu).

Kontynuujemy badanie przestrzeni z własnością BW względem ideałów, a wyniki jakie uzyskaliśmy do tej pory zostały opublikowane w artykule [P9], który jest omówiony szczegółowo na stronie 17 autoreferatu.

Filip

V. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych (artystycznych).

Na pozostały dorobek naukowy składają się następujące publikacje.

Artykuły zawierające wyniki uzyskane przed doktoratem:

[D1] R. Filipów and I. Recław, *On the difference property of Borel measurable and (s)-measurable functions*, Acta Math. Hungar. **96** (2002), no. 1-2, 21–25.

[D2] R. Filipów, *On the difference property of the family of functions with the Baire property*, Acta Math. Hungar. **100** (2003), no. 1-2, 97–104.

[D3] R. Filipów, *On the difference property of families of measurable functions*, Colloq. Math. **97** (2003), no. 2, 169–180.

[D4] F. G. Dorais and R. Filipów, *Algebraic sums of sets in Marczewski-Burstin algebras*, Real Anal. Exchange **31** (2005/06), no. 1, 133–142.

[D5] F. G. Dorais, R. Filipów, and T. Natkaniec, *On some properties of Hamel bases and their applications to Marczewski measurable functions*, Cent. Eur. J. Math. **11** (2013), no. 3, 487–508.

Artykuły zawierające wyniki uzyskane po doktoracie:

[P1] R. Filipów and P. Szuca, *Density versions of Schur's theorem for ideals generated by submeasures*, J. Combin. Theory Ser. A **117** (2010), no. 7, 943–956.

[P2] R. Filipów, N. Mrożek, I. Recław, and P. Szuca, *Ideal version of Ramsey's theorem*, Czechoslovak Math. J. **61(136)** (2011), no. 2, 289–308.

[P3] R. Filipów, A. Nowik, and P. Szuca, *There are measurable Hamel functions*, Real Anal. Exchange **36** (2010/11), no. 1, 223–229.

[P4] P. Barbarski, R. Filipów, N. Mrożek, and P. Szuca, *Uniform density u and $\mathcal{I}_u$-convergence on a big set*, Math. Commun. **16** (2011), no. 1, 125–130.

[P5] R. Filipów, N. Mrożek, I. Recław, and P. Szuca, *$\mathcal{I}$-selection principles for sequences of functions*, J. Math. Anal. Appl. **396** (2012), no. 2, 680–688.

[P6] R. Filipów, N. Mrożek, I. Recław, and P. Szuca, *Extending the ideal of nowhere dense subsets of rationals to a P-ideal*, Comment. Math. Univ. Carolin. **54** (2013), no. 3, 429–435.

[P7] P. Barbarski, R. Filipów, N. Mrożek, and P. Szuca, *When does the Katětov order imply that one ideal extends the other?*, Colloq. Math. **130** (2013), no. 1, 91–102.

Filip

[P8] R. Filipów, T. Natkaniec, and P. Szuca, *Ideal convergence*, Traditional and present-day topics in real analysis, Faculty of Mathematics and Computer Science. University of Łódź, Łódź, 2013, pp. 69–91.

[P9] R. Filipów and J. Tryba, *Convergence in van der Waerden and Hindman spaces*, Topology Appl. **178** (2014), 438–452.

[P10] R. Filipów and M. Staniszewski, *On ideal equal convergence*, Cent. Eur. J. Math. **12** (2014), no. 6, 896–910.

[P11] R. Filipów and M. Staniszewski, *Pointwise versus equal (quasi-normal) convergence via ideals*, J. Math. Anal. Appl. **422** (2015), no. 2, 995–1006.

Poniżej przedstawię krótkie omówienie wyników uzyskanych w powyższych pracach.

Własność różnicy w sensie de Bruijna. W pracach [D1, D2, D3] zajmujemy się badaniem własności różnicy w sensie de Bruijna (w skrócie: własności różnicy) dla rodzin funkcji rzeczywistych. Rodzina funkcji rzeczywistych $\mathcal{F}$ określonych na $\mathbb{R}$ ma *własność różnicy*, gdy dla dowolnej funkcji f takiej, że $\Delta_h f \in \mathcal{F}$ dla każdego $h \in \mathbb{R}$ (gdzie $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$) istnieje funkcja $g \in \mathcal{F}$ oraz funkcja addytywna $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że $f = g + A$. Pojęcie to zostało wprowadzone przez de Bruijna [30] w 1951 roku. Od tamtego czasu zbadano własność różnicy dla wielu rodzin funkcji oraz rozważano różnego rodzaju uogólnienia tej własności. Bardzo dobrym źródłem informacji na temat własności różnicy jest artykuł przeglądowy z roku 2002 napisany przez Laczkovicha [68].

Erdős, zakładając hipotezę continuum, udowodnił (zobacz np. [68]), że rodzina funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a (rodzina funkcji z własnością Baire'a) nie ma własności różnicy. Z drugiej strony, Laczkovich [69] pokazał, że jest niesprzeczne z ZFC, że rodzina funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a ma własność różnicy, a w pracy [68] postawił problem, czy jest niesprzeczne z ZFC, że rodzina funkcji z własnością Baire'a ma własność różnicy.

W pracy [D2, Theorem 1.2] udowodniliśmy, że odpowiedź na to pytanie jest pozytywna. Problem ten został później niezależnie rozwiązany inną metodą przez Mátraia w pracy [75].

