

## STRESZCZENIE PRACY DOKTORSKIEJ W JĘZYKU POLSKIM

### A. Motywacja oraz cel pracy

Formalizm mechaniki kwantowej – umożliwiający weryfikowalny doświadczalnie opis fizyki atomowej, optyki, fizyki ciała stałego, układów otwartych, cząstek elementarnych – opiera się na postulatach skutkujących jedno- i wielociałowymi korelacjami niemożliwymi do opisania za pomocą klasycznej teorii prawdopodobieństwa. W tym sensie klasyczna teoria prawdopodobieństwa ograniczona jest do opisu układów makroskopowych, gdzie, na skutek oddziaływania z otoczeniem, w procesie dekoherencji następuje redukcja kwantowych teorii ewolucji stanów układów, jak i odpowiadających im dystrybucji prawdopodobieństw, do ich klasycznych wersji. W kontekście licznych zastosowań kwantowych korelacji, np. w algorytmach obliczeniowych wykazujących wykładnicze przyspieszenie w stosunku do algorytmów klasycznych, w kryptografii czy symulacji układów fizycznych – zagadnienie ochrony kwantowych korelacji przed zniszczeniem w obecności zewnętrznego szumu nabiera, oprócz motywacji poznawczych, silnego uzasadnienia praktycznego. Z drugiej strony, powszechność dekoherencji w przyrodzie skłania do poszukiwania układów fizycznych wykorzystujących oddziaływanie z otoczeniem jako katalizatora procesów mikroskopowych. Ta dychotomia znajduje odbicie w strukturze niniejszej rozprawy. Zaprezentowano w niej wypracowane przez autora i współpracowników dowody i procedury kwantowej komunikacji bazujące na minimalizujących dekoherencję schematach kwantowej korekcji błędów, mające zastosowanie w kwantowej kryptografii i kwantowych obliczeniach. Z drugiej strony, w analogii do zachodzących w naturze procesów wykorzystujących przejście z reżimu kwantowego do klasycznego, podjęto się analizy możliwości zastosowania w pomiarach pola magnetycznego realizowalnych doświadczalnie układów kropek kwantowych.

Celem powstania idei kwantowych przekaźników<sup>1</sup> [1] było umożliwienie kwantowej komunikacji w obecności szumu pomiędzy odseparowanymi przestrzennie układami. Opiera się ona na wytwarzaniu splątania (rodzaju kwantowych korelacji, [2]) pomiędzy oddalonymi węzłami jednowymiarowej sie-

---

<sup>1</sup>ang. *quantum repeaters*.

ci, przy wykorzystaniu lokalnych korelacji kwantowych pomiędzy układami z sąsiednich węzłów. Wykorzystując protokoły puryfikacji i wymiany splątania możliwe jest ustanowienie kwantowej komunikacji w jednym wymiarze na duże odległości, kosztem logarytmicznego wzrostu liczby systemów na węzłach sieci, co wiąże się z koniecznością użycia kwantowych pamięci do ich przechowywania. Sposobem na eliminację tej niedogodności jest użycie trójwymiarowych sieci kwantowych, wykorzystujących globalne korelacje kwantowe i protokoły korekcyjnych błędów [3]. Dostarczenie brakującego dowodu na kwantową komunikację w dwuwymiarowych sieciach kwantowych (bez użycia długookresowych pamięci kwantowych) jest celem pracy [A]. Przedstawiony dowód opiera się na rozważeniu wierności procedury wkodowania stanu w jednowymiarowy kod kwantowy. W pracy tej proponujemy także prosty schemat komunikacji w trzech wymiarach, oparty na procedurze wkodowania nieznanego stanu kwantowego w kod Kitaeva na płaszczyźnie [4]. W pracy [B] została zaprezentowana procedura wkodowania uogólniona na przypadki kodów topologicznych typu Calderbanka-Steana-Shora (CSS) [5–7]. Znajduje ona potencjalne zastosowanie w kwantowych pamięciach i uniwersalnych obliczeniach kwantowych wykorzystujących destylację stanów magicznych [8].

Omówione wyżej metody zastosowania kwantowych korelacji w kwantowej komunikacji oparte są na procedurach korekcyjnych ograniczających negatywne efekty oddziaływania z otoczeniem. Tymczasem kwantowa biologia dostarcza przykładów systemów, które wykorzystują owo oddziaływanie jako katalizator procesów transportu lub pomiaru – dobrą ilustracją są tutaj związki absorbujące promieniowanie elektromagnetyczne i przekazujące wzbudzenia elektronowe do centrum chlorofili [9]. Mechanizmami umożliwiającymi transport mogą być w tym przypadku: powstające na skutek szumu rozmycie poziomów energetycznych stanów wzbudzonych cząsteczek; indukowana przez otoczenie ewolucja unitarna bądź dekoherencja fazowa, powodujące odblokowanie kanałów transportu niedostępnych dla danego rodzaju korelacji; oddziaływanie stanów wzbudzonych sieci z ciągłym lub dyskretnym [10] spektrum modów wibracyjnych. Praca [11] zawiera analizę transportu w sieciach kwantowych oddziałujących z kąpielą spinową. Oddziaływanie układów kwantowych z kąpielą spinową jest wykorzystywane także w magnetodetekcji opartej o mechanizm wolnych rodników [12].

Drugim celem niniejszej rozprawy jest wykorzystanie, bazującego na tym mechanizmie, zaniku kwantowych korelacji w realizowalnych doświadczalnie układach. Rozważamy ewolucję układu spinów elektronów związanych w kropkach kwantowych z arsenku galu (GaAs) pod wpływem zewnętrznego pola magnetycznego, gdzie głównym mechanizmem dekoherencji jest oddziaływanie nadsubtelne z maksymalnie mieszanym stanem jąder atomów tworzących kropkę. W pracy [C] przedstawiamy procedurę korzystającą z pomiarów stanu singletowego pary elektronowej w reżimie blokady Pauliego; procedura ta wyzyskuje zależność czasu nagłej śmierci splątania od pola magnetycznego. Praca [D] poświęcona jest analizie zachowania ewolucji ogólnych korelacji kwantowych w układzie i ich wykorzystaniu w magnetodetekcji.

W celu wprowadzenia notacji, poniżej prezentujemy podstawowe kwantowo-informatyczne i fizyczne pojęcia opisujące rozważane problemy, rozpoczynając od zarysu metod kwantowej korekcji błędów opartych na kodach stabilizatorowych.

