

Tomasz Paterek

Autoreferat

Załącznik do wniosku o przeprowadzenie postępowania
habilitacyjnego na podstawie jednotematycznego cyklu
publikacji pt.:

*Nieklasyczne korelacje w układach kwantowych:
miary, zjawiska i zastosowania.*

2015

I. IMIĘ I NAZWISKO

Tomasz Paterek

II. POSIADANE DYPLOMY, STOPNIE NAUKOWE/ARTYSTYCZNE – Z PODANIEM NAZWY, MIEJSCA I ROKU ICH UZYSKANIA ORAZ TYTUŁU ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

Stopień doktora nauk fizycznych nadany przez Radę Wydziału Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego w dniu 24.05.2007 roku.

Tytuł rozprawy doktorskiej: "Kwantowa komunikacja".

III. INFORMACJE O DOTYCHCZASOWYM ZATRUDNIENIU W JEDNOSTKACH NAUKOWYCH/ARTYSTYCZNYCH

- 01.04.2007-31.08.2008, Junior Scientist, Instytut Optyki Kwantowej i Kwantowej Informatyki, Austriacka Akademia Nauk, Austria
- 03.11.2008 - 01.05.2012, Research Fellow, Centrum Kwantowych Technologii, Narodowy Uniwersytet Singapuru, Singapur
- 17.07.2012 - 16.07.2015, Research Assistant Professor, Centrum Kwantowych Technologii, Narodowy Uniwersytet Singapuru, Singapur
- od 17.07.2012: Assistant Professor, Instytut Fizyki i Fizyki Stosowanej, Wydział Nauk Fizycznych i Matematycznych, Uniwersytet Techniczny Nanyang, Singapur

IV. WSKAZANIE OSIĄGNIĘCIA WYNIKAJĄCEGO Z ART. 16 UST. 2 USTAWY Z DNIA 14 MARCA 2003 R. O STOPNIACH NAUKOWYCH I TYTULE NAUKOWYM ORAZ O STOPNIACH I TYTULE W ZAKRESIE SZTUKI (DZ. U. NR 65, POZ. 595 ZE ZM.)

A. tytuł osiągnięcia naukowego/artystycznego

Jednotematyczny cykl publikacji pt. *Nieklasyczne korelacje w układach kwantowych: miary, zjawiska i zastosowania*.

B. autor/autorzy, tytuł/tytuły publikacji, rok wydania, nazwa wydawnictwa

[A] P. Badziąg, Č. Brukner, W. Laskowski, T. Paterek, M. Żukowski, *Experimentally friendly geometrical criteria for entanglement*, Phys. Rev. Lett. **100**, 140403 (2008).

[B] K. Modi, T. Paterek, W. Son, V. Vedral, M. Williamson, *Unified view of quantum and classical correlations*, Phys. Rev. Lett. **104**, 080501 (2010).

- [C] W. Laskowski, T. Paterek, Č. Brukner, M. Żukowski, *Entanglement and communication-reducing properties of noisy N -qubit states*, Phys. Rev. A **81**, 042101 (2010).
- [D] P. Kurzyński, T. Paterek, R. Ramanathan, W. Laskowski, D. Kaszlikowski, *Correlation complementarity yields Bell monogamy relations*, Phys. Rev. Lett. **106**, 180402 (2011).
- [E] W. Laskowski, D. Richart, C. Schwemmer, T. Paterek, H. Weinfurter, *Experimental Schmidt decomposition and state independent entanglement detection*, Phys. Rev. Lett. **108**, 240501 (2012).
- [F] T. K. Chuan, J. Maillard, K. Modi, T. Paterek, M. Paternostro, M. Piani, *Quantum discord bounds the amount of distributed entanglement*, Phys. Rev. Lett. **109**, 070501 (2012).
- [G] K. Modi, A. Brodutch, H. Cable, T. Paterek, V. Vedral, *The classical-quantum boundary for correlations: discord and related measures*, Rev. Mod. Phys. **84**, 1655 (2012).
- [H] W. Laskowski, M. Markiewicz, T. Paterek, R. Weinar, *Entanglement witnesses with variable number of local measurements*, Phys. Rev. A **88**, 022304 (2013).
- [I] A. Fedrizzi, M. Zuppardo, G. G. Gillett, M. A. Broome, M. de Almeida, M. Paternostro, A. G. White, T. Paterek, *Experimental distribution of entanglement with separable carriers*, Phys. Rev. Lett. **111**, 230504 (2013).
- [J] T. K. Chuan, T. Paterek, *Separable states improve protocols with finite randomness*, New J. Phys. **16**, 093063 (2014).
- [K] C. Schwemmer, L. Knips, M. C. Tran, A. de Rosier, W. Laskowski, T. Paterek, H. Weinfurter, *Genuine multipartite entanglement without multipartite correlations*, Phys. Rev. Lett. **114**, 180501 (2015).

C. omówienie celu naukowego/artystycznego ww. pracy/prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania

Osiągnięciem naukowym są wyniki zaprezentowane w powyższych pracach zbiorowych. Mój wkład do każdej z tych publikacji opisany jest w pkt. I.B w załączniku *Wykaz opublikowanych prac naukowych lub twórczych prac zawodowych oraz informacja o osiągnięciach dydaktycznych, współpracy naukowej i popularyzacji nauki*. Wkład współautorów przedstawiony jest w załączonych oświadczeniach.

W dalszej części autoreferatu referencje oznaczone literami, np. [A], odnoszą się do prac stanowiących cykl publikacji, na którym opiera się niniejszy wniosek habilitacyjny (wypisane powyżej). Referencje oznaczone liczbami, np. [1], wskazują prace wnioskodawcy nie wchodzące w skład jednotematycznego cyklu publikacji. Pozostałe referencje oznaczone są nazwiskiem pierwszego autora i rokiem publikacji, np. [Einstein1935].

1. Wstęp

Korelacje pomiędzy układami kwantowymi mogą się zasadniczo różnić od korelacji dostępnych obiektom klasycznym. Klasycyzm korelacji można rozumieć na wiele sposobów i celem naszych prac jest ich klasyfikacja, kwantyfikacja oraz badanie zjawisk związanych z korelacjami. Na przykład, jako klasyczny można przyjąć światopogląd bazujący na założeniach lokalnego realizmu, jak w pracy Einsteina, Podolskiego i Rosena

[Einstein1935]. Z dzisiejszej perspektywy lokalny realizm opisuje świat, w którym wyniki eksperymentów są obliczane przez lokalne algorytmy otrzymujące dane wejściowe nie szybciej niż z prędkością światła. Bell wykazał, że korelacje pomiędzy wynikami takich lokalnych programów są ograniczone, oraz że istnieją splątane stany kwantowe, których korelacje są silniejsze niż to ograniczenie [Bell1964]. Jednakże Werner udowodnił, że wyniki pomiarów na innych stanach splątanych można perfekcyjnie zasymulować lokalnie i realistycznie [Werner1989]. Zatem zgodnie z lokalnym realizmem nawet korelacje generowane przez niektóre stany splątane są klasyczne.

Oczywiście lokalny realizm jest obecny w wielu modelach innych niż fizyka klasyczna i z tego powodu można uznać go za koncept zbyt ogólny. Zbiór stanów opisywalnych za pomocą lokalnych i realistycznych modeli zostanie pomniejszony jeśli wprowadzimy dodatkowe pojęcia klasyczności. Z punktu widzenia korelacji naturalnym kandydatem stanów skorelowanych klasycznie są te stany, które można przygotować wyłącznie przy pomocy lokalnych operacji i klasycznej komunikacji (LOKK). Zgodnie z tym podejściem, zbiór stanów klasycznych to zbiór stanów separowalnych (nie splątanych) [Horodecki2009], zaś korelacje kwantowe odpowiadają dokładnie kwantowemu splątaniu. Jednakże i to podejście jest dyskusyjne jeśli weźmiemy pod uwagę operacje dozwolone w ramach LOKK. Operacje te pozwalają na przygotowanie nierozróżnialnych czystych stanów kwantowych, podczas gdy niemożliwe jest przygotowanie nierozróżnialnych stanów bitu klasycznego: klasyczny bit, o którym mamy maksymalną wiedzę może wskazywać albo “0” albo “1”, tj. w jeden z dwóch rozróżnialnych stanów. Wielocząstkowe stany kwantowe, które spełniają ten warunek klasyczności tworzą podzbiór stanów separowalnych i w związku z tym identyfikują niektóre stany separowalne jako kwantowo skorelowane. W tym duchu, poniższy opis osiągnięcia naukowego najpierw dyskutuje zjawiska związane z lokalnym realizmem, następnie granicę między splątaniem a separowalnością i na koniec kwantowy dysonans wraz z odpowiadającym mu pojęciem klasyczności korelacji (identyfikuje on stany skorelowane klasycznie jako podzbiór stanów separowalnych).