W pracy [D1, Theorem 2.2] udowodniliśmy, że rodzina funkcji mierzalnych w sensie Marczewskiego (nazywanych również funkcjami (s)-mierzalnymi) nie ma własności różnicy (w ZFC).

W pracy [67] Laczkovich postawił problem czy z założenia, że wszystkie funkcje $\Delta_h f$ są borelowskie wynika, że są one ograniczonej klasy borelowskiej.

W pracy [D1, Theorem 3.1] udowodniliśmy, że zakładając CH odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Taką samą odpowiedź uzyskali później Ciesielski i Pawlikowski w pracy [25] przy założeniu aksjomatu CPA (Covering Property Axiom). Kolejne wyniki związane z tym problemem zostały uzyskane później przez Fujita i Mátraia w pracach [45, 46].

Niemierzalne sumy algebraiczne w algebrach Marczewskiego-Burstina. Algebra zbiorów $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ jest *algebrą Marczewskiego-Burstina generowaną przez rodzinę* $\mathcal{F}$, gdy $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : (\forall F \in \mathcal{F})(\exists G \in \mathcal{F})(G \subseteq F \cap A \vee G \subseteq F \setminus A)\}$. Pojęcie algebr Marczewskiego-Burstina generowanych przez rodzinę $\mathcal{F}$ (w skrócie: algebr MB) zostało wprowadzone przez Browna i Elalaoui-Talibi w pracy [20], a następnie było badane m.in. przez Balcerzaka, Bartoszewicza, Ciesielskiego i Koszmidra w pracach [6–8, 10–12]. Przykładami algebr MB są rodziny zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a, zbiorów z własnością Baire'a i zbiorów (s)-mierzalnych.

Sierpiński [98] pokazał, że istnieje zbiór A miary Lebesgue'a zero taki, że suma algebraiczna $A + A = \{x + y : x, y \in A\}$ jest niemierzalna w sensie Lebesgue'a.

W pracy [D4] zajmujemy się sumami algebraicznymi zbiorów zerowych w algebrach MB. Podajemy [D4, Theorem 7] warunki wystarczające na rodzinę generującą algebrę MB, które gwarantują, że istnieje w niej zbiór zerowy $A \in \mathcal{A}$ taki, że $A + A \notin \mathcal{A}$. W dowodzie tego twierdzenia wykorzystujemy skonstruowany przez nas [D4, Theorem 6] prawie niezmienniczy zbiór zerowy w $\mathcal{A}$.

Jako zastosowanie tego twierdzenia otrzymujemy, że istnieją zbiory (s_0) i zbiory zerowe Millera, których sumy algebraiczne są niemierzalne w odpowiednich algebrach. Wyniki te zostały niezależnie uzyskane przez Kysiaka [66].

Nieciągłe, ale mierzalne funkcje addytywne. Wiadomo, że jeżeli funkcja addytywna jest nieciągła, to jest niemierzalna w sensie Lebesgue'a (zobacz np. [63]).

W pracy [D5, Theorem 4.2] udowodniliśmy, że jest niesprzeczne z ZFC, że istnieje nieciągła funkcja addytywna, która jest (s)-mierzalna (dowodzimy również, że istnieje nawet nieciągły, ale (s)-mierzalny izomorfizm liniowy między przestrzeniami $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^k$ nad ciałem $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych [D5, Theorem 4.7]).

Funkcje takie konstruujemy przy dwóch różnych założeniach teoriomnogościowych. W pierwszej konstrukcji zakładamy, że $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$, a w drugiej wykorzystujemy CPA (Covering Property Axiom) wprowadzony przez Ciesielskiego i Pawlikowskiego [26]. W obu konstrukcjach najistotniejszym składnikiem jest istnienie pewnej „ładnej" bazy Hamela (tzn. bazy przestrzeni $\mathbb{R}$ na ciałem $\mathbb{Q}$). Istnienie takich baz dowodzimy [D5, Theorem 3.19] przy założeniu $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$, a przy założeniu CPA bazy takie zostały skonstruowane przez Ciesielskiego i Pawlikowskiego [25]. Istotnym składnikiem dowodu twierdzenia [D5, Theorem 3.19] jest udowodnione przez nas [D5, Theorem 2.3] uogólnienie twierdzenia Mycielskiego [84] o zbiorach niezależnych w systemach relacyjnych.

Funkcje mierzalne, których wykresy są bazami Hamela. Funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy *funkcją Hamela*, gdy jej wykres jest bazą Hamela przestrzeni $\mathbb{R}^2$ nad ciałem $\mathbb{Q}$.

Funkcje Hamela zostały wprowadzone w pracy [90] przez Płotkę, który kontynuował ich badanie wspólnie z Recławem w pracach [91–93], gdzie udowodnili na przykład, że istnieją funkcje Hamela, które można pokryć skończoną liczbą częściowych funkcji ciągłych (można pokazać, że nie istnieje ciągła funkcja Hamela).

Funkcjom Hamela poświęcony jest również cykl prac Matusika i Natkańca [76, 77, 85, 86], gdzie autorzy dowodzą między innymi, że istnieją quasi-ciągłe funkcje Hamela i nie istnieją aproksymatywnie ciągłe funkcje Hamela.

Filip

W pracy [90], Płotka pokazał między innymi, że każda funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest sumą dwóch funkcji Hamela. Jako wniosek otrzymujemy, że istnieją funkcje Hamela, które są niemierzalne w sensie Lebesgue'a, nie mają własności Baire'a, nie są (s)-mierzalne. Ponadto można pokazać, że nie istnieją borelowskie funkcje Hamela.