Możliwość przeprowadzenia obliczeń kwantowych w obecności oddziaływania z otoczeniem jest treścią teorii progowej [13]. Bazując na założeniu o eksponencjalnym zaniku korelacji pomiędzy błędami, dopuszcza ona przeprowadzenie obliczeń kwantowych z dowolną dokładnością, kosztem polilogarytmicznie rosnących zasobów czasowych i przestrzennych, pod warunkiem, że prawdopodobieństwo błędu jest ograniczone. Krytyczna dyskusja modelu lokalnego szumu w układach kwantowych pozostających w kontakcie z kąpielą ciepłą zawarta jest w pracy [14]. W analizach dotyczących komunikacji kwantowej ([A], [B]), ze względu na lokalność hamiltonianu kwantowego kodu korekcji błędów i użycie niezależnych zaszumionych kanałów kwantowych do teleportacji stanów podsystemów, za model oddziaływania z otoczeniem przyjmujemy lokalny szum działający na każdy z kubitów<sup>2</sup>:

$$\rho \rightarrow (1 - p^2)\rho + p(1 - p)\sigma_x\rho\sigma_x + (1 - p)^2\sigma_y\rho\sigma_y + p(1 - p)\sigma_z\rho\sigma_z, \quad (1)$$

gdzie  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  są odpowiednimi macierzami Pauliego,  $0 \leq p \leq 1$ .

Formalizm stabilizatorowy [15] pozwala na wygodny opis wielu kodów korekcji błędów zapewniających ochronę przed dekoherencją w sensie teo-

---

<sup>2</sup>tj. kwantowych układów dwupoziomowych.

rii progowej. Stan kwantowy przechowywany jest tutaj w podprzestrzeni logicznej  $\mathcal{H}_{log}$  przestrzeni Hilberta układu  $N$  fizycznych kubitów,  $\mathcal{H}_{sys} = \otimes_i \mathcal{H}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ;  $\mathcal{H}_{log} \in \mathcal{H}_{sys}$ , przy dekompozycji na kubity logiczne  $\mathcal{H}_{log} = \otimes_j \mathcal{H}_{L,j}$ ,  $j = 1, \dots, D \leq N$  i wymiarze przestrzeni  $dim[\mathcal{H}_i] = 2 = dim[\mathcal{H}_{L,i}]$ . Podprzestrzeń logiczna  $\mathcal{H}_{log}$  rozpinana jest przez wektory własne grupy operatorów (zwanymi stabilizatorami kodu)  $S: \{|\Psi\rangle : s|\Psi\rangle = |\Psi\rangle, \forall s \in S\}$ , gdzie  $S$  jest abelową podgrupą grupy Pauliego działającą na  $\mathcal{H}_{sys}$  niezawierającą operatora  $-\mathcal{I}$ , gdzie  $\mathcal{I}$  jest operatorem identyczności. Generator grupy  $S$ ,  $G(S)$ , jest zbiorem hermitowskich, komutujących parami operatorów z grupy Pauliego, o ilości elementów  $|G(S)|$ , przy czym wymiar przestrzeni logicznej jest dany przez  $dim[\mathcal{H}_{log}] = N - |G(S)|$ . Elementy par  $(X_{L,j}, Z_{L,j})$  antykomutujących operatorów na przestrzeni  $\mathcal{H}_{L,j}$  komutują z elementami z  $G(S)$ , ale nie być przez nie utworzone. W przypadku kodów CSS,  $G(S)$  może być przedstawiony jako zbiór operatorów, z których każdy jest produktem tensorowym jednego typu operatorów Pauliego ( $\sigma_x$  bądź  $\sigma_z$ ) lub operatora identyczności. W pracy [A] oraz w przykładach znajdujących się w pracy [B] rozważane są topologiczne kody stabilizatorowe (tj. zdefiniowane na sieci), ze stabilizatorami określonymi lokalnie na układach kwantowych z sąsiednich węzłów. Pomiar stabilizatorów umożliwia ochronę kwantowych korelacji przed lokalnym szumem. Operatory logiczne w sposób nietrywialny definiowane są na pętłach niezwiązanych do punktu.

Modelowanie oddziaływania z lokalnym szumem wymaga dyskusji także w przypadku analizy ewolucji kwantowych korelacji w kropkach kwantowych ([C], [D]). Ze względu na to, że pasmo przewodnictwa arsenku galu konstruowane jest głównie z orbitali atomowych typu  $s$ , oddziaływania wynikające z rozwiązania równania Diraca dla elektronu, zawierające człony proporcjonalne do momentu pędu (jego sprzężenie ze spinami jąder, oddziaływanie spin-orbita elektronu) bądź obejmujące uśrednianie po (sferycznie symetrycznej) funkcji falowej elektronu w pobliżu jąder (nieizotropowe oddziaływanie nadsubtelne) są zanedbywalnie małe w stosunku do izotropowego oddziaływania nadsubtelnego [16]. Ze względu na symetrię rozkładu ładunku elektronu w okolicach jąder atomowych, kwadrupolowe oddziaływanie jąder w arsenku galu (o spinie  $3/2$ ) także jest pomijalne. Skale czasowe wewnętrznej ewolucji kąpieli spinowej zadane są jedynie przez oddziaływanie dipolowe  $H_{dip}$  pomiędzy spinami jąder

$\hat{I}$ , które, w przybliżeniu sekularnym ważnym dla pól magnetycznych  $B > 0.1$  mT, dane jest przez:

$$H_{dip} \approx \sum_{k \neq l} d_{kl} \hat{I}_k^z \hat{I}_l^z - 2 \sum_{k \neq l} d_{kl} \hat{I}_k^+ \hat{I}_l^-, \quad (2)$$

gdzie  $\hat{I}^\pm = \hat{I}^x \pm i\hat{I}^y$ . Ze względu na to, że oddziaływania dipolowe są słabe (przy skalowaniu  $d_{kl} \propto 1/r_{kl}^3$ , gdzie  $r_{kl}$  jest odległością pomiędzy jądrami numerowanymi przez  $k, l$ ), efekty wynikające z poszerzenia widma (pierwszy człon równania (2)) oraz dyfuzji spinów (człon drugi) stają się istotne w czasie, odpowiednio, rzędu 100  $\mu s$  oraz 1 s [17], co umożliwia pominięcie  $H_{dip}$  przy dalszych rozważaniach dotyczących ewolucji układu w reżimie nanosekund. W konsekwencji pominięcia jądrowych rozszczepień Zeemana  $\omega_k$ , około  $10^3$  razy mniejszych od rozszczepień elektronowych (dokonanym przy założeniu, że dla czasu ewolucji  $t$  zachodzi  $t \ll \min_{\omega_k, \omega_l} \frac{1}{|\omega_k - \omega_l|}$  dla wszystkich jąder  $k, l$  w kropce kwantowej), w pracach [C] i [D] rozważano jedynie efekt wpływu zewnętrznego pola magnetycznego na elektron oraz izomorficzne oddziaływanie nadsubtelne (w przybliżeniu efektywnego hamiltonianu dla elektronu w stanie podstawowym):

$$H = -g\mu_B B \hat{S}^z + \sum_k A_k \hat{S} \hat{I}_k, \quad (3)$$

gdzie  $g$  jest efektywnym czynnikiem żyromagnetycznym elektronu,  $\mu_B$  magnetonem Bohra,  $\hat{S}^z$  składową operatora spinu elektronu równoległą do kierunku pola magnetycznego  $B$ . Współczynniki oddziaływania nadsubtelnego  $A_k \propto A^k |\psi_0(\mathbf{r}_k)|^2$  zależą od wartości funkcji falowej elektronu dla pozycji jądra  $\mathbf{r}_k$ :  $\phi_0(\mathbf{r}_k) = \sqrt{v_0} u(\mathbf{r}_k) \psi_0(\mathbf{r}_k)$ , przy objętości komórki elementarnej kryształu  $v_0$  i  $u(\mathbf{r})$  będącej okresową funkcją Blocha związaną z wektorem falowym  $\mathbf{k} = 0$  [18]; stała materiałowa  $A^k$  zależy od pierwiastka chemicznego i izotopu jądra atomowego.