2. Podsumowanie

Rozpoczynamy od najbardziej ogólnego pojęcia klasyczności w naszej hierarchii — od lokalnego realizmu. Jak wiadomo korelacje opisywane za pomocą lokalnego realizmu spełniają nierówności Bella. Istnieją również korelacje kwantowe, które łamią te nierówności. Okazuje się jednak, że jednoczesne łamanie więcej niż jednej nierówności Bella jest zazwyczaj niemożliwe. Fakt ten został nazwany “monogamią Bella” ponieważ w najprostszym przypadku maksymalne łamanie jednej nierówności implikuje zupełny brak łamania pozostałej nierówności. W pracy [D] pokazujemy, że kwantowe ograniczenia na łamanie wielu (wielocząstkowych) nierówności Bella wynikają z relacji, którą nazwaliśmy komplementarnością korelacji. Komplementarność korelacji jest wersją zasady nieoznaczoności zaaplikowaną do korelacji pomiędzy wieloma układami kwantowymi. Oprócz tego, że zasada ta wyjaśnia wiele ścisłych monogamii Bella, pokazuje ona również że możliwe jest jednoczesne łamanie wielu wielocząstkowych nierówności Bella. Komplementarność korelacji znalazła również inne zastosowania, np. przy wykrywaniu splątania [E,30] czy przy przejściu od fizyki kwantowej do klasycznej [22].

Nasze drugie pojęcie klasyczności to separowalność. Proponujemy nową, kompletną charakteryzację kwantowego splątania w terminach bezpośrednio eksperymentalnie mierzalnych funkcji korelacji [A]. Za jej pomocą wprowadzamy eksperymentalnie przyjazne metody wykrywania splątania [C,E,H] jak również studiujemy relacje między splątaniem a lokalnym realizmem [C]. Nasze metody zostały z powodzeniem zaimplementowane w laboratorium optyki kwantowej Prof. Weinfurtera [E]. Choć kwantowe splątanie objawia się w korelacjach i w układach dwucząstkowych splątaniu zawsze towarzyszą dwucząstkowe korelacje, w przypadku wielocząstkowym prawdziwe wielocząstkowe splątanie może istnieć bez wielocząstkowych korelacji

[Kaszlikowski2008]. Dla dowolnego stanu czystego nieparzystej liczby kubitów konstruujemy jego “anty-stan”, którego wielocząstkowe korelacje są dokładnie przeciwne. Biorąc więc stan mieszany, w którym oba te stany czyste pojawiają się z tym samym prawdopodobieństwem, otrzymujemy stan bez wielocząstkowych korelacji. Wiele z tak otrzymanych stanów jest prawdziwie wielocząstkowo splątanych, jak wykazaliśmy teoretycznie i eksperymentalnie w pracy [K].

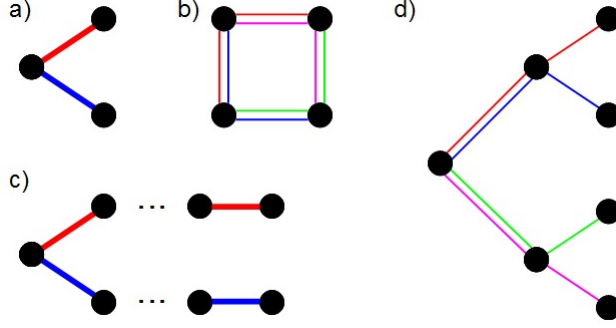
Na koniec studiujemy kwantowy dyskord, zgodnie z którym klasyczne korelacje są obecne wyłącznie w stanach niezmienniczych ze względu na lokalne pomiary. Wprowadzamy ujednoczone podejście, które pozwala na bezpośrednie porównanie splątania i dyskordu [B]. Jest to możliwe dzięki użyciu tych samych matematycznych wielkości do mierzenia różnego rodzaju korelacji. Splątanie mierzone jest przez entropię wzajemną do najbliższego stanu separowalnego, zaś dyskord mierzony jest przez entropię wzajemną do najbliższego stanu klasycznego. W podejściu tym naturalnie pojawia się nowy rodzaj korelacji, który opisuje korelacje kwantowe inne niż splątanie, tj. w najbliższym stanie separowalnym do stanu wyjściowego. Pokazujemy, że tak wprowadzona wzajemna entropia dyskordu pełni ważną rolę w protokołach dystrybucji splątania, ponieważ jej wielkość zmierzona na układzie przekazywanym w protokole ogranicza ostateczny wzrost splątania [F]. Należy podkreślić, że wzrost splątania nie jest ograniczony zakomunikowanym splątaniem, lecz zakomunikowanym dyskordem, który może być dodatni nawet w stanach separowalnych. W ten sposób dyskord został zidentyfikowany jako zasób dla dystrybucji splątania i wielkość, która umożliwia dystrybucję splątania poprzez stany separowalne zauważoną w [Cubitt2003]. Ta ostatnia metoda dystrybucji splątania została po raz pierwszy zaimplementowana w [I] oraz w równoległych pracach [Vollmer2013,Peuntinger2013]. Wiele innych zastosowań dyskordu podsumowaliśmy w pracy przeglądowej [G] (przykład kodów przypadkowego dostępu jest studiowany w [J]).

Opiszemy teraz dokładniej prace wchodzące w skład cyklu publikacji, na którym opiera się niniejszy wniosek habilitacyjny.

3. Lokalny realizm

Lokalny realista twierdzi, że wszystkie możliwe pomiary mają jednocześnie dobrze zdefiniowane wyniki, które zależą wyłącznie od (lokalnych) parametrów urządzeń pomiarowych i układów które te urządzenia mierzą. Szczególna teoria względności jest przykładem teorii lokalnej i realistycznej, ponieważ położenia i pędy układu cząstek w danej chwili determinują wyniki pomiarów wszystkich wielkości fizycznych. Dodatkowo, zdarzenia odseparowane przestrzennie nie mogą na siebie wpływać narzucając lokalność. Probabilistyczne przewidywania mechaniki kwantowej spowodowały, że już jej ojcowie zastanawiali się czy jest możliwa głębsza teoria lokalna i realistyczna, która sprowadzałaby się do kwantowych prawdopodobieństw kiedy wiedza o niektórych z jej zmiennych jest niedostępna. Bell wykazał, że taka lokalna teoria z ukrytymi zmiennymi nie istnieje [Bell1964]. Wyprowadził on nierówność, która jest spełniona przez wszystkie korelacje modeli lokalnych i realistycznych, zaś łamana jest przez pewne korelacje kwantowe. Łamanie to często nazywane jest “kwantową nielokalnością”, ale należy podkreślić, że mechanika kwantowa nie pozwala na ponadświatłą komunikację (zasada no-signalling). Ta pokojowa koegzystencja mechaniki kwantowej i szczególnej teorii względności może być wykorzystana by wnioskować o przewidywaniach kwantowych.

Monogamia Bella. Rozważmy dla przykładu sytuację przedstawioną na Rys. 1a). Trzech obserwatorów (czarne wierzchołki) próbuje złamać dwie nierówności Bella (kolorowe krawędzie) w ten sposób, że wyniki pomiarów osoby po lewej użyte są do obliczeń obu parameterów Bella. Okazuje się, że gdyby było możliwe jednoczesne łamanie obu nierówności Bella, osoba po lewej mogłaby użyć tych korelacji by natychmiastowo



Rysunek 1 Przykładowe sytuacje, w których występuje monogamia Bella. a) Trzech obserwatorów (wierzchołki) próbuje złamać dwie dwucząstkowe nierówności Bella (krawędzie). b) Bardzo skompresowana sytuacja, w której czterech obserwatorów próbuje złamać cztery trójcząstkowe nierówności Bella. c) i d) przedstawiają jeszcze inne przykładowe scenariusze, dla których wyprowadzamy ścisłe relacje monogamii.

komunikować się z osobami po prawej, na przekór zasadzie no-signalling [Pawłowski2009]. Jednakże zasada ta nie wystarcza by wytłumaczyć precyzyjnie kwantowe ograniczenia na wielkość łamań [Toner2006]. W pracy [D] odzyskujemy precyzyjnie te kwantowe ograniczenia z zasady komplementarności korelacji.

Komplementarność korelacji jest w gruncie rzeczy relacją nieoznaczoności: opisuje ona kompromis pomiędzy wartościami średnimi pewnych obserwacji, które zostały zmierzone w dowolnym stanie kwantowym. Dla obserwacji dychotomicznych, tj. o wartościach własnych ± 1 , których operatory kwantowe A_k antykomutują, mamy [D, Wehner2008, Wehner2010]:

$$\sum_k \alpha_k^2 \leq 1, \quad (1)$$

gdzie α_k jest wartością oczekiwaną obserwacji A_k . Wynika z tego, że jeśli jedna wartość oczekiwana jest duża, powiedzmy bliska jedynce, pozostałe wartości średnie muszą być małe, i stąd wspomniany kompromis. Rozważmy teraz kompletny zbiór korelacyjnych nierówności Bella dla wielu obserwatorów, z których każdy wybiera spośród dwóch ustawień pomiarowych i otrzymuje dychotomiczne wyniki pomiarów [Werner2001, Żukowski2002]. W pracy [Żukowski2002] wyprowadzono górne ograniczenie na wartość kwantową ogólnego operatora Bella \mathcal{B} , którego lokalne i realistyczne ograniczenie jest unormowane do jedynki:

$$\mathcal{B}^2 \leq \sum_{j_1 \dots j_N = x, y} T_{j_1 \dots j_N}^2, \quad (2)$$

gdzie sumujemy po ortogonalnych lokalnych kierunkach x i y , które rozpinają płaszczyznę ustawień, zaś $T_{j_1 \dots j_N}$ to elementy tak zwanego tensora korelacji, który jest alternatywnym do macierzy gęstości opisem stanów kwantowych. Mianowicie, stan N kubitów o macierzy gęstości ρ można zapisać jako

$$\rho = \frac{1}{2^N} \sum_{\mu_1 \dots \mu_N = 0}^3 T_{\mu_1 \dots \mu_N} \sigma_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{\mu_N}, \quad (3)$$

gdzie σ_0 to macierz jednostkowa, a $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ oznaczają macierze Pauliego. Nasza metoda na znajdowanie kwantowych ograniczeń łamania nierówności Bella polega na zastosowaniu warunku (2) do kombinacji

operatorów Bella, a następnie na zidentyfikowaniu w tak otrzymanym górnym ograniczeniu zbiorów wartości średnich anty-komutujących obserwabli i zaaplikowaniu nierówności (1).