W pracy [P3, Theorem 1 i 2] udowodniliśmy, że istnieją funkcje Hamela, które są mierzalne w sensie Lebesgue'a, mają własność Baire'a, są (s)-mierzalne.

Iterowane wersje twierdzeń Ramseya i Schura. W pracy [44] Frankl, Graham i Rödl udowodnili pewną iterowaną wersję twierdzenia Ramseya mówiącą, że dla dowolnego kolorowania $[\mathbb{N}]^2 = C_1 \cup \cdots \cup C_r$ par liczb naturalnych r kolorami istnieje $\delta = \delta(r) > 0$ (zależna od liczby kolorów) taka, że dla pewnego $i \leqslant r$ mamy

$$\overline{d}\Big(\Big\{x : \overline{d}\Big(\Big\{y : \overline{d}(\{z : \{x,y\},\{y,z\},\{x,z\} \in C_i\}) \geqslant \delta\Big\}\Big) \geqslant \delta\Big\}\Big) \geqslant \delta,$$

gdzie $\overline{d}$ jest gęstością górną.

W pracy [P1, Theorem 3.1] udowodniliśmy, że zamiast gęstości górnej można w powyższym twierdzeniu wstawić dowolną podmiarę określoną wzorem $||A||_\phi = \limsup_{n\to\infty} \phi(A \setminus \{0,1,\ldots,n\})$, gdzie ϕ jest podmiarą półciągłą z dołu (można pokazać, że gęstość górna $\overline{d}$ jest podmiarą tego typu). Podmiary typu $||\cdot||_\phi$ są ważne, ponieważ wszystkie analityczne P-ideały są scharakteryzowane przez Soleckiego jako ideały zbiorów zerowych dla takich podmiar.

Ponadto w pracy [P2, Corollary 5.7] udowodniliśmy, że jeżeli podmiara $||\cdot||_\phi$ nie jest bezatomowa, to w powyższym twierdzeniu można wybrać liczbę δ, która nie zależy od liczby kolorów.

W pracy [P2] rozważaliśmy również pewne nieiterowane wersje twierdzenia Ramseya. Udowodniliśmy [P2, Theorem 4.3], że ideał $\mathcal{I}$ ma własność Bolzano-Weierstrassa wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego skończonego kolorowania $[\mathbb{N}]^2 = C_1 \cup \cdots \cup C_r$ istnieje zbiór $A \notin \mathcal{I}$ który jest $\mathcal{I}$-jednorodny (tzn. istnieje $k \leqslant r$ takie, że dla każdego $a \in A$ mamy $\{b \in A : \{a,b\} \notin C_k\} \in \mathcal{I}$).

Badanie powyższych własności było kontynuowane przez Meza-Alcántarę [80] i Kwelę [64, 65] (rozwiązali oni m.in. pewne problemy postawione przez nas w pracy [P2]).

Klasyczne twierdzenie Schura mówi, że dla dowolnego kolorowania liczb naturalnych skończoną liczbą kolorów istnieją dwie liczby x, y takie, że x, y i $x+y$ mają ten sam kolor. W pracy [44] Frankl, Graham i Rödl udowodnili pewną iterowaną wersję twierdzenia Schura mówiącą, że dla dowolnego kolorowania $\mathbb{N} = C_1 \cup \cdots \cup C_r$ liczb naturalnych r kolorami istnieje $\delta = \delta(r) > 0$ (zależna od liczby kolorów) taka, że dla pewnego $i \leqslant r$ mamy

$$\overline{d}\Big(\Big\{x : \overline{d}(\{y : x, y, x+y \in C_i\}) \geqslant \delta\Big\}\Big) \geqslant \delta.$$

W pracy [P1] zajmujemy się iterowaną wersją twierdzenia Schura dla podmiar i otrzymujemy wyniki analogiczne jak dla twierdzenia Ramsey'a: [P1, Theorem 3.2] – dla dowolnych podmiar, [P1, Theorem 4.5] – dla podmiar, które nie są bezatomowe z niezależnością δ od liczby kolorów. Jedyną różnicą w porównaniu do twierdzenia Ramsey'a jest to, że musimy dodatkowo zakładać, że podmiary $||\cdot||_\phi$ są niezmiennicze ze względu na przesunięcia.

Filip

Różne rodzaje zbieżności ideałowej ciągów funkcji rzeczywistych. Prace [P10, P11] poświęcone są badaniu związków między różnymi rodzajami ideałowej zbieżności (m.in. punktowej, równej, jednostajnej i σ-jednostajnej) ciągów funkcji rzeczywistych.

Pierwsi taką tematyką zajęli się Das, Dutta i Pal w pracy [29], gdzie, poza podaniem pewnych związków między tymi zbieżnościami, postawili kilka problemów. W pracy [P10, Example 4.7,Corollary 5.4,Corollary 6.5] rozwiązaliśmy te problemy. Na przykład pokazaliśmy, że istnieje ideałowo punktowo zbieżny ciąg funkcji, który nie jest ideałowo równo zbieżny oraz udowodniliśmy, że ideałowa równa zbieżność implikuje ideałową σ-jednostajną zbieżność wtedy i tylko wtedy, gdy ideał jest przeliczalnie generowalny.

W pracy [P11] skupiamy się tylko na badaniu związku między ideałową zbieżnością punktową i równą. Udowodniliśmy [P11, Theorem 5.3], że ideałowa zbieżność punktowa implikuje ideałową zbieżność równą wtedy i tylko wtedy, gdy dziedzina funkcji nie jest „za duża" w sensie mocy. Pojęcie bycia nie „za dużym" wyraziliśmy w postaci pewnego współczynnika kardynalnego, który w przypadku klasycznym (czyli dla ideału zbiorów skończonych) jest równy liczbie $\mathfrak{b}$ (ang. *bounding number*).