W pracy [C] kwantowe splątanie mierzymy za pomocą funkcji zbieżności [19, 20]. W przypadku stanu dwukubitowego  $\rho$  miara ta jest zdefiniowana przez

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (4)$$

gdzie  $\lambda_i$  są pierwiastkami (w porządku nierosnącym) z wartości własnych macierzy  $\rho(\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$ , gdzie  $*$  oznacza sprzężenie zespolone. W pracy [D] badamy możliwości wykorzystania w rozważanych układach ewolucji ogólnych korelacji kwantowych, za ich wskaźnik przyjmując geometryczną miarę

$D_S(\rho)$  [21] kwantowego dysonansu<sup>3</sup> [22]. Mimo braku symetrii względem zamiany układów, ten indyktor korelacji kwantowych znajduje zastosowanie jako miara wierności protokołów zdalnego przygotowania stanów kwantowych [23, 24]. W rozważanych układach kropek kwantowych jego ewolucja (i ewolucja związanych z nim obserwabli) pozwala zaproponować protokoły magnetodetekcji w reżimach pól niedostępnych dla metod zaprezentowanych w [C]. W celu minimalizacji zależności geometrycznego dysonansu od czystości stanów (wynikającej z nieściągłości normy Hilberta-Schmidta względem lokalnych całkowicie dodatnich operacji, które zachowują ślad [25, 26]), przyjmujemy przeskalowaną wartość geometrycznego dysonansu [27]

$$D(\rho) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{D_S(\rho)}{2\text{Tr}[\rho^2]}} \right]. \quad (5)$$

Wartości  $D_S(\rho)$  szacujemy obliczając jego ograniczenia: dolne [21]

$$D'_S(\rho) = \frac{1}{4} \max_{q=x,y} (\text{Tr}[K_q] - k_q), \quad (6)$$

i górne [28]

$$D''_S(\rho) = \frac{1}{4} \max_{q=x,y} (\text{Tr}[K_q] - k_q + \text{Tr}[K_p] - k_p), \quad (7)$$

dla  $p \neq q$ . W oparciu o reprezentację stanu dwukubitowego przy pomocy macierzy korelacji  $T$  o elementach  $T_{ij} = \text{Tr}[\rho(\sigma_i \otimes \sigma_j)]$  oraz wektorów  $\vec{x} = |x\rangle$ , gdzie  $x_i = \text{Tr}[\rho(\sigma_i \otimes \mathcal{I})]$  i  $\vec{y} = |y\rangle$ , gdzie  $y_i = \text{Tr}[\rho(\mathcal{I} \otimes \sigma_i)]$ , definiujemy  $k_q$  jako największą wartość własną macierzy  $K_q = |q\rangle\langle q| + T_q T_q^T$ , przy czym  $T_x = T$ ,  $T_y = T^T$ .  $l_q$  jest największą wartością własną macierzy  $L_q = |q\rangle\langle q| + T_q |\hat{k}_p\rangle\langle \hat{k}_p| T_q^T$ , natomiast  $|\hat{k}_q\rangle$  to znormalizowany wektor własny stowarzyszony z wartością własną  $k_q$  macierzy  $K_q$ .  $D'_S$  i  $D''_S$  są zbieżne m.in. dla stanów diagonalnych w bazie Bella.

## B. Omówienie wyników prac składających się na rozprawę

Poniżej prezentujemy streszczenie artykułów składających się na pracę doktorską. Można je podzielić na dwie grupy: prace [A-B] dotyczą zastosowania kwantowych kodów korekcji błędów w celu realizacji kwantowej komunikacji oraz kwantowych pamięci; zawierają one analityczne dowody na ograniczenia wierności kwantowych procesów w obecności lokalnego szumu, przy

<sup>3</sup>ang. *quantum discord*.

zastosowaniu wybranych architektur. Druga grupa publikacji, [C-D], poświęcona jest zagadnieniu oddziaływania ze spinowym otoczeniem realistycznych układów dwóch nieoddziałujących ze sobą, opartych na zlokalizowanych elektronach spinowych kropek kwantowych w arsenku galu. Prezentuje ona (częściowo realizowalne doświadczalnie) protokoły wykorzystujące w celu detekcji zewnętrznego pola magnetycznego jego wpływ na tempo i rodzaj dekoherencji. Rozpocniemy od prezentacji konstrukcji dowodów na możliwość kwantowej komunikacji w dwuwymiarowych sieciach kwantowych.

1. *Długodystansowa kwantowa komunikacja w dwóch i trzech wymiarach w obecności szumu*

Celem pracy [A] jest przedstawienie dowodu na kwantową komunikację w dwuwymiarowych sieciach kwantowych, a także zaprezentowanie prostego schematu komunikacji w sieciach trójwymiarowych. W obu przypadkach podstawą rozumowania jest izomorfizm pomiędzy przechowywaniem kwantowej informacji w sieciach kwantowych o wymiarze  $D$ , a jej przesyłem w sieciach  $D + 1$ -wymiarowych. Wprowadzony w pracy [29] izomorfizm bazuje na stwierdzeniu, że wszelkie procedury umożliwiające korekcję lokalnego szumu będącego skutkiem oddziaływania z otoczeniem w czasie, spełnią swoją funkcję także w sytuacji utożsamienia tych błędów z błędami powstałymi w wyniku teleportacji struktury kodu w przestrzeni, dokonanej przy użyciu par niemaksymalnie splątanych, współdzielonych przez wybrane pary węzłów sieci. Dlatego też możliwości komunikacji w dwóch i trzech wymiarach dowodzimy obliczając wierność kwantowych pamięci w odpowiednio jednym i dwóch wymiarach, biorąc pod uwagę nie tylko oddziaływanie z szumem podczas przechowywania, ale także ograniczone wierności procedury zakodowania i odekodowania stanu kwantowego.