Na rozgrzewkę wyprowadzamy kwantowe ograniczenie Tsirelsona [Tsirelson1980]. Dla dwóch kubitów ogólny operator Bella ma następujące górne ograniczenie: $\mathcal{B}^2 \leq T_{xx}^2 + T_{xy}^2 + T_{yx}^2 + T_{yy}^2$. Możemy w nim zidentyfikować dwa wektory wartości średnich anty-komutujących obserwabli, np. (T_{xx}, T_{xy}) oraz (T_{yx}, T_{yy}) . Aplikując komplementarność korelacji (1) do każdego wektora z osobna otrzymujemy $\mathcal{B} \leq \sqrt{2}$, czyli dokładnie ograniczenie Tsirelsona (przypomnijmy, że ograniczenie lokalne i realistyczne zostało unormowane do jedynki).

Relację monogamii przedstawioną na Rys. 1a) otrzymujemy następująco. Rozważmy sumę dwóch operatorów Bella i zaaplikujmy (2) do każdego operatora z osobna: $\mathcal{B}_{AB}^2 + \mathcal{B}_{AC}^2 \leq \sum_{k,l=x,y} T_{k10}^2 + \sum_{k,m=x,y} T_{k0m}^2$. Zauważmy, że ustawienia Ali są takie same w obu sumach, a więc i ortogonalne kierunki x i y są identyczne. Pozwala to na uporządkowanie macierzy Pauliego odpowiadających elementom tensora korelacji w obu sumach w następujące dwa zbiory anty-komutujących obserwabli: $\{\sigma_x\sigma_x\sigma_0, \sigma_x\sigma_y\sigma_0, \sigma_y\sigma_0\sigma_x, \sigma_y\sigma_0\sigma_y\}$ i $\{\sigma_y\sigma_x\sigma_0, \sigma_y\sigma_y\sigma_0, \sigma_x\sigma_0\sigma_x, \sigma_x\sigma_0\sigma_y\}$, gdzie kolejność decyduje o tym, na którym kubicie zaaplikowany jest operator. Ponieważ udało nam się zidentyfikować tylko dwie takie grupy, komplementarność korelacji implikuje $\mathcal{B}_{AB}^2 + \mathcal{B}_{AC}^2 \leq 2$. Zgodnie z tym wynikiem, kiedy jedna nierówność Bella jest łamana, pozostała musi być spełniona.

Metoda ta pozwala na wyprowadzenie różnorodnych relacji monogamii Bella, kilka przykładów zilustrowanych jest na Rys. 1. Pokazują one, że dla wielocząstkowych nierówności Bella możliwe jest jednoczesne łamanie więcej niż jednej nierówności, ale ciągle istnieje pewna forma monogamii. Dobrze widać to na przykładzie Rys. 1b). Nasza metoda prowadzi do następującej relacji monogamii:

$$\mathcal{B}_{ABC}^2 + \mathcal{B}_{ABD}^2 + \mathcal{B}_{ACD}^2 + \mathcal{B}_{BCD}^2 \leq 4. \quad (4)$$

Oznacza to, że potencjalnie nawet trzy nierówności Bella mogą być jednocześnie złamane, ale nie cztery. Udowodniliśmy również, że wszystkie relacje monogamii otrzymane za pomocą naszej metody są ścisłe, tj. wszystkie matematycznie dozwolone wartości parametrów Bella mogą być zrealizowane za pomocą odpowiednich pomiarów na odpowiednich stanach.

4. Separowalność

Rozważmy teraz bodajże najlepiej znany rodzaj nieklasycznych korelacji — kwantowe splątanie. Stany, które nie są splątane nazywamy separowalnymi i można je zapisać w następującej formie:

$$\rho_{\text{sep}} = \sum_i p_i \rho_i^{(1)} \otimes \cdots \otimes \rho_i^{(N)}, \quad (5)$$

gdzie p_i są prawdopodobieństwami, zaś $\rho_i^{(n)}$ jest dowolnym stanem n -tego podukładu. Poniżej przedstawiamy alternatywną charakterystykę splątania, pokazujemy jak przekłada się ona na wyrażenia użyteczne w eksperymencie i studiujemy efekt “splątania bez korelacji”.

Warunek konieczny i wystarczający. Zacznijmy od prostego faktu geometrycznego: jeśli iloczyn skalarny dwóch rzeczywistych wektorów \vec{s} i \vec{e} spełnia $\vec{s} \cdot \vec{e} < \vec{e} \cdot \vec{e}$, wówczas $\vec{s} \neq \vec{e}$. Aplikujemy go do wykrywania kwantowego splątania poprzez rozpatrzenie iloczynu skalarnego w przestrzeni tensorów korelacji (lub macierzy

gęstości) i zastąpienie \vec{s} i \vec{e} przez tensory (stany) separowalne i splątane:

$$\max_{T^{\text{sep}}} (T, T^{\text{sep}}) < (T, T) \implies T \text{ jest splątany.} \quad (6)$$

Prostszy warunek uzyskujemy po zauważeniu, że T^{sep} jest kombinacją wypukłą tensorów korelacji stanów produktowych:

$$\max_{T^{\text{prod}}} (T, T^{\text{prod}}) < (T, T) \implies T \text{ jest splątany.} \quad (7)$$

Jeśli ustalimy teraz iloczyn skalarny na $(A, B) = \sum_{j_1, \dots, j_N=1}^3 A_{j_1, \dots, j_N} B_{j_1, \dots, j_N}$ to zauważamy, że lewa strona kryterium jest maksymalną korelacją naszego stanu, T_{max} , i w związku z tym kryterium można przepisać jako

$$T_{\text{max}} < (T, T) \implies T \text{ jest splątany.} \quad (8)$$

Pomimo swojej prostoty warunek ten jest optymalny w niektórych nietrywialnych przykładach. Np. rozważmy stan Wernera dwóch kubitów $\rho = p |\psi^- \rangle \langle \psi^-| + (1-p) \frac{1}{4} \mathbb{1}$, gdzie $|\psi^- \rangle$ jest stanem singletowym zaś $\frac{1}{4} \mathbb{1}$ opisuje biały szum. Jak łatwo sprawdzić, jedyne niezerowe elementy tensora korelacji tego stanu to $T_{xx} = T_{yy} = T_{zz} = -p$. Tak więc $T_{\text{max}} = p$, podczas gdy $(T, T) = 3p^2$. Nasze proste kryterium pokazuje, że stan jest splątany dla $p > 1/3$, tj. dla wszystkich splątanych stanów tej rodziny.

W ogólności powyższe kryterium oczywiście nie jest optymalne i w pracy [A] rozszerzyliśmy je na warunek konieczny i wystarczający na splątanie. W tym celu wzięliśmy pod uwagę uogólniony iloczyn skalarny zdefiniowany poprzez nieujemną metrykę G :

$$(A, B)_G = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_N, \nu_1, \dots, \nu_N=0}^3 A_{\mu_1, \dots, \mu_N} G_{\mu_1, \dots, \mu_N; \nu_1, \dots, \nu_N} B_{\nu_1, \dots, \nu_N}. \quad (9)$$

Okazuje się, że następujący warunek jest konieczny i wystarczający na splątanie:

$$\exists_G \max_{T^{\text{prod}}} (T, T^{\text{prod}})_G < (T, T) \iff T \text{ jest splątany.} \quad (10)$$

Powyższy argument dowodzi implikacji z lewa w prawo. Implikację w stronę przeciwną dowodzimy zauważając, że (ogólny) tensor korelacji stanu splątanego leży w skończonej odległości od zbioru separowalnych tensorów korelacji (przekłada się to na ostrą nierówność w (10)). Z wypukłości zbioru separowalnych tensorów korelacji wynika, że istnieje tensor T_0 najbliższy naszemu tensorowi wyjściowemu T . Metryka, dla której zachodzi lewa strona kryterium może być symbolicznie przedstawiona jako projektor na T_0 [A]. Pokazaliśmy również, że świadkowie splątania [Horodecki1996] odpowiadają metrykom, które mogą być zapisane jako projektory. Ponieważ bardziej ogólne metryki są dozwolone w naszym kryterium, jest ono bogatsze od rodziny świadków splątania.