Obecnie kontynuujemy badania związane z tym współczynnikiem kardynalnym. Do tej pory udowodniliśmy, że współczynnik ten jest równy liczbie $\mathfrak{b}$ dla wszystkich P-ideałów z własnością Baire'a. W przypadku nie P-ideałów mamy wyniki cząstkowe, ale cały czas brakuje wyniku obejmującego większą klasę ideałów.

Badaniem związków między ideałową zbieżnością punktową i równą zajmują się również Bukovský, Das i Šupina w pracy [21].

Ideałowa wersja twierdzeń Arzeli-Ascoliego, Mazurkiewicza i Helly'ego. Do każdego twierdzenia dotyczącego zbieżności ciągów można postawić pytanie, czy twierdzenie to pozostanie prawdziwe, gdy zbieżność klasyczną zastąpimy zbieżnością ideałową. Można nawet postawić trochę ogólniejszy problem o charakteryzację ideałów, dla których prawdziwa jest ideałowa wersja danego twierdzenia. Tak postąpiliśmy pytając o ideałową wersję twierdzenia Bolzano-Weierstrassa (zobacz rozdział 2 w części IV autoreferatu).

Zagadnienia tego typu dla twierdzeń dotyczących zbieżności ciągów funkcji były rozważane na przykład w pracy [9], gdzie Balcerzak, Dems i Komisarski udowodnili, że ideałowa wersja twierdzenia Jegorowa zachodzi dla ideału zbiorów gęstości zero, a w pracy [82] Mrożek uogólnił ich wynik na wszystkie analityczne P-ideały (kolejne wyniki dotyczące tego twierdzenia można znaleźć w pracy [54]). Ideałową wersją lematu Fatou zajmował się Louveau w pracy [72], a Solecki w pracy [101] scharakteryzował uniwersalnie mierzalne ideały, dla których zachodzi ideałowa wersja tego lematu.

W pracy [P5] badamy ideałowe wersje trzech twierdzeń dotyczących ciągów funkcyjnych: twierdzenia Arzeli-Ascoliego, Mazurkiewicza i Helly'ego.

W przypadku pierwszego twierdzenia udowodniliśmy charakteryzację [P5, Theorem 3.1] mówiącą, że dla danego ideału zachodzi ideałowa wersja twierdzenia Arzeli-Ascoliego wtedy i tylko wtedy, gdy ideał ma własność BW.

Twierdzenie Mazurkiewicza [79] mówi, że dla dowolnego ciągu wspólnie ograniczonych funkcji ciągłych $f_n : X \to \mathbb{R}$ istnieje zbiór doskonały $P \subseteq X$ i zbiór

Filip

nieskończony $A \subseteq \mathbb{N}$ taki, że podciąg $(f_n \restriction P)_{n\in A}$ jest zbieżny jednostajnie. W tym przypadku udowodniliśmy [P5, Theorem 4.1], że ideałowa wersja tego twierdzenia jest prawdziwa dla ideałów, które rozszerzają się do ideałów typu F_σ (zagadnienie rozszerzania ideałów do ideałów typu F_σ omówiłem w rozdziale 3 w części IV autoreferatu).

Można sprawdzić, że każdy ideał rozszerzający się do ideału typu F_σ ma własność BW oraz dla dowolnego ideału bez własności BW ideałowa wersja twierdzenia Mazurkiewicza jest fałszywa. Cały czas nie wiemy jednak czy własność BW charakteryzuje ideały, dla których zachodzi ideałowa wersja twierdzenia Mazurkiewicza [P5, Problem 4.3].

Twierdzenie Helly'ego [49] mówi, że ze wspólnie ograniczonego ciągu funkcji monotonicznych można wybrać podciąg punktowo zbieżny. W tym przypadku również dowodzimy [P5, Theorem 5.8], że ideałowa wersja tego twierdzenia jest prawdziwa dla ideałów rozszerzających się do ideałów typu F_σ i cały czas nie wiemy czy własność BW jest charakteryzacją ideałów, dla których zachodzi ideałowa wersja tego twierdzenia [P5, Problem 5.10]. W przypadku ideału van der Waerdena (definicja tego ideału jest podana poniżej) ideałowa wersja twierdzenia Helly'ego została udowodniona wcześniej przez Kojmana w pracy [60].

Przestrzenie Hindmana i van der Waerdena. Praca [P9] jest kontynuacją zagadnień badanych przeze mnie w artykule [H5]. Badamy w niej, poza przestrzeniami Hindmana, również przestrzenie van der Waerdena wprowadzone przez Kojmana w pracy [60].

Twierdzenie van der Waerdena [105] mówi, że dla dowolnej skończonej partycji $\mathbb{N} = A_1 \cup \dots \cup A_n$ istnieje $i \leqslant n$ taki, że A_i zawiera dowolnie długie skończone postępy arytmetyczne. *Ideał van der Waerdena* jest rodziną tych zbiorów $A \subseteq \mathbb{N}$, dla których nie zachodzi twierdzenie van der Waerdena, gdy zastąpimy $\mathbb{N}$ przez A.

Przestrzeń topologiczna ma *własność hBW względem ideału $\mathcal{I}$*, gdy każdy ciąg $(x_n)_{n\in A}$ w X, gdzie $A \notin \mathcal{I}$, ma podciąg $\mathcal{I}$-zbieżny na zbiorze spoza ideału ([H1]).