W przypadku jednowymiarowym ([A], Twierdzenie 1) pokazano, że wierność  $F_0$  zakodowania nieznanego stanu kubitu w kod zagnieżdżony jest ograniczona od dołu przez funkcję

$$F_0 \geq e^{-2v\sqrt{p}}, \quad (8)$$

gdzie  $v$  to ilość bramek użytych do kodowania w pierwszy poziom zagnieżdżenia,  $p \leq p_{th}/3$  to prawdopodobieństwo lokalnego szumu (działającego na

stan po wykonaniu każdej z bramek, włączając w to bramki identycznościowe), które jest mniejsze od prawdopodobieństwa progowego  $p_{th}$ , właściwego danej architekturze. Dowód opiera się na obliczeniu prawdopodobieństwa sukcesu zakodowania w  $r$ . poziom zagnieżdżenia kodu poprzez wykorzystanie szacowania prawdopodobieństwa błędu  $p_k$  na  $k$ . poziomie zagnieżdżenia ( $p_k \leq \frac{1}{c}(cp_0)^{2^k}$ , przy czym  $c = \binom{v}{2}$ ), a następnie uniezależnieniu wyniku od parametru  $r$  w rezultacie przeszacowań algebraicznych. Wykorzystanie analizy zawartej w pracy [30] pozwala na obliczenie dolnego ograniczenia wierności przechowywania stanu kwantowego. Przy założeniu, że wierność odkodowania nie jest mniejsza od wierności zakodowania (spełnionym np. w przypadku całkowicie unitarnego protokołu kwantowych obliczeń w obecności szumu [13]), otrzymujemy, na mocy wspomnianego izomorfizmu pomiędzy kwantową pamięcią a komunikacją, dolne ograniczenie wierności  $F$  kwantowej komunikacji w dwóch wymiarach:

$$F > e^{-2v\sqrt{p}}[1 - 2c_1Te^{-c_2V}], \quad (9)$$

gdzie  $V = N^k$  to liczba kubitów,  $T$  to liczba kroków przestrzennych, na jakie odbywa się komunikacja za pomocą wykorzystania zasobów lokalnego splątania pomiędzy węzłami sieci tak, że lokalny błąd nie przekracza  $p_{th}/3$ . Stałe  $c_1$  oraz  $c_2$  zależą od rodzaju kodu zagnieżdżonego. Ograniczenie (9) implikuje możliwość perkolacji splątania [29] w dwuwymiarowej sieci kwantowej, w której stany splątane dzielone są przez najbliższe węzły.

Rozpatrywanie zagadnień związanych z komunikacją w trójwymiarowych sieciach kwantowych rozpoczynamy od przypadku, w którym zakładamy możliwość idealnego przygotowania kubitów w stanach własnych macierzy Pauliego  $\sigma_z$  i  $\sigma_x$  (tj.  $\sigma_z|0\rangle = |0\rangle$ ,  $\sigma_z|1\rangle = -|1\rangle$ ,  $\sigma_x|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$ ), idealny pomiar stabilizatorów i pojedynczych kubitów w bazie  $\sigma_z$  i  $\sigma_x$ , oraz możliwość dokonywania rotacji  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$  na sferze Blocha kubitów kodu<sup>4</sup> ([A], część III). Przedstawiamy procedurę zakodowania nieznanego stanu kubitów w topologiczny kod Kiteva na płaszczyźnie, jak i procedurę jego odkodowania. Przygotowanie stanu kubitów zilustrowane jest na Rys. 2(a) ([A]), następujące po nim pomiary stabilizatorów i odpowiednie operacje odprowadzenia błędów służą sprowadzeniu kodu w podprzestrzeń logiczną. Procedura odkodowania ([A],

<sup>4</sup>Procedura dla przypadku bezszumowego, ang. *non-fault tolerant*.



Rys. 2(b)) opiera się na rotacjach dokonywanych na kubicie, na którym odkodujemy nieznaną stan, warunkowanych jednokubitowymi pomiarami w bazie Pauliego przeprowadzanymi na grupie innych kubitów. Pomiary te niszczą korelacje kodu. Dowody na poprawność powyższych procedur ([A], Twierdzenie 2, Twierdzenie 3) opierają się na obserwacji [31], że wierność procesu kwantowego zależy jedynie od wyników pomiarów dokonanych na dwóch komplementarnych zbiorach stanów wejściowych. Część IIIB pracy [A] zawiera opis procedury zakodowania w kategoriach teleportacji nieznanego stanu z jednego węzła sieci w dwuwymiarowy kod, przeprowadzanej za pomocą maksymalnie splątanych wirtualnych kubitów utworzonych w kodzie na skutek pomiarów stabilizatorów.

Kolejnym rozpatrywanym przypadkiem jest model, w którym przygotowanie stanów oraz pomiar stabilizatorów i rotacje na kubitach podlegają działaniu probabilistycznego szumu<sup>5</sup> ([A], część IV). W celu wykrycia i naprawy tych błędów, rozszerzamy procedury zakodowania i odkodowania o pomiary stabilizatorów dokonywane w czasie oraz odpowiedni algorytm korekcji błędów. Obliczone zostało dolne ograniczenie na wierność procesu zakodowania, przechowywania i odkodowania nieznanego stanu kubitów w kodzie Kitaeva na płaszczyźnie. W ramach modelu lokalnego szumu nie rozważano zjawiska propagacji do kodu błędów powstałych podczas pomiaru syndromów. Zjawisko to może być wzięte pod uwagę w duchu pracy [32], gdzie zastosowanie odpowiednich technik poskutkowało zmodyfikowaniem progowej wartości prawdopodobieństwa błędu, nie zagroziło jednak jej dodatniości.

Algorytm korekcji błędów fazowych (błędy bitowe poprawiane są niezależnie i analogicznie, ze względu na przynależność kodu Kitaeva do rodziny CSS) opiera się na przeprowadzaniu łańcuchów rotacji  $\sigma_z$  na dwuwymiarowych projekcjach ścieżek łączących w sieci trójwymiarowej stabilizatory  $X_s$  o nietrywialnych wartościach pomiarów ([A], Rys. 4). Ścieżki te ustalane są poprzez minimalizowanie ich całkowitej długości w metryce taksówkowej, zmodyfikowanej o wagę  $-\ln \frac{p_i}{1-p_i}$  na połączeniach sieci reprezentujących kubity bądź pomiary stabilizatorów obciążone błędem z prawdopodobieństwem  $p_i$ . Ta modyfikacja metryki pozwala na uwzględnienie efektów procedur zakodowania i odkodowania, które obejmują, odpowiednio, przygotowanie stanów kubitów

---

<sup>5</sup>Procedura dla przypadku z szumem, ang. *fault tolerant*.

i ich pomiar w określonych bazach. Skutkuje to dużym prawdopodobieństwem otrzymania nietrywialnego wyniku pomiaru stabilizatorów dualnych do wybranej bazy (jak np. w przypadku pomiaru stabilizatora  $X_S$  zdefiniowanego na kubitach przygotowanych w bazie  $\sigma_Z$  basis). W rezultacie, z punktu widzenia procedur korekcji błędów określonego typu, efektywne brzegi kodu na płaszczyznach przygotowania i pomiaru ulegają przesunięciu do przekątnej płaszczyzn ([A], Rys. 4), co skutkuje niemożliwym do uniknięcia wpływem błędu opisującego zakodowanie i odkodowanie na wierność całego procesu.