Wykrywanie kwantowego splątania. Użyteczność naszego kryterium wynika z tego, że zawiera ono bezpośrednio mierzalne funkcje korelacji. Nie trzeba ich dalej w jakikolwiek sposób przetwarzać czy rekonstruować macierz gęstości. Inne zalety widać wyraźnie na przykładzie najprostszego kryterium z tej

rodziny, tj. warunku (8) z $T_{\max} = 1$:

$$\sum_{j_1 \dots j_N=1}^3 T_{j_1 \dots j_N}^2 > 1 \implies T \text{ jest splątany.} \quad (11)$$

Po pierwsze warunek ten zachodzi dla dowolnych stanów kwantowych, czystych czy mieszanych. W odróżnieniu od liniowych świadków splątania, które zazwyczaj konstruowane są pod poszczególne stany, kryterium nasze jest niezależne od stanów kwantowych. Następnie zauważmy, że by wykryć splątanie wystarczy przelamać ograniczenie po prawej stronie, nie zawsze trzeba mierzyć wszystkie korelacje w stanie. Używając fundamentalnych własności tensora korelacji opracowaliśmy algorytmy, które minimalizują ilość potrzebnych pomiarów korelacji [E,30].

W pracy [E] zaproponowaliśmy i zaimplementowaliśmy algorytm bazujący na rozkładzie Schmidta stanów czystych. W obecnym kontekście rozkład Schmidta implikuje, że pomiar wzdłuż wektorów Blocha opisujących zredukowane macierze gęstości daje wyniki maksymalnie skorelowane (dla tego stanu). W związku z tym jest to naturalny punkt startowy dla weryfikacji splątania poprzez warunek (11). Dla stanów których lokalne wektory Blocha znikają zaproponowaliśmy metodę opartą na filtrowaniu, która za pomocą jednego dodatkowego pomiaru daje maksymalnie skorelowane wyniki. Z pomocą komplementarności korelacji opracowaliśmy wydajny algorytm detekcji splątania w nieznanymi stanach. Pomysł zasadza się na tym, że gdy zmierzono duże korelacje, nie trzeba mierzyć korelacji anty-komutujących obserwabli ponieważ muszą one być małe. Można więc przejść bezpośrednio do elementów tensora korelacji dla których wciąż jest szansa dużych korelacji.

Następna zaleta wielu z naszych warunków opiera się na tym, że sumują one kwadraty korelacji, tj. wraz z następnymi pomiarami lewa strona nie maleje i możemy przestać mierzyć kiedy tylko lewa strona przewyższy prawe ograniczenie. Własność ta nie zachodzi dla liniowych świadków splątania: należy tu zmierzyć wszystkie obserwabli definiujące świadka, gdyż pomiary pośrednie mogą umniejszać odpowiednią lewą stronę. W pracy [H] przedstawiamy konkretny przykład takiego umniejszania jak również metody znajdowania metryki G gdy wiemy jaki stan chcemy wykryć.

Zastosowaliśmy te techniki w połączeniu z warunkami na łamanie nierówności Bella [3,4] do studiowania relacji pomiędzy splątaniem a lokalnym realizmem [C]. Policzyliśmy jak splątanie oraz możliwość łamania pewnych klas nierówności Bella zależą od siły szumów zaaplikowanych do pojedynczych kubitów. Praca jest bardzo systematyczna: studiujemy efekty białego szumu, kolorowego szumu, szumu depolaryzującego, defazującego oraz spontanicznej emisji na układach wielu kubitów przygotowanych w stanie Bella, GHZ, uogólnionym GHZ, oraz W. We wszystkich tych sytuacjach istnieją pewne domieszki szumów, dla których stany splątane spełniają bogate klasy nierówności Bella. W szczególności istnieją przykłady, w których zachodzi to również dla nieskończonej liczby kubitów.

Splątanie bez korelacji. Korelacje pomiędzy wynikami pomiarów są najbardziej wyrazistym aspektem kwantowego splątania. Każdy dwucząstkowy stan splątany zawiera niezerowe elementy tensora korelacji. Okazuje się jednak, że ekstrapolacja tego wyniku na układy wielocząstkowe nie jest prawdziwa. [Kaszlikowski2008] wykazali, że istnieją N -cząstkowe stany prawdziwie wielocząstkowo splątane, które jednak nie mają w ogóle N -cząstkowych korelacji.

W pracy [K] przedstawiliśmy prostą konstrukcję wielocząstkowych stanów bez korelacji. Dla każdego stanu czystego wielu kubitów $|\psi\rangle$ skonstruowaliśmy stan $|\bar{\psi}\rangle$, który ma dokładnie przeciwne wszystkie korelacje pomiędzy nieparzystą liczbą obserwatorów. Udowodniliśmy to pokazując, że $|\bar{\psi}\rangle$ może być matematycznie otrzymany z $|\psi\rangle$ poprzez aplikację lokalnych bramek universal-not. Bramki te zamieniają wartości własne

wszystkich macierzy Pauliego na przeciwne i dzięki temu korelacje pomiędzy nieparzystą liczbą obserwatorów są przeciwne. Mimo tego, że universal-not nie jest operacją unitarną, pokazaliśmy że $|\bar{\psi}\rangle$ jest zawsze dobrze zdefiniowanym stanem fizycznym. Możemy więc zmieszać go z oryginalnym stanem

$$\rho_{\text{nc}} = \frac{1}{2} |\psi\rangle\langle\psi| + \frac{1}{2} |\bar{\psi}\rangle\langle\bar{\psi}|, \quad (12)$$

i jeśli tylko całkowita liczba kubitów jest nieparzysta w stanie tak otrzymanym znikają wszystkie N -cząstkowe korelacje. Następnie pokazaliśmy nieskończone rodziny takich stanów, które dodatkowo są prawdziwie N -cząstkowo splątane. W dowodzie ponownie skorzystaliśmy z kryteriów detekcji splątania opisanych powyżej. Te nowe stany zostały wyprodukowane eksperymentalnie i szczegółowa analiza błędów potwierdziła splątanie bez korelacji.

5. Dyskord

Istnieje wiele miar kwantowego splątania i wiele miar, które określają jako nieklasyczne korelacje w pewnych stanach separowalnych. Wszystkie je można ogólnie nazwać “dyskordem” od nazwy jednej z pierwszych takich miar [Ollivier2001]. Miary te są podsumowane w pracy przeglądowej [G] i właściwie wszystkie wyznaczają tę samą granicę między klasycznymi i kwantowymi korelacjami. Jako klasyczne traktuje się korelacje w stanach, które są niezmiennicze ze względu na lokalne pomiary. Dla układów dwucząstkowych, jeśli rozważymy pomiary tylko na jednym podukładzie, ta definicja klasyczności odpowiada tzw. stanom klasyczno-kwantowym:

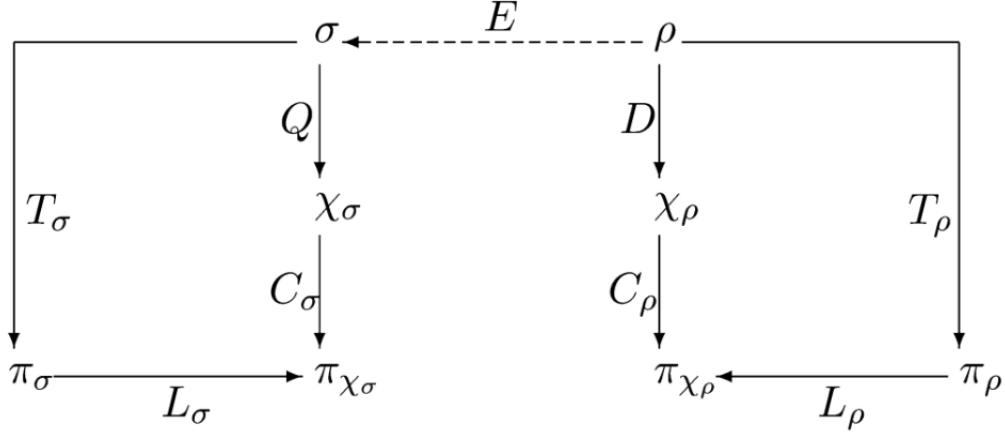
$$\rho_{\text{cq}} = \sum_i p_i |i\rangle\langle i| \otimes \rho_i, \quad (13)$$

gdzie p_i są prawdopodobieństwami, $\{|i\rangle\}$ tworzą ortonormalną bazę, zaś ρ_i są dowolne. Podobnie, jeśli dwoje obserwatorów wykonuje pomiary, jako klasyczne określa się tzw. stany klasyczno-klasyczne:

$$\rho_{\text{cc}} = \sum_{i,j} p_{ij} |i\rangle\langle i| \otimes |j\rangle\langle j|, \quad (14)$$

gdzie teraz obie lokalne bazy są ortonormalne, zaś p_{ij} oznaczają łączny rozkład prawdopodobieństwa. Ta ostatnia definicja klasyczności jest bodajże najbardziej intuicyjna ponieważ wzór (14) opisuje dwie klasyczne zmienne losowe, i oraz j , tylko zapisane w notacji kwantowej.

