OCENA ROZPRAWY HABILITACYJNEJ, ZATYTUŁOWANEJ *ZBIEŻNOŚĆ IDEAŁOWA I KOMBINATORYKA NIESKOŃCZONA* ORAZ DOROBKU NAUKOWEGO P. DR. RAFAŁA FILIPÓWA

Rozprawa habilitacyjna dr. Rafała Filipówa składa się z sześciu artykułów, z których dwa są całkiem samodzielne, a w przypadku pozostałych czterech habilitant występuje jako współautor. Opublikowane zostały na przestrzeni lat 2007-2014. Dotyczą one topologii ogólnej i analizy matematycznej, ze szczególnym uwzględnieniem problemów zbieżności ideałowej ciągów punktów oraz funkcji rzeczywistych. Podstawowe dla definicji zbieżności ideałowej jest pojęcie ideału w zbiorze $\mathbb{N}$ liczb naturalnych. Jest to niepusta rodzina $\mathcal{I}$ podzbiorów $\mathbb{N}$ zamknięta ze względu na sumy skończone i ze względu na podzbiory. Ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktów przestrzeni topologicznej T jest ideałowo zbieżny do punktu y jeżeli dla każdego otoczenia U punktu y istnieje zbiór $A \in \mathcal{I}$ taki, że $x_n \in U$, dla każdego $n \notin A$. W szczególności zbieżność względem ideału podzbiorów skończonych jest zwykłą zbieżnością ciągu. Wcześniej nie spotkałem się z pojęciem zbieżności ideałowej. Nie znalazłem też tego terminu w monografii Ryszarda Engelkinga *Topologia Ogólna*. Występuje natomiast - znane od dawna m. in. za sprawą Bourbakiego - pojęcie zbieżności względem filtru, które w istocie rzeczy jest tym samym zważywszy, że rodzina dopełnień zbiorów z ideału jest filtrem, o czym zresztą habilitant wspomina we wstępie do swojego autoreferatu.

Jednym z głównych zagadnień rozprawy jest badanie ideałów w $\mathbb{N}$, dla których prawdziwy jest odpowiednik klasycznego twierdzenia Bolzano-Weierstrassa, że z każdego ograniczonego ciągu liczb rzeczywistych można wybrać podciąg zbieżny. Wtedy mówi się, że ideał ma własność BW. Zagadnienie wydaje się naturalne, aczkolwiek głębsza motywacja dla podjęcia takiego badania nie jest dla mnie jasna. Rozprawa dostarcza różnych charakteryzacji ideałów z własnością BW, z których najważniejsza wydaje się charakteryzacja w języku drzew, a także charakteryzacja poprzez podmiary bezatomowe. Osiągnięcia te umożliwiły habilitantowi (i współautorom) rozstrzygnięcie kilku otwartych kwestii stawianych przez innych autorów, a dotyczących teorii ideałów oraz podmiar bezatomowych w zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Jedną z nich jest problem opisu ideałów rozszerzalnych do ideałów sumowalnych; przy czym przez ideał sumowalny rozumie się ideał, dla którego istnieje szereg rozbieżny $\sum a_n$ o wyrazach rzeczywistych nieujemnych taki, że ideał składa się z tych A, że suma częściowa $\sum_{n\in A} a_n$ jest skończona. Okazało się, że problem ten ma ścisły związek z klasycznym twierdzeniem Riemanna o szeregach warunkowo zbieżnych mówiącym, że w szeregu warunkowo zbieżnym można tak poprzestawiać wyrazy, aby otrzymać szereg zbieżny do dowolnej danej z góry liczby. Mówi się, że ideał ma własność Riemanna, jeżeli twierdzenie Riemanna zachodzi z permutacją o zbiorze elementów niestałych należącym do ideału. Autorzy