Intuicja ta została potwierdzona przez analityczne oszacowanie wierności przedstawionej procedury ([A], Twierdzenie 6). Opiera się ono na szacowaniu prawdopodobieństwa wystąpienia nietrywialnych pętli błędów prowadzących do realizacji niekontrolowanej operacji logicznej na nieznanym stanie kodu. Niezależne rozważania dla błędów bitowych i fazowych ([A], równania (17) i (18)), przy wykorzystaniu Lematu 4, prowadzą, przy założeniu czasu przechowywania stanu rosnącego co najwyżej wielomianowo z rozmiarem kodu  $N$ , do następującego oszacowania wierności procesu

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{F} \geq 1 - 6p - \frac{2\alpha^2(5 - 3\alpha)}{(1 - \alpha)^3} \quad (10)$$

dla  $p \lesssim 0.007$ , przy czym  $\alpha = 12\sqrt{p(1-p)}$ .

Ze względu na izomorfizm pomiędzy czasowym i przestrzennym wymiarem procedury, wyrażenie to dotyczy jednocześnie wierności protokołu kwantowej komunikacji w trzech wymiarach, wymagającego jedynie *lokalnej, krótkotrwałej* pamięci i *lokalnych* zasobów splątania ([A], Rys. 8). Wniosek 2 pokazuje, że przestrzenne wymiary kodu skalują się co najwyżej logarytmicznie z odległością, na jakiej zachodzi komunikacja. Opisana przez nas procedura jest zatem protokołem perkolacji splątania, wykorzystującym komutujące pomiary stabilizatorów na płaszczyznach kodu, tranwersalną teleportację struktur kodu pomiędzy płaszczyznami, a także lokalne przygotowanie i pomiary stanów w celu zakodowania i odkodowania nieznanego stanu kwantowego.

## 2. Procedura zakodowania nieznanego stanu kwantowego w kody typu CSS

Celem pracy [B] było uogólnienie na wszystkie kody CSS wprowadzonej w pracy [A] procedury zakodowania w kod Kitaeva na płaszczyźnie niezna-

nego stanu kwantowego. Przez zakodowanie stanu  $|\Psi\rangle_i = \alpha_i|0\rangle_i + \beta_i|1\rangle_i$  fizycznego kubitów zdefiniowanego na przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}_i$  rozumiemy proces kwantowy, w wyniku którego kubit logiczny, zdefiniowany na j. podukładzie przestrzeni logicznej kodu  $\mathcal{H}_{log} = \otimes_j \mathcal{H}_{L_j}$ , znajduje się w stanie  $|\Psi\rangle_{L_j} = \alpha_i|0\rangle_{L_j} + \beta_i|1\rangle_{L_j}$ . Proponowana procedura zakodowania opiera się na wykorzystaniu faktu, że dla wszystkich kodów CSS operatory logiczne są nietrywialnym iloczynem tensorowym jedynie jednego typu macierzy Pauliego ( $\sigma_z$  bądź  $\sigma_x$ ). Chociaż procedura nieuwzględniająca wpływu szumu na przygotowanie stanów i pomiar stabilizatorów dotyczy dowolnej struktury kodów CSS, skupiono się na kodach topologicznych ze względu na intuicyjne dla takich architektur jej uogólnienie na przypadek lokalnego szumu.

W bezszumowym przypadku zakodowania nieznanego stanu w topologiczne kody CSS, procedura zakłada przygotowanie stanów  $|0\rangle, |+\rangle$  na tych kubitach, na których zdefiniowane zostały nietrywialnie logiczne operatory, odpowiednio,  $Z_L$  i  $X_L$ . Każdy z operatorów logicznych działa tu nietrywialnie na kubity ułożone na krzywych łączących brzegi kodu. Krzywe te przecinają się na nieparzystej liczbie kubitów. Jedynie kubit w stanie przeznaczonym do zakodowania umieszczany jest na jednym z przecięć, a pary kubitów z pozostałych przecięć (jeśli takie występują) przygotowane są w stanach maksymalnie splątanych. Pozostałe kubity (te, na które nie działają operatory logiczne) mogą zostać przygotowane dowolnie. Pomiar stabilizatorów i korekcje błędów pozwalają na sprowadzenie stanu kodu do podprzestrzeni logicznej. Dowód na poprawność procedury opiera się na fakcie, że parzystość na krzywych operatorów logicznych, początkowo zależna jedynie od stanu kubitów przeznaczonych do zakodowania, zachowywana jest przez procedurę kodowania. Jest to zapewnione na skutek działania na kod operatorem logicznym dualnym w stosunku do operatora logicznego, który nieparzystą ilość razy został przecięty przez niekomutujące z nim ścieżki korekcji. W części III pokazujemy jednakże, że w przypadkach kodu Kitaeva na torusie [33], kodu Kitaeva z defektami [34, 35], kodu Bravyi’go na podukładach [36] oraz kodu Haaha [37] istnieje możliwość przeprowadzenia korekcji w ten sposób, że nie skutkuje to przecięciem krzywych operatorów logicznych – przeprowadzanie dodatkowych operacji logicznych nie jest więc konieczne.

Dla wielu kodów CSS rozszerzenie powyższego rozumowania na przypa-

dek z szumem opiera się na przygotowaniu kubitów otaczających linie logicznych operatorów  $Z_L$  i  $X_L$  odpowiednio w stanach  $|0\rangle$  i  $|+\rangle$ , a także na przeprowadzaniu korekt w oparciu o historię pomiarów stabilizatorów, podobnie jak w pracy [A]. Praca [B] zawiera także opis dekodowania nieznanego stanu z kodów CSS. W części IV obliczono górne ograniczenie prawdopodobieństwa błędu fazowego kwantowej pamięci opartej na proponowanych algorytmach zastosowanych w kodzie Bravyi’go na podukładach. Na tym przykładzie pokazano, że w granicy nieskończonego rozmiaru kodu wierność kwantowej pamięci jest rzędu  $1 - \mathcal{O}(p)$ , gdzie  $p$  jest prawdopodobieństwem błędu lokalnego szumu (1) na kubitach podczas jednego kroku czasowego, jak i prawdopodobieństwem klasycznego błędu pomiaru stabilizatorów.

Warto zaznaczyć, że wypracowane procedury mogą służyć do realizacji uniwersalnych obliczeń kwantowych na kodach CSS, poprzez umożliwienie zakodowania stanów magicznych [8].