Ujednoczone podejście do korelacji. Wielość miar dyskordu i splątania powoduje, że trudno jest je porównywać. W pracy [B] proponujemy więc ujednoczone podejście do różnych rodzajów korelacji. W momencie pisania artykułu ten dostarczył również jednych z pierwszych narzędzi do obliczeń dyskordu w stanach wielocząstkowych. Nasze miary opierają się na pomysł, że odległość od danego stanu do najbliższego stanu bez pożądaney własności (np. splątania czy dyskordu) jest miarą tej własności. Na przykład, odległość do najbliższego stanu separowalnego jest sensowną miarą splątania. Jeśli odległość mierzymy entropią wzajemną, tak powstała miara splątania to wzajemna entropia splątania [Vedral1997,Vedral1998]. My również używaliśmy wzajemnej entropii do zdefiniowania miar nieklasycznych korelacji, choć inne miary odległości są równie dobre. Ponieważ wszystkie odległości mierzone są za pomocą wzajemnej entropii, otrzymujemy w ten sposób konsyistentne podejście pozwalające na bezpośrednie porównanie różnych rodzajów korelacji.



Rysunek 2 Korelacje w stanie kwantowym. Strzałka od x do y , tj. $x \rightarrow y$, oznacza, że y jest najbliższym stanem do x , zgodnie z entropią wzajemną $S(x||y)$. Stan ρ należy w ogólności do zbioru stanów splątanych \mathcal{E} , stan σ należy do zbioru stanów separowalnych \mathcal{S} , stan χ należy do zbioru stanów klasycznych \mathcal{C} (klasyczno-klasycznych lub klasyczno-kwantowych), zaś π należy do zbioru stanów produktowych \mathcal{P} . Odległości określają następujące miary: splątanie E , dyskord D , dysonans Q , całkowitą wzajemną informację T_ρ i T_σ , oraz klasyczne korelacje C_ρ i C_σ . Wszystkie entropie wzajemne, poza splątaniem, redukują się do różnic w entropii stanu y i stanu x .

Entropia wzajemna pomiędzy dwoma stanami kwantowymi x i y jest zdefiniowana jako

$$S(x||y) = \text{Tr}(x \log x) - \text{Tr}(x \log y). \quad (15)$$

Entropia wzajemna jest wielkością nieujemną i głównie z tego powodu często pojawia się w kontekście miary odległości choć technicznie rzecz biorąc nią nie jest, np. jest niesymetryczna. W naszym podejściu, Rys. 2, zaczynamy od stanu ρ . T_ρ jest całkowitą wzajemną informacją w ρ daną przez odległość do najbliższego stanu produktowego. Wielkość ta opisuje całkowite korelacje w stanie kwantowym. Jeśli ρ jest splątany, jego splątanie mierzone jest wzajemną entropią splątania, E , czyli odległością do najbliższego stanu separowalnego σ . Kiedy już znajdziemy σ , znajdujemy najbliższy mu stan klasyczny, χ_σ . Ta odległość, oznaczona jako Q , zawiera pozostałe nieklasyczne korelacje (podobnie do oryginalnego dyskordu [Henderson2001, Ollivier2001] ale nie zawiera splątania). Nazwaliśmy tę wielkość kwantowym dysonansem. Jeśli jednak interesuje nas wielkość podobna do oryginalnego dyskordu, tu oznaczona jako D , wówczas powinniśmy znaleźć odległość między ρ i najbliższym mu stanem klasycznym χ_ρ . Podsumowując, mamy następujące korelacje nieklasyczne:

$$E = \min_{\sigma \in \mathcal{S}} S(\rho||\sigma) \quad (\text{splątanie}), \quad (16)$$

$$D = \min_{\chi \in \mathcal{C}} S(\rho||\chi) \quad (\text{dyskord}), \quad (17)$$

$$Q = \min_{\chi \in \mathcal{C}} S(\sigma||\chi) \quad (\text{dysonans}). \quad (18)$$

Na koniec obliczamy korelacje klasyczne jako minimalną odległość od stanów klasycznych χ do stanów produktowych π :

$$C = \min_{\pi \in \mathcal{P}} S(\chi||\pi) \quad (\text{klasyczne korelacje}). \quad (19)$$



Rysunek 3 Najprostsza komunikacja. Naszym zadaniem jest wykazanie jak przekaz cząstki C wpływa na korelacje, informację, splątanie pomiędzy laboratoriami.

Udowodniliśmy następnie, że obliczenie dyskordu i dysonansu redukuje się do obliczenia różnicy entropii po i przed lokalnymi pomiarami (ciągle trzeba jeszcze minimalizować po tych pomiarach). Pokazuje to, że dyskord D jest równoważny kwantowemu deficytowi (zero-way lub one-way) wprowadzonemu przez rodzinę Horodeckich i współpracowników [Oppenheim2002, Horodecki2003, Horodecki2005a]:

$$D = \min_{\Pi = \Pi_1 \otimes \dots \otimes \Pi_N} S(\Pi(\rho)) - S(\rho), \quad (20)$$

$$Q = \min_{\Pi = \Pi_1 \otimes \dots \otimes \Pi_N} S(\Pi(\sigma)) - S(\sigma), \quad (21)$$

gdzie Π oznacza pomiary rzutowe na podukładach. W zależności od tego czy interesuje nas zbiór stanów klasyczo-klasycznych czy klasyczo-kwantowych wybieramy w tych definicjach pomiary na odpowiednich podukładach. Wybór ten określa również czy D jest równoważny kwantowemu deficytowi zero-way czy one-way.

Uzbrojeni we wszystkie te wielkości pytamy jakie są ich konsekwencje. W pracy [B] zauważyliśmy, że dysonans może być obecny nawet w stanach czystych pod warunkiem, że są one przynajmniej trójcząstkowe. Dla przykładu weźmy stan $|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)$. Jego najbliższy stan separowalny to [Wei2004]: $\sigma = \frac{8}{27}|000\rangle\langle 000| + \frac{12}{27}|W\rangle\langle W| + \frac{6}{27}|\bar{W}\rangle\langle \bar{W}| + \frac{1}{27}|111\rangle\langle 111|$, gdzie $|\bar{W}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|011\rangle + |101\rangle + |110\rangle)$. Okazuje się, że stan ten zawiera wiele nieklasycznych korelacji w formie dysonansu (prawie 1 bit).

Dystrybucja splątania. Wyrazisty przykład zastosowania kwantowego dyskordu pochodzi z rozważań nad kwantowym splątaniem i ogólnymi protokołami komunikacji. Komunikacja polega na transferze układów fizycznych, którego celem jest skorelowanie komunikujących się osób. Konceptyjnie najprostszy schemat komunikacji został przedstawiony na Rys. 3. Bazując na nim łatwo można wykazać, że wzrost wzajemnej informacji, którego przyczyną jest przesłanie cząstki C , tj. $I_{A:CB} - I_{AC:B}$, jest ograniczony zakomunikowaną informacją, $I_{AB:C}$ [F]:

$$I_{A:CB} - I_{AC:B} \leq I_{AB:C}. \quad (22)$$

W szczególności wyrażenie to pokazuje, że brak zakomunikowanej informacji skutkuje brakiem wzrostu informacji pomiędzy laboratoriami. Fakt ten wydaje się tak elementarny, że oczekujemy iż każdy rozsądny rodzaj korelacji spełnia podobne ograniczenie. Skoro bez wątplenia kwantowe splątanie jest rozsądnym rodzajem korelacji, np. umożliwia kwantową teleportację [Bennett1993] czy wersje kwantowej kryptografii [Ekert1991], oczekujemy że splątanie spełnia warunek podobny do (22).