Dwa główne wyniki udowodnione w pracy [P9, Theorems 3.3 i 4.5] mówią, że własność BW i hBW względem ideału van der Waerdena (ideału Hindmana) są równoważne dla dowolnych przestrzeni topologicznych.

Porządek Katětova. Porządek Katětova $\leqslant_K$ (definicja została podana w rozdziale 3 części IV autoreferatu) został użyty przez Katětova w pracy [57] do badania ideałowych granic ciągów funkcji ciągłych.

Laczkovich i Recław [70] oraz niezależnie Debs i Saint Raymond [31] udowodnili, że ideałowe granice ciągów funkcji ciągłych nie wyprowadzają poza pierwszą klasę Baire'a wtedy i tylko wtedy, gdy ideał $\mathcal{I}$ nie zawiera izomorficznej kopii ideału $\mathrm{Fin} \times \mathrm{Fin}$ (w skrócie: $\mathrm{Fin} \times \mathrm{Fin} \not\sqsubseteq \mathcal{I}$)

W pracy [H4, Theorem 6.2] udowodniliśmy, że $\mathrm{Fin} \times \mathrm{Fin} \not\sqsubseteq \mathcal{I}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Fin} \times \mathrm{Fin} \not\leqslant_K \mathcal{I}$ dla każdego ideału $\mathcal{I}$. Wynik ten był dla nas punktem wyjścia do zbadania innych ideałów $\mathcal{J}$ (poza $\mathrm{Fin} \times \mathrm{Fin}$), mających analogiczną własność $\mathcal{J} \leqslant_K \mathcal{I} \iff \mathcal{J} \sqsubseteq \mathcal{I}$ dla każdego ideału $\mathcal{I}$. Ideały z taką własnością nazwaliśmy *ideałami z własnością Katětova.*

W pracy [P7, Theorem 3.4] podaliśmy charakteryzację ideałów mających własność Katětova: ideał $\mathcal{I}$ ma własność Katětova wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{J} \sqsubseteq \mathcal{J} \times \emptyset$.

Filip

Pokazaliśmy [P7, Proposition 3.6], że ideały z własnością Katětova są lokalnymi Q-ideałami oraz udowodniliśmy [P7, Proposition 3.10], że własność Katětova jest zamknięta ze względu na produkty Fubiniego ideałów.

Rozszerzanie ideału NWD do P-ideału. W pracy [32], zakładając hipotezę continuum, Dow udowodnił, że ideał NWD nigdziegęstych podzbiorów $\mathbb{Q}$ można rozszerzyć do P-ideału.

W pracy [P6, Corollary 1.3 i 2.2] dowodzimy, że to rozszerzenie nie może być „zbyt porządne" (tzn. ideał NWD nie rozszerza się do żadnego analitycznego P-ideału), ani „zbyt duże" (tzn. ideał NWD nie rozszerza się do żadnego maksymalnego P-ideału).

Ideał zbiorów jednostajnej gęstości zero. W pracy [P4] badamy ideał $\mathcal{I}_u$ zbiorów jednostajnej gęstości zero. Punktem wyjścia dla tej pracy było spostrzeżenie, że w artykule Baláza i Šaláta [4] autorzy błędnie założyli, że ideał $\mathcal{I}_u$ jest P-ideałem.

Ponadto udowodniliśmy [P4, Theorem 1], że jeśli podmiara jest bezatomowa, to ideał zbiorów zerowych dla tej podmiary nie ma własności BW. Następnie, używając tego twierdzenia wykazaliśmy, że ideał $\mathcal{I}_u$ nie ma własności BW. Dodatkowo pokazaliśmy [P4, Theorem 2], że ideał $\mathcal{I}_u$ jest typu $F_{\sigma\delta}$ i nie jest typu $G_{\delta\sigma}$.

Last but not least. Praca [P8] jest rozdziałem w monografii *„Traditional and present-day topics in real analysis"* dedykowanej profesorowi Janowi Lipińskiemu z okazji 90. urodzin. Nasz rozdział jest pracą przeglądową skupiającą się na trzech aspektach zbieżności ideałowej. W pierwszej części są rezultaty dotyczące zbieżności ideałowej ciągów ograniczonych (innymi słowy rozdział ten dotyczy ideałów z własnością Bolzano-Weierstrass). Druga część dotyczy ideałowej zbieżności ciągów funkcji ciągłych (tzn. rozważamy ideałowe klasy Baire'a funkcji). Ostatnia część opisuje zbiory punktów ideałowej zbieżności ciągów funkcyjnych (tzn. rozważamy ideałowe wersje tzw. siódemek Łuniny [73]). Badanie ideałowych siódemek Łuniny zostało zapoczątkowane przez Borzestowskiego i Recława [18] i było kontynuowane przez Racława [95] oraz Natkańca i Wesołowską [88].

Filip

Literatura

[1] R. P. Agnew, *Subseries of series which are not absolutely convergent*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 118–120.

[2] N. Alon, L. Drewnowski, and T. Łuczak, *Stable Kneser hypergraphs and ideals in* $\mathbb{N}$ *with the Nikodým property*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), no. 2, 467–471.

[3] H. Auerbach, *Über die Vorzeichenverteilung in unendlichen Reihen.*, Studia Math. **2** (1930), 228–230.

[4] V. Baláž and T. Šalát, *Uniform density* u *and corresponding* I_u*-convergence*, Math. Commun. **11** (2006), no. 1, 1–7.

