OCENA ROZPRAWY HABILITACYJNEJ, ZATYTUŁOWANEJ
ZBIEŻNOŚĆ IDEAŁOWA I KOMBINATORYKA NIESKOŃCZONA
ORAZ DOROBKU NAUKOWEGO
P. DR. RAFAŁA FILIPÓWA

Rozprawa habilitacyjna dr. Rafała Filipówa składa się z sześciu artykułów, z których dwa są całkiem samodzielne, a w przypadku pozostałych czterech habilitant występuje jako współautor. Opublikowane zostały na przestrzeni lat 2007-2014. Dotyczą one topologii ogólnej i analizy matematycznej, ze szczególnym uwzględnieniem problemów zbieżności ideałowej ciągów punktów oraz funkcji rzeczywistych. Podstawowe dla definicji zbieżności ideałowej jest pojęcie ideału w zbiorze $\mathbb{N}$ liczb naturalnych. Jest to niepusta rodzina $\mathcal{I}$ podzbiorów $\mathbb{N}$ zamknięta ze względu na sumy skończone i ze względu na podzbiory. Ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktów przestrzeni topologicznej T jest ideałowo zbieżny do punktu y jeżeli dla każdego otoczenia U punktu y istnieje zbiór $A \in \mathcal{I}$ taki, że $x_n \in U$, dla każdego $n \notin A$. W szczególności zbieżność względem ideału podzbiorów skończonych jest zwykłą zbieżnością ciągu. Wcześniej nie spotkałem się z pojęciem zbieżności ideałowej. Nie znalazłem też tego terminu w monografii Ryszarda Engelkinga *Topologia Ogólna*. Występuje natomiast - znane od dawna m. in. za sprawą Bourbakiego - pojęcie zbieżności względem filtru, które w istocie rzeczy jest tym samym zważywszy, że rodzina dopełnień zbiorów z ideału jest filtrem, o czym zresztą habilitant wspomina we wstępie do swojego autoreferatu.

Jednym z głównych zagadnień rozprawy jest badanie ideałów w $\mathbb{N}$, dla których prawdziwy jest odpowiednik klasycznego twierdzenia Bolzano-Weierstrassa, że z każdego ograniczonego ciągu liczb rzeczywistych można wybrać podciąg zbieżny. Wtedy mówi się, że ideał ma własność BW. Zagadnienie wydaje się naturalne, aczkolwiek głębsza motywacja dla podjęcia takiego badania nie jest dla mnie jasna. Rozprawa dostarcza różnych charakteryzacji ideałów z własnością BW, z których najważniejsza wydaje się charakteryzacja w języku drzew, a także charakteryzacja poprzez podmiary bezatomowe. Osiągnięcia te umożliwiły habilitantowi (i współautorom) rozstrzygnięcie kilku otwartych kwestii stawianych przez innych autorów, a dotyczących teorii ideałów oraz podmiar bezatomowych w zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Jedną z nich jest problem opisu ideałów rozszerzalnych do ideałów sumowalnych; przy czym przez ideał sumowalny rozumie się ideał, dla którego istnieje szereg rozbieżny $\sum a_n$ o wyrazach rzeczywistych nieujemnych taki, że ideał składa się z tych A, że suma częściowa $\sum_{n\in A} a_n$ jest skończona. Okazało się, że problem ten ma ścisły związek z klasycznym twierdzeniem Riemanna o szeregach warunkowo zbieżnych mówiącym, że w szeregu warunkowo zbieżnym można tak poprzestawiać wyrazy, aby otrzymać szereg zbieżny do dowolnej danej z góry liczby. Mówi się, że ideał ma własność Riemanna, jeżeli twierdzenie Riemanna zachodzi z permutacją o zbiorze elementów niestałych należącym do ideału. Autorzy dowodzą, że ideał ma własność Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy nie posiada on rozszerzenia do ideału sumowalnego. Przedstawiony dowód jest krótki i w zasadzie prosty, aczkolwiek wymagał pewnej pomysłowości.

Jeden z artykułów poświęcony jest ideałowemu uogólnieniu trzech rodzajów zbieżności funkcyjnej; mianowicie, zbieżności punktowej, dyskretnej i zbieżności równej (equal convergence). Otrzymane jest także uogólnienie klas Baire'a odpowiadających tym zbieżnościom i generowanych przez funkcje ciągłe, podobnie jak w przypadku klasycznym.

Dwa artykuły wchodzące w skład rozprawy zostały napisane samodzielnie przez habilitanta. W jednym z nich autor nawiązał do wcześniejszej pracy o przestrzeniach topologicznych mających własność BW ze względu na pewne ideały w zbiorze liczb naturalnych. Swoje badanie koncentruje na jednym specjalnym ideale zwanym ideałem Hindmana, którym wcześniej matematycy interesowali się i na przestrzeniach topologicznych związanych z tym ideałem pod kątem spełniania warunku BW. Ostatni artykuł też dotyczy ideałów w zbiorze liczb naturalnych, ale z punktu widzenia ilorazowych algebr Boole'a otrzymanych w wyniku dzielenia przez tak zwane ładne ideały. Jako zastosowanie autor pokazuje powiązanie swoich wyników z problemami dotyczącymi zbieżności funkcji rzeczywistych jednej zmiennej rzeczywistej, które były badane przez Saksa, Mazurkiewicza i Sierpińskiego.

Na pozostały dorobek habilitanta składa się szesnaście artykułów, z których dwa są napisane samodzielnie (w tym dysertacja doktorska), a pozostałe - we współpracy z innymi matematykami. Dotyczą one teorii funkcji rzeczywistych jednej zmiennej rzeczywistej oraz ideałów w zbiorze liczb naturalnych w powiązaniu z podobną problematyką jak ta występująca w rozprawie habilitacyjnej.

Przejdźmy do zasadniczego pytania; mianowicie, czy rozprawa i pozostały dorobek są wystarczające do przyznania stopnia naukowego doktora habilitowanego. Z jednej strony uzyskane rezultaty mają swoisty urok powiązania z klasycznymi twierdzeniami takimi jak twierdzenie Bolzano-Weierstrassa i Riemanna. Można je chyba także uznać za kontynuację badań wywodzących się z przedwojennej jeszcze polskiej szkoły topologii i analizy (habilitant nawiązuje do Mazurkiewicza i Sierpińskiego). Z drugiej jednak strony z punktu widzenia ciężaru gatunkowego rezultaty te trudno uznać za mocne czy wybitne. Owszem, stanowią one interesujące przyczynki odpowiadające na pytania stawiane przez innych matematyków. Ale czy są na miarę habilitacji? W moim odczuciu raczej nie są. Dodatkową trudność w ocenie osiągnieć stwarza to, że - w większości - nie zostały one wypracowane przez habilitanta samodzielnie. Z jednej strony świadczy to pozytywnie o jego zdolności do współpracy. Z drugiej jednak, przy ostatecznej ocenie dorobku trzeba zastosować odpowiedni współczynnik mniejszy od 1.

Konkludując, dorobek habilitanta zawiera szereg interesujących rezultatów i wierzę, że jest on na dobrej drodze, jednak dotychczasowe osiągnięcia nie wydają się wystarczające, aby uznać, że ustawowy wymóg o zacznym wkładzie w rozwój matematyki został spełniony.

Wiesław Pawłucki

Kraków, dnia 22. grudnia 2015 r.