Nieoczekiwanie [Cubitt2003] przedstawili przykład protokołu, w którym splątanie wzrasta podczas gdy nie było ono zakomunikowane, tj. $E_{A:CB} - E_{AC:B} > 0$, podczas gdy $E_{AB:C} = 0$. Proces ten został nazwany dystrybucją splątania przez stany separowalne i narzuca pytanie o wielkość, która ogranicza wzrost splątania. W pracy [F] pokazaliśmy, że jest to zakomunikowany kwantowy dyskord (inny dowód tego twierdzenia



Rysunek 4 Kody przypadkowego dostępu $n \rightarrow 1$ ze współdzielonymi bitami losowymi. Ala i Bob dzielą skończoną ilość bitów klasycznych lub kwantowych ze wspólnego źródła. Ala może przesłać do Boba tylko jeden bit klasyczny. Zadaniem Boba jest poznanie i -tego bitu wejściowego Ali, x_i .

przedstawiony jest w [Streltsov2012]):

$$E_{A:CB} - E_{AC:B} \leq D_{AB|C}. \quad (23)$$

Opiszemy teraz najważniejsze konsekwencje (23): (i) Splątanie nie może wzrosnąć poprzez stany ze znikającym dysorkdem. Jest to wyrażony inaczej znany fakt, że splątanie nie rośnie gdy aplikujemy LOKK [Bennett1996]. Mianowicie, stany bez dysorkdu można przedstawić jako $\sum_j p_j \rho_j^{AB} \otimes |j\rangle\langle j|$, a więc komunikowany układ C koduje klasyczną informację. W tym kontekście (23) jest uogólnieniem monotoniczności splątania ze względu na LOKK na przypadek komunikacji kwantowej. (ii) Uogólnia ono warunek subaddytywności entropii. Udowodniliśmy, że nie tylko wzrost splątania jest ograniczony dysorkdem, ale również jego zanik, tj. $|E_{A:CB} - E_{AC:B}| \leq D_{AB|C}$. Dla stanów czystych warunek ten redukuje się do $|S_A - S_B| \leq S_{AB}$, gdzie S_j jest entropią j -tego podukładu. Ta ostatnia nierówność jest znana pod nazwą nierówności Arakiego i Lieba [Araki1970] i jest równoważna subaddytywności entropii dla podukładów AC i BC . Można więc powiedzieć, że (23) uogólnia subaddytywność entropii na trójcząstkowe stany mieszane. (iii) Nadaje ono operacyjne znaczenie ujemnej entropii warunkowej [Horodecki2005b]. Rozważmy dwucząstkowy układ w stanie ρ_{AC} o ujemnej entropii warunkowej $S_{C|A} = S_{AC} - S_A$. Zawsze znajdziemy czysty stan trójcząstkowy $|\psi_{ABC}\rangle$, którego podukład opisywany jest przez ρ_{AC} . Umieścimy cząstkę B w odległym laboratorium i zauważmy, że lewa strona (23) jest teraz dana przez $E_{A:CB} - E_{AC:B} = -S_{C|A}$. Oznacza to, że ujemna entropia warunkowa może być przelożona na wzrost splątania, którego przyczyną jest komunikacja C do “oczyszczającego” laboratorium.

Poza interesującym faktem, że dystrybucja splątania przez stany separowalne jest w ogóle możliwa okazuje się, że jest ona użyteczna w przypadku zaszumionej komunikacji i zaszumionych laboratoriów. Pokazaliśmy to w pracy [I] gdzie dodatkowo optymalny protokół dystrybucji został zaimplementowany po raz pierwszy z użyciem kubitów zakodowanych w polaryzacji fotonów. Prace [Vollmer2013, Peuntinger2013] zademonstrowały ten rodzaj dystrybucji splątania z użyciem zmiennych ciągłych.

Kody przypadkowego dostępu. Nasz ostatni przykład zastosowania dysorkdu to problemy, w których mamy ograniczoną liczbę współdzielonych bitów losowych. Ogólny argument jest następujący. Jak wiadomo z twierdzenia Bella, kwantowe przewidywania dla niektórych stanów splątanych nie mogą być wyjaśnione za pomocą modeli lokalnych i realistycznych. Z perspektywy modelowania komputerowego, modele lokalne i realistyczne mogą być interpretowane jak klasyczne komputery, które operują na potencjalnie nieskończonych ciągach skorelowanych bitów. Z tego powodu łamanie nierówności Bella charakteryzują wydajność kwantowych rozwiązań pewnych problemów, które jednakże nie mogą wprowadzać restrykcji na

dostępność skorelowanych bitów. Jeśli liczba takich bitów jest ograniczona, efektywnie narzuca to ograniczenia na możliwe modele lokalne i realistyczne, i w tym przypadku stany separowalne mogą stać się użytecznym zasobem. Łamanie nierówności Bella nie jest wtedy konieczne by uzyskać kwantową przewagę nad najlepszym rozwiązaniem klasycznym.

W pracy [J] pokazaliśmy jak powyższy argument aplikuje się do kodów przypadkowego dostępu. Wyobraźmy sobie, że Bob chciałby poznać losowy numer z książki telefonicznej Ali. Czy konieczne jest by Ala wysłała mu całą książkę? Być może może ona zakomunikować mniejszą liczbę “zakodowanych” stron tak by Bob mógł być dość pewien że poznał właściwy numer. Kody przypadkowego dostępu to strategie zaprojektowane by rozwiązać ten problem. Jak pokazano na Rys. 4, w klasycznym kodzie przypadkowego dostępu (KPD) $n \rightarrow 1$ Ala otrzymuje losowy ciąg n bitów wejściowych i komunikuje jeden bit do Boba. Na tej podstawie Bob próbuje zgadnąć i -ty bit Ali, x_i , zaś wartość tego bitu zgadywaną przez Boba oznaczamy przez b_i . Gra ta powtarza się wielokrotnie i za każdym razem i oraz dane wejściowe Ali wybierane są losowo. W kwantowej wersji tego zadania Ala komunikuje kwantowy bit [Ambainis2002] lub też Ala i Bob współdzielą stan splątany i przekazują sobie wyłącznie klasyczną komunikację [Pawłowski2010]. My studiujemy tę ostatnią wersję problemu i pozwalamy na współdzielenie dowolnych stanów kwantowych. Rola kwantowego dyskordu w poprzedniej wersji problemu była rozważana w [Yao2012]. Nasz wybór uwypukla znaczenie współdzielonych bitów ponieważ ustalenie komunikacji na klasyczną powoduje, że jedynym zasobem różniącym kwantowe i klasyczne rozwiązania są współdzielone (ku)bity.

Standardową miarą wydajności KPD jest prawdopodobieństwo P_{\min} poprawnego zgadnięcia bitu Ali w najgorszym przypadku (zminimalizowane po x i i), tj. $P_{\min} = \min_{x,i} \Pr(b_i = x_i)$. W pracy pokazujemy, że dla dwóch współdzielonych bitów, klasyczny KPD $n \rightarrow 1$ ma następujące cechy: (i) $P_{\min} \leq \frac{1}{2}$ dla $n > 2$; (ii) $P_{\min} \leq \frac{2}{3}$ dla $n = 2$; (iii) $P_{\min} \leq \frac{1}{2}$ dla wszystkich n , jeśli bit u Boba ma zupełnie losowe wartości. Co ciekawe, najlepszy protokół klasyczny używa bitów “stronniczych”, które nie są zupełnie przypadkowe ani dla Ali ani dla Boba, tj. użycie stronniczych bitów pozwala w tym przypadku na uzyskanie dodatkowej wydajności. Odróżnia nas to od wielu prac nad współdzielonymi zmiennymi losowymi, które zazwyczaj wykorzystują tzw. wspólną losowość, tj. pary idealnie skorelowanych ale lokalnie zupełnie przypadkowych bitów. Pokazaliśmy następnie kwantowe kody, w których używamy stanów dwóch kubitów diagonalnych w bazie Bella. Wyliczyliśmy dla nich np. wydajność kodu $3 \rightarrow 1$ jako:

$$P_{\min} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{T_1^{-2} + T_2^{-2} + T_3^{-2}}} \right), \quad (24)$$

gdzie T_j są diagonalnymi elementami tensora korelacji stanów diagonalnych w bazie Bella (wzór ten wyprowadzony jest przy założeniu, że wszystkie T_j są niezerowe). Jak widać $P_{\min} > \frac{1}{2}$, a więc nasze kody kwantowe są wydajniejsze od najlepszego kodu klasycznego. Jeśli ograniczymy współdzielone kubity do stanów separowalnych diagonalnych w bazie Bella, to maksymalna kwantowa wydajność dla tych stanów wynosi $P_{\min} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{3\sqrt{3}}) \approx 0.596$, znacznie powyżej klasycznego ograniczenia. Pokazaliśmy również przykłady stanów separowalnych, które prowadzą do lepszej wydajności niż niektóre stany splątane.

Na koniec chcielibyśmy przedstawić argument sugerujący, że wiele sensownych miar typu dyskordu jest jeszcze nieodkrytych. Wszystkie te miary wyznaczają tę samą granicę między klasycznymi i kwantowymi korelacjami, ale ilość kwantowych korelacji zależy oczywiście od konkretnej miary i można oczekiwać pojawienia się kolejnych wielkości, których wartości będą lepiej odpowiadały wydajności rozwiązań różnych problemów. Studiowane tu kody przypadkowego dostępu są tego dobrym przykładem. Można wykazać ogólnie, że to dyskord napędza kwantową przewagę i co więcej we wszystkich naszych przykładach dyskord geometryczny [Dakić2010] jest proporcjonalny do efektywności. Jednakże proporcjonalność ta jest różna dla

różnych klas stanów i dyskord ten nie może być ogólnym wyznacznikiem użyteczności stanów w kodach kwantowych. Mianowicie, nasz optymalny stan separowalny dla kodu $2 \rightarrow 1$ ma dyskord geometryczny $D_{\text{sep}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, który odpowiada wydajności $P_{\text{min}} = \frac{1}{2}(1 + D_{\text{sep}})$. Natomiast dla stanów Wernera mamy $D_{\text{Wer}} = p$, gdzie p określa domieszkę splątania, który z kolei odpowiada wydajności $P_{\text{min}} = \frac{1}{2}(1 + D_{\text{Wer}}/\sqrt{2})$. Oznacza to, że dla $D_{\text{Wer}} \in (\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ stany Wernera mają więcej dyskordu niż optymalny stan separowalny, ale dają mniejsze P_{min} niż tenże stan separowalny. Jaka dokładnie wielkość fizyczna jest zasobem umożliwiającym lepsze kody kwantowe jeszcze nie wiadomo, ale będzie to kolejna miara z serii, którą ogólnie nazwalibyśmy tu “dyskord”.