[5] B. Balcar, F. Hernández-Hernández, and M. Hrušák, *Combinatorics of dense subsets of the rationals*, Fund. Math. **183** (2004), no. 1, 59–80.

[6] M. Balcerzak and J. Rzepecka, *On Marczewski-Burstin representations of algebras and ideals*, J. Appl. Anal. **9** (2003), no. 2, 275–286.

[7] M. Balcerzak, A. Bartoszewicz, and K. Ciesielski, *On Marczewski-Burstin representations of certain algebras of sets*, Real Anal. Exchange **26** (2000/01), no. 2, 581–591.

[8] M. Balcerzak, A. Bartoszewicz, and P. Koszmider, *On Marczewski-Burstin representable algebras*, Colloq. Math. **99** (2004), no. 1, 55–60.

[9] M. Balcerzak, K. Dems, and A. Komisarski, *Statistical convergence and ideal convergence for sequences of functions*, J. Math. Anal. Appl. **328** (2007), no. 1, 715–729.

[10] A. Bartoszewicz, *Marczewski-Burstin representations of Boolean algebras isomorphic to a power set*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **53** (2005), no. 3, 239–250.

[11] A. Bartoszewicz and K. Ciesielski, *MB-representations and topological algebras*, Real Anal. Exchange **27** (2001/02), no. 2, 749–755.

[12] A. Bartoszewicz and A. Kowalski, *The Stone representation of an atomic complete Boolean algebra is Marczewski-Burstin representable*, J. Appl. Anal. **18** (2012), no. 2, 297–301.

[13] J. E. Baumgartner, *Ultrafilters on* ω, J. Symbolic Logic **60** (1995), no. 2, 624–639.

[14] T. Bermúdez and A. Martinón, *Changes of signs in conditionally convergent series on a small set*, Appl. Math. Lett. **24** (2011), no. 11, 1831–1834.

[15] K. P. S. Bhaskara Rao and M. Bhaskara Rao, *Theory of charges*, Pure and Applied Mathematics, vol. 109, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983. A study of finitely additive measures, With a foreword by D. M. Stone.

[16] A. Blass, *Combinatorial cardinal characteristics of the continuum*, Handbook of set theory. Vols. 1, 2, 3, 2010, pp. 395–489.

[17] P. Borodulin-Nadzieja, B. Farkas, and G. Plebanek, *Representations of ideals in Polish groups and in Banach spaces*, arXiv:1402.0441v1 (2014). (to appear in J. Symbolic Logic).

[18] D. Borzestowski and I. Recław, *On Lunina's 7-tuples for ideal convergence*, Real Anal. Exchange **35** (2010), no. 2, 479–485.

[19] J. Brendle and D. A. Mejía, *Rothberger gaps in fragmented ideals*, Fund. Math. **227** (2014), no. 1, 35–68.

[20] J. B. Brown and H. Elalaoui-Talibi, *Marczewski-Burstin-like characterizations of* σ*-algebras, ideals, and measurable functions*, Colloq. Math. **82** (1999), no. 2, 277–286.

[21] L. Bukovský, P. Das, and J. Šupina, *Ideal quasi-normal convergence and related notions*, 2014. manuscript.

[22] L. Bukovský, I. Recław, and M. Repický, *Spaces not distinguishing pointwise and quasinormal convergence of real functions*, Topology Appl. **41** (1991), no. 1-2, 25–40.

[23] L. Bukovský, I. Recław, and M. Repický, *Spaces not distinguishing convergences of real-valued functions*, Topology Appl. **112** (2001), no. 1, 13–40.

[24] H. Cartan, *Filtres et ultrafiltres.*, C. R. Acad. Sci., Paris **205** (1937), 777–779.

[25] K. Ciesielski and J. Pawlikowski, *Nice Hamel bases under the covering property axiom*, Acta Math. Hungar. **105** (2004), no. 3, 197–213.

[26] K. Ciesielski and J. Pawlikowski, *The covering property axiom, CPA*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 164, Cambridge University Press, Cambridge, 2004. A combinatorial core of the iterated perfect set model.