### 3. Zanik splątania w układach spinowych kropek kwantowych w obecności pola magnetycznego

W pracy [C] rozważamy wpływ zewnętrznego pola magnetycznego na charakter i tempo zaniku splątania w układach dwóch wzajemnie nieoddziałujących elektronowych kropek kwantowych w arsenku galu. Dla krótkich czasów ewolucji, w których następuje ewolucja splątania, oddziaływanie dipolowe pomiędzy jądrami otoczenia, jak i ich oddziaływanie z polem, są zanedbywalne. Mechanizmem dekorencji jest oddziaływanie nadsubtelne spinu elektronu ze spinami jądrowymi maksymalnie mieszanego stanu otoczenia, a hamiltonian układu przybiera formę  $H = H_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_2$ , przy czym każda z kropek opisywana jest przez hamiltonian (3)

$$H_i = \Omega \hat{S}_i^z + \hat{D}_i + \hat{V}_i, \quad (11)$$

gdzie  $\Omega = -g\mu_B B$  to rozszczepienie Zeemana. Operatory  $\hat{D}_i$  oraz  $\hat{V}_i$  opisują oddziaływanie nadsubtelne pomiędzy spinem ( $\hat{S}_i$ ) elektronu oznaczonego indeksem  $i$  oraz spinami ( $\hat{I}_{k,i}$ ) jąder atomowych oznaczanych indeksem  $k$ , ze stałymi oddziaływania  $A_{k,i}$ . Człon  $\hat{D}_i = \sum_k A_{k,i} \hat{S}_i^z \hat{I}_{k,i}^z$  prowadzi do utraty fazy, podczas gdy  $\hat{V}_i = \frac{1}{2} \sum_k A_{k,i} (\hat{S}_i^+ \hat{I}_{k,i}^- + \hat{S}_i^- \hat{I}_{k,i}^+)$  skutkuje utratą fazy oraz zmianą poziomu obsadzeń w kropkach, przy standardowej definicji operatorów  $\hat{S}_i^\pm = \hat{S}_i^x \pm \hat{S}_i^y$

oraz  $\hat{I}_i^\pm = \hat{I}_i^x \pm \hat{I}_i^y$ .

Jako że stałe  $A_{k,i}$  zależą od położenia jąder względem funkcji falowej elektronu, a ich liczba w realistycznej kropce kwantowej w arsenku galu jest rzędu  $N \approx 10^6$ , bezpośrednie analityczne i numeryczne rozwiązanie ewolucji nie jest możliwe. Nie znajduje tu uzasadnienia przybliżenie Markova (ze względu na słabość oddziaływań dipolowych oraz oddziaływania nadsubtelnego, skutkującego powolną dynamiką kąpieli spinowej), jak i przybliżenie słabego oddziaływania (w interesującym reżimie pól  $\Omega \ll A = \sum_k A_{k,i}$ ). Jednakże ze względu na intuicję wynikającą z zasady nieoznaczoności energia-czas [17] wnioskujemy, że w reżimie  $t \ll \frac{N}{A} \approx 10 \mu\text{s}$  dokładny rozkład stałych oddziaływania  $A_{k,i}$  w arsenku galu powinien być nieistotny. Bierzemy zatem  $A_{k,i} = A/N$  dla obu kropek, co jest powszechnie stosowanym modelem [38, 39]. Na skutek tej modyfikacji uzyskujemy, w bazie całkowitego momentu pędu jąder atomowych, blokową postać hamiltonianu pojedynczej kropki. Umożliwia to jego diagonalizację. W dodatku ([C]) pokazano, że efekty odradzania się koherencji wynikające z oddziaływaniem z małą ilością jąder są szybko tłumione wraz ze wzrostem liczby jąder  $N$ , w konsekwencji czego ewolucja pojedynczych kropek kwantowych może być efektywnie symulowana przez oddziaływanie z 50 jądrami atomowymi. W reżimie dużych pól ( $\Omega \gg A$ ), człon  $V_i$  może zostać pominięty (w konsekwencji zasady zachowania energii dla zmian poziomów obsadzeń w kropkach), i dekoherencja ogranicza się do dekoherencji fazowej, podczas której koherencje zanikają proporcjonalnie do  $e^{-t^2/T_2^{*2}}$ , z czasem charakterystycznym  $T_2^* \propto \sqrt{N}/A$ . Dla mniejszych wartości pól magnetycznych, oscylacje koherencji pozostają skorelowane z oscylacjami obsadzeń. Dla bardzo małych pól ( $\Omega \lesssim A/\sqrt{N}$ ) obsadzenia ulegają częściowemu wyrównaniu.

Badając dekoherencję stanów Bella dwóch nieoddziałujących ze sobą kropek kwantowych, za miarę splątania przyjęto funkcję zbieżności  $C$  (4). Ze względu na wpływ pola magnetycznego na ewolucję poziomów obsadzeń, poprzez zmianę tego zewnętrznego parametru ewolucji przechodzić można od gaussowskiego zaniku do reżimu, w którym występuje nagła śmierć splątania ([C], Rys. 1). Czas nagłej śmierci,  $t_{SD}$ , charakteryzuje się niemonotonicznym wzrostem w miarę zwiększania pola magnetycznego  $B$  ([C], Rys. 2), w granicy dużych pól wykazując zależność logarytmiczną. Analizujemy możliwość wykorzystania zależności czasu nagłej śmierci splątania  $t_{SD}(B)$  dla ma-

łych pól magnetycznych  $B$  w detekcji pola magnetycznego. Ze względu na eksperymentalną możliwość przeprowadzenia pomiarów wierności stanu singletowego  $F$  w układach dwóch kropek kwantowych metodą blokady Pauliego [40], wprowadzamy świadka splątania  $W(t) = \frac{1}{2} - F(t)$ , który spełnia relacje  $t < t_{SD} \implies W(t) < 0$  oraz  $t = t_{SD} \implies W(t) = 0$ , co wynika z bistochastyczności kanałów kwantowych w obu kropkach. Postulujemy użycie pomiarów  $W(t)$  w zakresie skokowej zależności  $t_{SD}(B)$  jako progowego czujnika pola magnetycznego.