V. OMÓWIENIE POZOSTAŁYCH OSIĄGNIĘĆ NAUKOWO - BADAWCZYCH (ARTYSTYCZNYCH)

Dane bibliometryczne:

- liczba publikacji: **45**, w tym **36** po uzyskaniu stopnia doktora
- łączna liczba cytowań: **1500**, w tym **1450** bez autocytowań
- indeks Hirscha: **15**
- sumaryczny impact factor: **300**

A. osiągnięcia przed uzyskaniem stopnia naukowego doktora

1. Nowe nierówności Bella i ich aplikacje

Wyprowadziliśmy ściśle nierówności Bella dla wielu obserwatorów, z których każdy wybiera spośród wielu ustawień pomiarowych [3,4,6]. Dla niektórych z tych nierówności wyprowadziliśmy również warunki konieczne i wystarczające na ich łamanie przez przewidywania kwantowe. Powiązanie nierówności Bella z problemami złożoności komunikacyjnej studiowane jest w pracach [1,6].

2. Założenia twierdzenia Bella

Wyjaśniliśmy rolę lokalności w pewnej próbie wyprowadzenia twierdzenia Bella bez tego założenia [2]. Pokazaliśmy, że do pewnego stopnia można rozluźnić założenie Bella o wolnej woli eksperymentatorów oraz że prowadzi to do kwantowej kryptografii, w której dozwalamy by osoby niepowołane miały część wiedzy o tym co dzieje się w laboratorium (w szczególności jakie ustawienia pomiarowe są wybierane) [5]. Uogólniliśmy twierdzenie Leggetta o nielokalnych ukrytych zmiennych [Leggett2003] oraz zweryfikowaliśmy eksperymentalnie, że modele te nie mogą opisywać przyrody [7,9].

3. Pomiary na kuditach złożonych

Pokazaliśmy teoretycznie jak można mierzyć uogólnione macierze Pauliego na układach złożonych z kilku podukładów i zaaplikowaliśmy te wyniki do kryptografii [8].

B. osiągnięcia po uzyskaniu stopnia naukowego doktora

1. Bazy wzajemnie równoważne

Bazy wzajemnie równoważne (mutually unbiased bases) to takie bazy w zespolonych przestrzeniach Hilberta, że każdy wektor z jednej bazy ma taki sam moduł rzutu na dowolny wektor z innej bazy. Studiowaliśmy relacje pomiędzy ilością baz wzajemnie równoważnych w przestrzeni Hilberta o wymiarze d oraz ilością ortogonalnych kwadratów łacińskich o boku d . Zaproponowaliśmy mapę, która przypisuje kwadratowi bazy wzajemnie równoważne [11,18]. Niestety okazało się, że nie odwzorowuje ona wszystkich kwadratów na bazy w pewnych wymiarach złożonych [15]. Udowodniliśmy również w ogólnym wymiarze złożonym, że ilość kwantowego splątania w dowolnym zestawie $d+1$ baz wzajemnie równoważnych (jeśli taki istnieje) jest zawsze taka sama [21].

2. Modele z ukrytymi zmiennymi

Wykazaliśmy, że w celu wytłumaczenia kwantowej statystyki wyników pomiarów n obserwacji (na pojedynczym układzie kwantowym) wystarczy rozważyć modele z ukrytymi zmiennymi operujące na niewiele większej ilości ukrytych zmiennych. W szczególności wystarcza ilość wielomianowa w n wektorów, których składowe zawierają wyniki wszystkich n pomiarów [10]. Udowodniliśmy, że model z ukrytymi zmiennymi musi udostępniać informację o odległym ustawieniu i odległym wyniku pomiaru by móc wyjaśnić łamanie nierówności Bella [16]. Podczas gdy informacja o wyniku może być zakodowana bezpośrednio w modelu, informacja o odległym ustawieniu musi być w ramach tego podejścia przekazana nielokalnie. Praca [19] pokazuje jak złamać nierówność Bella w obecności reguł super-wyboru. Okazuje się, że układy pomiarowe muszą zostać przygotowane łącznie. Osobliwy efekt zaprezentowaliśmy w [26] i został on efektywnie zaobserwowany w eksperymencie [K]. Otóż wskazaliśmy stan kwantowy, którego korelacje pomiędzy ustaloną liczbą obserwatorów można wytłumaczyć lokalnie i realistycznie. Jednakże modele te są niekompatybilne, ponieważ istnieje nierówność Bella którą można złamać za pomocą korelacji pomiędzy różną ilością obserwatorów. W pracy [34] proponujemy, że już dwa kubity można przygotować w splątanym stanie mieszanym opisywalnym za pomocą lokalnego realizmu dla wszystkich nietrywialnych domieszek szumu (poprzednie przykłady używały nieskończenie wymiarowych przestrzeni Hilberta).

3. Podstawy fizyki kwantowej

Wprowadziliśmy zasadę przyczynowości informacji (information causality), która mówi że transfer n klasycznych bitów powoduje wzrost informacji o najwyżej n bitów (nawet jeśli metody używane do czytania indywidualnych oddalonych bitów są różne). Okazuje się, że zasada ta jest odpowiedzialna za kwantowe ograniczenie Tsirelsona [13]. W pracy [14] zaproponowaliśmy powiązanie pomiędzy logiczną niezależnością (twierdzenie jest niezależne od aksjomatów jeśli nie można udowodnić że jest prawdziwe lub fałszywe wychodząc z aksjomatów) i losowymi wynikami pomiarów kwantowych. Pokazaliśmy jak zakodować aksjomaty w stanach kwantowych oraz jak kodować twierdzenia w kwantowych pomiarach. Okazuje się, że kiedy twierdzenie jest logicznie niezależne, odpowiadający mu pomiar ma przypadkowe wyniki. W ref. [17] wprowadziliśmy hierarchię modeli opisujących układy fizyczne z ograniczoną pojemnością informacyjną. Cecha ta prowadzi do istnienia komplementarnych pomiarów i definiuje możliwości obliczeniowe tych układów. Nasza hierarchia zawiera modele klasyczne i kwantowe, a także niektóre inne ogólne teorie

probabilistyczne. Praca [20] studiuje eksperymentalnie rozkład informacji w różnych stanach dwóch kubitów. W [31] konstruujemy model, który przewiduje prawdziwą trójszczelinową interferencję [Sorkin1994]. Model ten redukuje się do standardowej mechaniki kwantowej jeśli pewne jego parametry znikają. Jak wiadomo, mechanika kwantowa nie pozwala na prawdziwą trójszczelinową interferencję i mamy nadzieję, że model ten okaże się przydatny do wyjaśnienia dlaczego tak się dzieje. W pracy [32] pokazaliśmy że kontekstualność, nielokalność i czasowe nierówności Bella sprowadzają się do pytania o istnienie pewnych łącznych rozkładów prawdopodobieństwa.

4. Od fizyki kwantowej do klasycznej

Pokazaliśmy, że korelacje pomiędzy wielkościami fizycznymi podobnymi do magnetyzacji, które mierzone są na ciałach makroskopowych można praktycznie zawsze opisać modelem lokalnym i realistycznym [22].

5. Kwantowe obliczenia

Zaproponowaliśmy metodę generowania tzw. stanów NOON splątanych w polaryzacji [23]. Stany te są użyteczne w kwantowej litografii i metrologii. W pracy [33] udowodniliśmy, że wielopunktowe kwantowe korelacje czasowe są zasobem pozwalającym na kwantowe obliczenia w jedną stronę [Briegel2001].

6. Kwantowe korelacje

Pokazaliśmy jak użyć charakterystyki [A] do wykrywania prawdziwego wielokubitowego splątania [24] oraz jak wykryć takie splątanie w stanach czystych tylko za pomocą dwucząstkowych korelacji [28]. Rozszerzenie pracy [E] zawierające więcej szczegółów i głębszą analizę układów wielocząstkowych jest przedstawione w [30]. Ref. [25] pokazuje teoretycznie i eksperymentalnie jak kwantowy dyskord napędza pewną wersję zdalnego przygotowywania stanów kwantowych (zobacz także [Horodecki2014]).

7. Kwantowa biologia

W pracach [27,29] podjęliśmy tematykę wpływu kwantowej koherencji na pomiar pola magnetycznego ziemi w procesie, który być może ma znaczenie dla migrujących ptaków.

LITERATURA

- [1] Č. Brukner, T. Paterek, M. Żukowski, *Int. J. Quant. Inf.* **1**, 519 (2003).
- [2] T. Paterek, *Int. J. Quant. Inf.* **2**, 419 (2004).
- [3] W. Laskowski, T. Paterek, M. Żukowski, Č. Brukner, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 200401 (2004).
- [4] T. Paterek, W. Laskowski, M. Żukowski, *Mod. Phys. Lett. A* **21**, 111 (2006).
- [5] J. Kofler, T. Paterek, Č. Brukner, *Phys. Rev. A* **73**, 022104 (2006).
- [6] K. Nagata, W. Laskowski, T. Paterek, *Phys. Rev. A* **74**, 062109 (2006).