Flw

[27] Á. Császár and M. Laczkovich, *Discrete and equal convergence*, Studia Sci. Math. Hungar. **10** (1975), no. 3-4, 463–472 (1978).
[28] Á. Császár and M. Laczkovich, *Discrete and equal Baire classes*, Acta Math. Hungar. **55** (1990), no. 1-2, 165–178.
[29] P. Das, S. Dutta, and S. K. Pal, *On $\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}^*$-equal convergence and an Egoroff-type theorem*, Mat. Vesnik **66** (2014), no. 2, 165–177.
[30] N. G. de Bruijn, *Functions whose differences belong to a given class*, Nieuw Arch. Wiskunde (2) **23** (1951), 194–218.
[31] G. Debs and J. Saint Raymond, *Filter descriptive classes of Borel functions*, Fund. Math. **204** (2009), no. 3, 189–213.
[32] A. Dow, *The space of minimal prime ideals of $C(\beta\mathbf{N} - \mathbf{N})$ is probably not basically disconnected*, General topology and applications (Middletown, CT, 1988), 1990, pp. 81–86.
[33] L. Drewnowski and T. Łuczak, *On nonatomic submeasures on* $\mathbb{N}$, Arch. Math. (Basel) **91** (2008), no. 1, 76–85.
[34] L. Drewnowski and T. Łuczak, *On nonatomic submeasures on* $\mathbb{N}$. *II*, J. Math. Anal. Appl. **347** (2008), no. 2, 442–449.
[35] L. Drewnowski and T. Łuczak, *On nonatomic submeasures on* $\mathbb{N}$. *III*, Arch. Math. (Basel) **92** (2009), no. 4, 377–382.
[36] L. Drewnowski and P. J. Paúl, *The Nikodým property for ideals of sets defined by matrix summability methods*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. (Esp.) **94** (2000), no. 4, 485–503. Perspectives in mathematical analysis (Spanish).
[37] R. Estrada and R. P. Kanwal, *Series that converge on sets of null density*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), no. 4, 682–686.
[38] I. Farah, *Analytic quotients: theory of liftings for quotients over analytic ideals on the integers*, Mem. Amer. Math. Soc. **148** (2000), no. 702, xvi+177.
[39] I. Farah, *How many Boolean algebras $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathcal{I}$ are there?*, Illinois J. Math. **46** (2002), no. 4, 999–1033.
[40] B. Farkas and L. Soukup, *More on cardinal invariants of analytic P-ideals*, Comment. Math. Univ. Carolin. **50** (2009), no. 2, 281–295.
[41] J. Flašková, *Ideals and sequentially compact spaces*, Topology Proc. **33** (2009), 107–121.
[42] J. Flašková, *Ultrafilters and small sets*, Ph.D. Thesis (Charles University, Prague), 2006.
[43] J. Flašková, *Ultrafilters on ω*, Proc. RIMS **1619** (2006).
[44] P. Frankl, R. L. Graham, and V. Rödl, *Iterated combinatorial density theorems*, J. Combin. Theory Ser. A **54** (1990), no. 1, 95–111.
[45] H. Fujita, *Remarks on two problems by M. Laczkovich on functions with Borel measurable differences*, Acta Math. Hungar. **117** (2007), no. 1-2, 153–160.
[46] H. Fujita and T. Mátrai, *On the difference property of Borel measurable functions*, Fund. Math. **208** (2010), no. 1, 57–73.
[47] H. Furstenberg and B. Weiss, *Topological dynamics and combinatorial number theory*, J. Analyse Math. **34** (1978), 61–85 (1979).
[48] O. Guzmán-González and D. Meza-Alcántara, *Some structural aspects of the Katětov order on Borel ideals*, to appear in Order (2015), DOI: 10.1007/s11083-015-9358-8.
[49] E. Helly, *Über lineare Funktionaloperationen*, Sitzungsber. der Kaiserl. Akad. der Wiss. in Wien, Math.-naturwiss. Kl. **121** (1912), 265–297.
[50] F. Hernández-Hernández and M. Hrušák, *Cardinal invariants of analytic P-ideals*, Canad. J. Math. **59** (2007), no. 3, 575–595.
[51] N. Hindman, *Finite sums from sequences within cells of a partition of n*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **17** (1974), no. 1, 1 –11.
[52] M. Hrušák, *Combinatorics of filters and ideals*, Set theory and its applications, 2011, pp. 29–69.
[53] A. L. Jones, *A brief remark on van der Waerden spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 8, 2457–2460.

Flj

[54] V. Kadets and A. Leonov, *Dominated convergence and Egorov theorems for filter convergence*, Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom. **3** (2007), no. 2, 196–212, 284.

[55] M. Katětov, *On descriptive classification of functions*, General topology and its relations to modern analysis and algebra, III (Proc. Third Prague Topological Sympos., 1971), 1972, pp. 235–242.

[56] M. Katětov, *Products of filters*, Comment. Math. Univ. Carolinae **9** (1968), 173–189.

[57] M. Katětov, *On descriptive classes of functions*, Theory of sets and topology (in honour of Felix Hausdorff, 1868–1942), 1972, pp. 265–278.

[58] P. Klinga, *Rearranging series of vectors on a small set*, J. Math. Anal. Appl. **424** (2015), no. 2, 966–974.

[59] M. Kojman, *Hindman spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 6, 1597–1602.

[60] M. Kojman, *van der Waerden spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 3, 631–635.

[61] M. Kojman and S. Shelah, *van der Waerden spaces and Hindman spaces are not the same*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 5, 1619–1622.

[62] P. Kostyrko, T. Šalát, and W. Wilczyński, *$\mathcal{I}$-convergence*, Real Anal. Exchange **26** (2000/01), no. 2, 669–685.

[63] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities*, Second, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. Cauchy's equation and Jensen's inequality, Edited and with a preface by Attila Gilányi.

[64] A. Kwela, *Kombinatoryczne i deskryptywne własności ideałów na zbiorach przeliczalnych*, Ph.D. Thesis (Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk), 2014.

[65] A. Kwela, *A note on a new ideal*, J. Math. Anal. Appl. **430** (2015), no. 2, 932–949.

[66] M. Kysiak, *Nonmeasurable algebraic sums of sets of reals*, Colloq. Math. **102** (2005), no. 1, 113–122.

[67] M. Laczkovich, *Functions with measurable differences*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **35** (1980), no. 1-2, 217–235.

[68] M. Laczkovich, *The difference property*, Paul Erdős and his mathematics, I (Budapest, 1999), 2002, pp. 363–410.

[69] M. Laczkovich, *Two constructions of Sierpiński and some cardinal invariants of ideals*, Real Anal. Exchange **24** (1998/99), no. 2, 663–676.

[70] M. Laczkovich and I. Recław, *Ideal limits of sequences of continuous functions*, Fund. Math. **203** (2009), no. 1, 39–46.

[71] C. Laflamme, *Filter games and combinatorial properties of strategies*, Set theory (Boise, ID, 1992–1994), 1996, pp. 51–67.