#### 4. Ewolucja kwantowych korelacji i protokoły pomiaru pola magnetycznego w układach spinowych kropek kwantowych

Praca [D] jest kontynuacją badań nad możliwością wykorzystania kwantowego szumu do detekcji pola magnetycznego w rozważanych w pracy [C] układach kropek kwantowych. Postawiwszy pytanie, czy zasób splątania jest konieczny w pomiarach pola magnetycznego (w sensie pracy [C]), badamy zanik kwantowych korelacji opisywanych przez przeskalowany geometryczny dysonans  $D$  (5). W porównaniu z zanikiem splątania stanów Bella, zanik dysonansu charakteryzuje się brakiem oscylacji oraz odrodzeniem dla długich czasów ewolucji przy małych wartościach pola magnetycznego ([D], Rys. 1). Magnetometryczne zastosowanie tego odrodzenia w zakresie  $0 - 5 \text{ mT}$  ułatwia fakt, że pomiar dysonansu jest tożsamy z pomiarem koherencji w układzie. Zmiana znaku funkcji  $1 - g(t)$  w chwili czasu  $t_0$ ,  $g(t) = \frac{\text{Tr}(\sigma_z \otimes \sigma_z \rho(t))}{\text{Tr}(\sigma_x \otimes \sigma_x \rho(t))}$ , jest warunkiem koniecznym i wystarczającym nieróżniczkowalności dysonansu w chwili czasu  $t_0$ . Dla zerowego pola magnetycznego przejścia ze stanu singletowego do stanów trypletowych są jednakowo prawdopodobne, co implikuje  $g(t) = 1$  dla dowolnej chwili czasu  $t$ . Dla niezerowych pól magnetycznych, ze względu na konieczność dystrybucji w środowisku energii wynikającej ze zmiany spinu elektronu, dekoherencja do wszystkich stanów trypletowych o niezerowym rzucie momentu pędu jest tłumiona, co implikuje  $g(t) \leq 1$  dla dowolnej chwili czasu  $t$ . W ten sposób zasada zachowania energii wyklucza nieróżniczkowalność ewolucji dysonansu stanu singletowego.

Stany Wernera zdefiniowane są przez

$$\rho = (1 - p)\mathcal{I} + pS_0, p \leq 1, \quad (12)$$

gdzie  $\mathcal{I}$  jest operatorem identycznościowym działającym na przestrzeni Hilberta układu dwóch kubitów, a  $S_0 = \frac{1}{2} \left( |01\rangle - |10\rangle \right) \left( \langle 01| - \langle 10| \right)$  projektorem na stan singletowy. Wszystkie stany Wernera (także separowalne, tzn. takie, które nie są splątane, parametryzowane przez  $0 \leq p \leq 1/3$ ) wykazują jakościowo podobną zależność ewolucji kwantowego dysonansu od pola magnetycznego. Rys. 3(a) ([D]) obrazuje wpływ pola magnetycznego na obecność korelacji kwantowych w ewolucji stanu separowalnego. Obecność ta jest mierzona przez

$$M(B) = \frac{1}{D(\rho(0))} \int_0^\tau D(\rho(t)) dt, \quad (13)$$

przy  $\tau = 20 \text{ ns}$ . Splątanie nie jest zatem zasobem koniecznym przy wykorzystaniu badanego układu do celów magnetometrycznych.

Metoda pomiaru znajdująca zastosowanie w reżimie małych pól opiera się na mierzalnej (choć nie bezpośrednio) funkcji  $g(t)$ .  $g(t)$  charakteryzuje się bardzo silną zależnością ewolucji od pola magnetycznego  $B$  w zakresie pól  $0 - 2 \text{ mT}$  ([D], Rys. 2). I tym przypadku splątanie stanów początkowych nie jest konieczne, jako że wszystkie stany Wernera wykazują identyczną ewolucję  $|g(t)|$ , co wynika z komutowania bądź antykomutowania operatorów Krausa kanału ewolucji układu jednej kropki z operatorami obrotów na kubicie. Z tej samej przyczyny niedoskonałe przygotowanie stanu początkowego  $\rho = (1-p)S_0 + pT_0$ , gdzie  $T_0 = \frac{1}{2} \left( |01\rangle + |10\rangle \right) \left( \langle 01| + \langle 10| \right)$  jest projektorem na stan trypletowy (rozdzielny w stosunku do stanu singletowego w badanych układach metodą blokady Pauliego), skutkuje przeskalowaniem  $g(t) \rightarrow \frac{1}{1-2p}g(t)$ . Dla małych  $p$  nie wpływa ono znacząco na wrażliwość badanego parametru na pole magnetyczne.

Stwierdzono ponadto, że w ewolucji dysonansu możliwe są punkty nieróżniczkowości, o ile stan początkowy zostanie dobrany odpowiednio ([D], Rys. 3). Pokazano także, że – w przeciwieństwie do splątania – ewolucja dysonansu niediagonalnych stanów Bella zależy silnie od nielokalnych czynników fazowych ([D], Rys. 4).

### C. Perspektywy

Zakończyliśmy streszczenie wyników naszego dwustego podejścia do wykorzystania kwantowych korelacji w obecności zewnętrznego szumu. Na końcu przeglądu wyników pracy doktorskiej pragniemy zaznaczyć możliwe kierunki

dalszych badań opisywanych układów.

Pierwszym z nich jest aplikacja uzyskanych rezultatów do protokołów uniwersalnych obliczeń kwantowych, np. zbadanie wierności zakodowania stanów magicznych w struktury kodów rozważanych w pracach [A] i [B], z uwzględnieniem odpowiednich procedur destylacji oraz metod zapobiegania wpływowi błędów pomiarowych na stan kodu. Drugim z celów jest rozszerzenie protokołu zakodowania nieznanego stanu w obecności szumu pomiarowego w topologiczne kody CSS zdefiniowane na sieciach o wyższym wymiarze (także pod kątem ich postulowanych zastosowań jako samonaprawiającej się pamięci kwantowej). Jako wskazówka co do celowości praktycznej implementacji wypracowanych procedur posłużyć mogłyby wyprowadzenie ściślejszych ograniczeń na ich wierności.

Badania zależności dekoherencji od pola magnetycznego w układach kropek kwantowych, przedstawione w pracach [C] i [D], mogą zostać uzupełnione przez analizę wpływu, jaki mają na zanik kwantowych korelacji oddziaływanie wymienne pomiędzy elektronami oraz uwspólnienie środowisk (efekty pojawiające się przy małych odległościach pomiędzy kropkami). Własności magnetyczne rozważanych układów mogą być także badane poprzez analizę skalowania ograniczeń na informację Fishera  $m$  niezależnych kanałów [41] kropek kwantowych, optymalizację czasu trwania pojedynczego pomiaru z  $m$  [42], a także poprzez znalezienie optymalnej obserwacji, której pomiar prowadziłby do wysycenia otrzymanego ograniczenia.