- [7] S. Gröblacher, T. Paterek, R. Kaltenbaek, Č. Brukner, M. Żukowski, M. Aspelmayer, A. Zeilinger, *Nature* **446**, 871 (2007).
- [8] T. Paterek, *Phys. Lett. A* **367**, 57 (2007).
- [9] T. Paterek, A. Fedrizzi, S. Gröblacher, T. Jennewein, M. Żukowski, M. Aspelmayer, A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 210406 (2007).
- [10] B. Dakić, M. Šuvakov, T. Paterek, Č. Brukner, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 190402 (2008).
- [11] T. Paterek, B. Dakić, Č. Brukner, *Phys. Rev. A* **79**, 012109 (2009).
- [12] P. Badziąg, Č. Brukner, W. Laskowski, T. Paterek, M. Żukowski, *Phys. Scr.* **T135**, 014002 (2009).
- [13] M. Pawłowski, T. Paterek, D. Kaszlikowski, V. Scarani, A. Winter, M. Żukowski, *Nature* **461**, 1101 (2009).
- [14] T. Paterek, J. Kofler, R. Prevedel, P. Klimek, M. Aspelmayer, A. Zeilinger, Č. Brukner, *New J. Phys.* **12**, 013019 (2010).
- [15] T. Paterek, M. Pawłowski, M. Grassl, Č. Brukner, *Phys. Scr.* **T140**, 014031 (2010).
- [16] M. Pawłowski, J. Kofler, T. Paterek, M. Seevinck, Č. Brukner, *New J. Phys.* **12**, 083051 (2010).
- [17] T. Paterek, B. Dakić, Č. Brukner, *New J. Phys.* **12**, 053037 (2010).
- [18] T. Paterek, B. Dakić, Č. Brukner, *Phys. Rev. A* **83**, 036102 (2011).
- [19] T. Paterek, P. Kurzyński, D. K. L. Oi, D. Kaszlikowski, *New J. Phys.* **13**, 043027 (2011).
- [20] A. Fedrizzi, B. Škerlak, T. Paterek, M. P. de Almeida, A. G. White, *New J. Phys.* **13**, 053038 (2011).
- [21] M. Wieśniak, T. Paterek, A. Zeilinger, *New J. Phys.* **13**, 053047 (2011).
- [22] R. Ramanathan, T. Paterek, A. Kay, P. Kurzyński, D. Kaszlikowski, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 060405 (2011).
- [23] S.-Y. Lee, T. Paterek, H. S. Park, H. Nha, *Opt. Comm.* **285**, 307 (2011).
- [24] W. Laskowski, M. Markiewicz, T. Paterek, M. Żukowski, *Phys. Rev. A* **84**, 062305 (2011).
- [25] B. Dakić, Y. O. Lipp, X. Ma, M. Ringbauer, S. Kropatschek, S. Barz, T. Paterek, V. Vedral, A. Zeilinger, Č. Brukner, P. Walther, *Nature Phys.* **8**, 666 (2012).
- [26] W. Laskowski, M. Markiewicz, T. Paterek, M. Wieśniak, *Phys. Rev. A* **86**, 032105 (2012).
- [27] J. N. Bandyopadhyay, T. Paterek, D. Kaszlikowski, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 110502 (2012).
- [28] M. Markiewicz, W. Laskowski, T. Paterek, M. Żukowski, *Phys. Rev. A* **87**, 034301 (2013).
- [29] J. N. Bandyopadhyay, T. Paterek, D. Kaszlikowski, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 178901 (2013).
- [30] W. Laskowski, C. Schwemmer, D. Richart, L. Knips, T. Paterek, H. Weinfurter, *Phys. Rev. A* **88**, 022327 (2013).
- [31] B. Dakić, T. Paterek, Č. Brukner, *New J. Phys.* **16**, 023028 (2014).
- [32] M. Markiewicz, P. Kurzyński, J. Thompson, S.-Y. Lee, A. Soeda, T. Paterek, D. Kaszlikowski, *Phys. Rev. A* **89**, 042109 (2014).
- [33] M. Markiewicz, A. Przysiężna, S. Brierley, T. Paterek, *Phys. Rev. A* **89**, 062319 (2014).

- [34] M. C. Tran, W. Laskowski, T. Paterek, J. Phys. A **47**, 424025 (2014).
- [Ambainis2002] A. Ambainis, A. Nayak, A. Ta-Shma, U. Vazirani, J. ACM **49**, 496 (2002).
- [Araki1970] H. Araki, E. H. Lieb, Commun. Math. Phys. **18**, 160 (1970).
- [Bell1964] J. Bell, Physics **1**, 195-200 (1964).
- [Bennett1993] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
- [Bennett1996] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, W. K. Wootters, Phys. Rev. A **54**, 3824 (1996).
- [Briegel2001] H. J. Briegel, R. Raussendorf, Phys. Rev. Lett. **86**, 910 (2001).
- [Cubitt2003] T. S. Cubitt, F. Verstraete, W. Dür, J. I. Cirac, Phys. Rev. Lett. **91**, 037902 (2003).
- [Dakić2010] B. Dakić, V. Vedral, Č. Brukner, Phys. Rev. Lett. **105**, 190502 (2010).
- [Einstein1935] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [Ekert1991] A. K. Ekert, Phys. Rev. Lett. **67**, 661 (1991).
- [Henderson2001] L. Henderson, V. Vedral, J. Phys. A **34**, 6899 (2001).
- [Horodecki1996] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, Phys. Lett. A **223**, 1 (1996).
- [Horodecki2003] M. Horodecki, K. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, J. Oppenheim, A. Sen(De), U. Sen, Phys. Rev. Lett. **90**, 100402 (2003).
- [Horodecki2005a] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, J. Oppenheim, A. Sen(De), U. Sen, B. Synak-Radtke, Phys. Rev. A **71**, 062307 (2005).
- [Horodecki2005b] M. Horodecki, J. Oppenheim, A. Winter, Nature **436**, 673 (2005).
- [Horodecki2009] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki, Rev. Mod. Phys. **81**, 865 (2009).
- [Horodecki2014] P. Horodecki, J. Tuziemski, P. Mazurek, R. Horodecki, Phys. Rev. Lett. **112**, 140507 (2014).
- [Kaszlikowski2008] D. Kaszlikowski, A. Sen(De), U. Sen, V. Vedral, A. Winter, Phys. Rev. Lett. **101**, 070502 (2008).
- [Leggett2003] A. J. Leggett, Found. Phys. **33**, 1469 (2003).
- [Ollivier2001] H. Ollivier, W. H. Zurek, Phys. Rev. Lett. **88**, 017901 (2001).
- [Oppenheim2002] J. Oppenheim, M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, Phys. Rev. Lett. **89**, 180402 (2002).
- [Pawłowski2009] M. Pawłowski, Č. Brukner, Phys. Rev. Lett. **102**, 030403 (2009).
- [Pawłowski2010] M. Pawłowski, M. Żukowski, Phys. Rev. A **81**, 042326 (2010).
- [Peuntinger2013] C. Peuntinger, V. Chille, L. Mišta, N. Korolkova, M. Förtsch, J. Korger, C. Marquardt, and G. Leuchs, Phys. Rev. Lett. **111**, 230506 (2013).
- [Sorkin1994] R. D. Sorkin, Mod. Phys. Lett. A **9**, 3119 (1994)
- [Streltsov2012] A. Streltsov, H. Kampermann, D. Bruß, Phys. Rev. Lett. **108**, 250501 (2012).
- [Toner2006] B. Toner, F. Verstraete, arXiv:quant-ph/0611001

- [Tsirelson1980] B. S. Tsirelson, *Lett. Math. Phys.* **4**, 93 (1980).
- [Vedral1997] V. Vedral, M. B. Plenio, M. A. Rippin, P. L. Knight, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2275 (1997).
- [Vedral1998] V. Vedral, M. B. Plenio. *Phys. Rev. A* **57**, 1619 (1998).
- [Vollmer2013] C.E. Vollmer, D. Schulze, T. Eberle, V. Handchen, J. Fiurasek, and R. Schnabel, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 230505 (2013)
- [Wehner2008] S. Wehner, A. Winter, *J. Math. Phys.* **49**, 062105 (2008).
- [Wehner2010] S. Wehner, A. Winter, *New J. Phys.* **12**, 025009 (2010).
- [Werner1989] R. F. Werner, *Phys. Rev. A* **40**, 4277 (1989).
- [Werner2001] R. F. Werner, M. M. Wolf, *Phys. Rev. A* **64**, 032112 (2001).
- [Yao2012] Y. Yao, H.-W. Li, X.-B. Zou, J.-Z. Huang, C.-M. Zhang, Z.-Q. Yin, W. Chen, G.-C. Guo, Z.-F. Han, *Phys. Rev. A* **86**, 062310 (2012).
- [Żukowski2002] M. Żukowski, Č. Brukner, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 210401 (2002).

Singapur, 04.09.2015