[72] A. Louveau, *Sur la génération des fonctions boréliennes fortement affines sur un convexe compact métrisable*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **36** (1986), no. 2, 57–68.

[73] M. A. Lunina, *Sets of convergence and divergence of sequences of real-valued continuous functions on a metric space*, Mat. Zametki **17** (1975), 205–217.

[74] A. R. D. Mathias, *Solution of problems of Choquet and Puritz*, Conference in Mathematical Logic—London '70 (Bedford Coll., London, 1970), 1972, pp. 204–210. Lecture Notes in Math., Vol. 255.

[75] T. Mátrai, *Weak difference property of functions with the Baire property*, Fund. Math. **177** (2003), no. 1, 1–17.

[76] G. Matusik and T. Natkaniec, *Algebraic properties of Hamel functions*, Acta Math. Hungar. **126** (2010), no. 3, 209–229.

[77] G. Matusik, *On the lattice generated by Hamel functions*, Real Anal. Exchange **36** (2010/11), no. 1, 65–77.

[78] K. Mazur, *F_σ-ideals and $\omega_1\omega_1^*$-gaps in the Boolean algebras $P(\omega)/I$*, Fund. Math. **138** (1991), no. 2, 103–111.

[79] S. Mazurkiewicz, *Sur les suites de fonctions continues*, Fund. Math. **18** (1932), 114–117.

[80] D. Meza-Alcántara, *Ideals and filters on countable set*, Ph.D. Thesis (Universidad Nacional Autónoma de México), 2009.

[81] S. Mrówka, *On completely regular spaces*, Fund. Math. **41** (1954), 105–106.

[82] N. Mrożek, *Ideal version of Egorov's theorem for analytic P-ideals*, J. Math. Anal. Appl. **349** (2009), no. 2, 452–458.
[83] N. Mrożek, *Zbieżność idealowa ciągów funkcyjnych*, Ph.D. Thesis (Uniwersytet Gdański), 2010.
[84] J. Mycielski, *Independent sets in topological algebras*, Fund. Math. **55** (1964), 139–147.
[85] T. Natkaniec, *An example of a quasi-continuous Hamel function*, Real Anal. Exchange **36** (2010/11), no. 1, 231–236.
[86] T. Natkaniec, *On Hamel-like functions*, Real functions, density topology and related topics, 2011, pp. 122–129.
[87] T. Natkaniec and P. Szuca, *On the ideal convergence of sequences of quasi-continuous functions*, to appear in Fund. Math. (2015).
[88] T. Natkaniec and J. Wesołowska, *Sets of ideal convergence of sequences of quasi-continuous functions*, J. Math. Anal. Appl. **423** (2015), no. 2, 924–939.
[89] M. Paštéka, *Convergence of series and submeasures of the set of positive integers*, Math. Slovaca **40** (1990), no. 3, 273–278.
[90] K. Płotka, *On functions whose graph is a Hamel basis*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 4, 1031–1041.
[91] K. Płotka, *Darboux-like functions within the class of Hamel functions*, Real Anal. Exchange **34** (2009), no. 1, 115–125.
[92] K. Płotka, *On functions whose graph is a Hamel basis. II*, Canad. Math. Bull. **52** (2009), no. 2, 295–302.
[93] K. Płotka and I. Recław, *Finitely continuous Hamel functions*, Real Anal. Exchange **30** (2004/05), no. 2, 867–870.
[94] I. Recław, *Metric spaces not distinguishing pointwise and quasinormal convergence of real functions*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **45** (1997), no. 3, 287–289.
[95] I. Recław, *Sets of filter convergence of sequences of continuous functions*, J. Math. Anal. Appl. **394** (2012), no. 2, 475–480.
[96] I. J. Schoenberg, *The integrability of certain functions and related summability methods.*, Amer. Math. Monthly **66** (1959), 361–375.
[97] J. J. Sember and A. R. Freedman, *On summing sequences of* 0*'s and* 1*'s*, Rocky Mountain J. Math. **11** (1981), no. 3, 419–425.
[98] W. Sierpiński, *Sur la Question de la Mesurabilité de la Base de M. Hamel*, Fund. Math. **1** (1920), no. 1, 105–111.
[99] W. Sierpiński, *Sur les suites transfinies convergentes de fonctions de Baire*, Fund. Math. **1** (1920), no. 1, 134–141.
[100] S. Solecki, *Analytic ideals and their applications*, Ann. Pure Appl. Logic **99** (1999), no. 1-3, 51–72.
[101] S. Solecki, *Filters and sequences*, Fund. Math. **163** (2000), no. 3, 215–228.
[102] H. Steinhaus, *Comptes rendus: Société Polonaise de Mathématique. Section de Wroclaw. Septembre 1948-Mars 1949*, Colloquium Math. **2** (1951), 63–78.
[103] J. Steprāns, *Reaping numbers in quotient algebras*, 2013. manuscript.
[104] M. Talagrand, *Compacts de fonctions mesurables et filtres non mesurables*, Studia Math. **67** (1980), no. 1, 13–43.
[105] B. L. van der Waerden, *Beweis eine baudetschen vermutung*, Nieus Arch. Wisk. **15** (1927), 212–216.
[106] E. K. van Douwen, *The integers and topology*, Handbook of set-theoretic topology, 1984, pp. 111–167.
[107] W. Wilczyński, *On Riemann derangement theorem*, Słupskie Prace Matematyczno-Fizyczne **4** (2007), 79–82.

Gdańsk, 19 sierpnia 2015

Rafał Filipów
Rafał Filipów