- 
- [1] H.-J. Briegel, W. Dür, J. I. Cirac, P. Zoller, *Quantum repeaters: The role of imperfect local operations in quantum communication*, *Physical Review Letters* **81**, 5932 (1998).
- [2] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki, *Quantum entanglement*, *Reviews of Modern Physics* **81**, 865 (2009).
- [3] S. Perseguers, *Fidelity threshold for long-range entanglement in quantum networks*, *Physical Review A* **81**, 012310 (2010).
- [4] A. Y. Kitaev, *Fault-tolerant quantum computation by anyons*, *Annals of Physics* **303**, 2 (2003).
- [5] P. W. Shor, *Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory*, *Physical Review A* **52**, R2493 (1995).
- [6] A. M. Steane, *Error correcting codes in quantum theory*, *Physical Review Letters* **77**, 793 (1996).
- [7] A. R. Calderbank, P. W. Shor, *Good quantum error-correcting codes exist*, *Phys. Rev. A* **54**, 1098 (1996).
- [8] S. Bravyi, A. Kitaev, *Universal quantum computation with ideal Clifford gates and noisy ancillas*, *Phys. Rev. A* **71**, 022316 (2005).
- [9] A. W. Chin, S. F. Huelga, M. B. Plenio, *Coherence and decoherence in biological systems: principles of noise-assisted transport and the origin of long-lived coherences*, *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A* **370**, 3638 (2012).
- [10] J. Lim, D. Paleček, F. Caycedo-Soler, C. N. Lincoln, J. Prior, H. von Berlepsch, S. F. Huelga, M. B. Plenio, D. Zigmantas, J. Hauer, *Verification of the vibronic origin of long-lived coherence in an artificial molecular light harvester*, <http://arxiv.org/abs/1502.01717>.
- [11] A. Marais, I. Sinayskiy, A. Kay, F. Petruccione, A. Ekert, *Decoherence-assisted transport in quantum networks*, *New Journal of Physics* **15**, 013038 (2013).
- [12] M. Tiersch, G. G. Guerreschi, J. Clausen, H. J. Briegel, *Approaches to Measuring Entanglement in Chemical Magnetometers*, *Journal of Physical Chemistry A* **118**, 13 (2014).
- [13] D. Aharonov, M. Ben-Or, *Fault tolerant quantum computation with constant error*, *SIAM Journal on Computing* **28**, 1207 (1998).
- [14] R. Alicki, *Comments on "Fault-Tolerant Quantum Computation for Local Non-Markovian Noise"*, <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0402139>.
- [15] D. Gottesman, *Stabilizer codes and quantum error correction*. Ph.D. thesis, California Institute of Technology (1997).
- [16] W. A. Coish, J. Baugh, *Nuclear spins in nanostructures*, *Physica Status Solidi B Basic Research* **246**, 2203 (2009).
- [17] I. Bragar, Ł. Cywiński, *Dynamics of entanglement of two electron spins interacting*

- with nuclear spin baths in quantum dots*, Phys. Rev. A **91**, 155310 (2015).
- [18] R. Winkler, *Spin-orbit coupling effects in two dwo-dimensional electron and hole systems* (Springer-Verlag, Berlin, 2003).
- [19] S. Hill, W. K. Wootters, *Entanglement of a pair of quantum bits*, Physical Review Letters **78**, 5022 (1997).
- [20] W. K. Wootters, *Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits*, Physical Review Letters **80**, 2245–2248 (1998).
- [21] B. Dakić, V. Vedral, C. Brukner, *Necessary and sufficient condition for nonzero quantum discord*, Physical Review Letters **105**, 190502 (2010).
- [22] H. Ollivier, W. H. Żurek, *Quantum discord: A measure of the quantumness of correlations*, Physical Review Letters **88**, 017901 (2001).
- [23] B. Dakić, Y. O. Lipp, X. Ma, M. Ringbauer, S. Kropatschek, S. Barz, T. Paterek, V. Vedral, A. Zeilinger, C. Brukner, P. Walther, *Quantum discord as resource for remote state preparation*, Nature Physics **8**, 666 (2012).
- [24] P. Horodecki, J. Tuziemski, P. Mazurek, R. Horodecki, *Can Communication Power of Separable Correlations Exceed That of Entanglement Resource?*, Physical Review Letters **112**, 140507 (2014).
- [25] M. Piani, *Problem with geometric discord*, Physical Review A **86**, 034101 (2012).
- [26] M. Ozawa, *Entanglement measures and the hilbert–schmidt distance*, Physics Letters A **268**, 158 (2000).
- [27] T. Tufarelli, T. MacLean, D. Girolami, R. Vasile, G. Adesso, *The geometric approach to quantum correlations: computability versus reliability*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **46**, 275308 (2013).
- [28] A. Miranowicz, P. Horodecki, R. W. Chhajlany, J. Tuziemski, J. Sperling, *Analytical progress on symmetric geometric discord: Measurement-based upper bounds*, Physical Review A **86**, 042123 (2012).
- [29] S. Perseguers, L. Jiang, N. Schuch, F. Verstraete, M. D. Lukin, I. Cirac, K. G. H. Vollbrecht, *One-shot entanglement generation over long distances in noisy quantum networks*, Physical Review A **78**, 062324 (2008).
- [30] P. Aliferis, *Level reduction and quantum threshold theorem*, Ph.D. thesis, California Institute of Technology (2007).
- [31] H. Hofmann, *Complementary classical fidelities as an efficient criterion for the evaluation of experimentally realized quantum operations*, Physical Review Letters **94**, 160504 (2005).
- [32] A. G. Fowler, D. S. Wang, Ch. D. Hill, T. D. Ladd, R. Van Meter, L. C. L. Hollenberg, *Surface Code Quantum Communication*, Physical Review Letters **104**, 180503 (2010).
- [33] E. Dennis, A. Kitaev, A. Landahl, J. Preskill, *Topological quantum memory*, Journal of Mathematical Physics **43**, 4452 (2002).

- [34] R. Raussendorf, J. Harrington, K. Goyal, *Topological fault-tolerance in cluster state quantum computation*, *New Journal of Physics* **9**, 199 (2007).
- [35] H. Bombin, M. A. Martin-Delgado, *Quantum measurements and gates by code deformation*, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **42**, 095302 (2009).
- [36] S. Bravyi, G. Duclos-Cianci, D. Poulin, M. Suchara, *Subsystem surface codes with three-qubit check operators*, *Quantum Information and Computation* **13**, 0963 (2013).
- [37] J. Haah, *Local stabilizer codes in three dimensions without string logical operators*, *Physical Review A* **83**, 042330 (2011).
- [38] I. A. Merkulov, A. L. Efros, M. Rosen, *Electron spin relaxation by nuclei in semiconductor quantum dots*, *Phys. Rev. B* **65**, 205309 (2002).
- [39] E. Barnes, Ł. Cywiński, S. Das Sarma, *Master equation approach to the central spin decoherence problem: Uniform coupling model and role of projection operators*, *Physical Review B* **84**, 155315 (2011).
- [40] J. R. Petta, A. C. Johnson, J. M. Taylor, E. A. Laird, A. Yacoby, M. D. Lukin, C. M. Marcus, M. P. Hanson, A. C. Gossard, *Coherent manipulation of coupled electron spins in semiconductor quantum dots*, *Science* **309**, 2180 (2005).
- [41] J. Kołodyński, R. Demkowicz-Dobrzański, *Efficient tools for quantum metrology with uncorrelated noise*, *New Journal of Physics* **15**, 073043 (2013).
- [42] R. Chaves, J. B. Brask, M. Markiewicz, J. Kołodyński, A. Acín, *Noisy Metrology beyond the Standard Quantum Limit*, *Physical Review Letters* **111**, 120401 (2013).