Załącznik nr 3

AUTOREFERAT

1. Imiona i nazwisko: **Piotr Józef Bartłomiejczyk**

2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe:

- dyplom magistra matematyki, Uniwersytet Gdański, Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii, 1991;
- stopień naukowy doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki na podstawie rozprawy doktorskiej *Zagadnienia teorii macierzy połączeń* (promotor prof. dr hab. K. Gęba), Instytut Matematyczny PAN, Warszawa, 2000.

3. Dotychczasowe zatrudnienie w jednostkach naukowych:

- stanowisko asystenta w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego w latach 1991–1999,
- stanowisko adiunkta w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego w latach 2000–2011,
- stanowisko starszego wykładowcy w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego w latach 2011–2014,
- stanowisko starszego wykładowcy w Katedrze Równań Różniczkowych i Zastosowań Matematyki Politechniki Gdańskiej od 2014.

4. Osiągnięcie z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki stanowi jednotematyczny cykl publikacji pod tytułem:

„Homotopijne własności przestrzeni odwzorowań lokalnych"

Lista publikacji wchodzących w skład ww. osiągnięcia:

[H1] **P. Bartłomiejczyk**, K. Gęba, M. Izydorek, *Otopy classes of equivariant local maps*, J. Fixed Point Theory Appl. 7(1) (2010), 145–160.

[H2] **P. Bartłomiejczyk**, P. Nowak-Przygodzki, *Gradient otopies of gradient local maps*, Fund. Math. 214(1) (2011), 89–100.

[H3] **P. Bartłomiejczyk**, P. Nowak-Przygodzki, *Proper gradient otopies*, Topol. Appl. 159 (2012), 2570–2579.

[H4] **P. Bartłomiejczyk**, P. Nowak-Przygodzki, *The exponential law for partial, local and proper maps and its application to otopy theory*, Commun. Contemp. Math. 16(5) (2014), 1450005 (12 pages).

[H5] **P. Bartłomiejczyk**, P. Nowak-Przygodzki, *On the homotopy equivalence of the spaces of proper and local maps*, Cent. Eur. J. Math. 12(9) (2014), 1330–1336.

[H6] **P. Bartłomiejczyk**, *On the space of equivariant local maps*, Topol. Methods Nonlin. Anal. 45(1) (2015), 233–246.

[H7] **P. Bartłomiejczyk**, P. Nowak-Przygodzki, *The Hopf theorem for gradient local vector fields on manifolds*, New York J. Math. 21 (2015), 943–953.

Poniżej znajduje się omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników.

1. Omówienie wyników jednotematycznego cyklu publikacji [H1]–[H7]

1.1. Wstęp. Tematyka prac składających się na rozprawę ma swoje źródło w dwu nurtach badań. Pierwszy z nich dotyczy przestrzeni odwzorowań lokalnych i otopii, drugi zaś związany jest z poszukiwaniem nowych niezmienników topologicznych w klasie odwzorowań i homotopii gradientowych.

Idea badania przestrzeni odwzorowań częściowych, lokalnych i właściwych pochodzi z prac [1,26,27,33,42]. Najstarszą i jednocześnie najbardziej elementarną z wymienionych prac jest praca A. M. Abd-Allaha i R. Browna [1] z roku 1980, w której autorzy wprowadzili przestrzeń odwzorowań częściowych $\mathrm{Par}(X, Y)$, gdzie X, Y są przestrzeniami topologicznymi. Przestrzeń ta składa się z odwzorowań ciągłych $f\colon U \subset X \to Y$ określonych na otwartych podzbiorach $U \subset X$, a topologia w niej jest dostosowaną do zmieniającej się dziedziny wersją topologii zwarto-otwartej. Ponieważ, jak łatwo sprawdzić, powyższa przestrzeń jest ściągalna, o ile Y jest ściągalna, w analizie nieliniowej zastosowanie znalazła nie cała przestrzeń odwzorowań częściowych, ale jej podzbiory złożone z odwzorowań lokalnych i właściwych. Podzbiory te są także przestrzeniami topologicznymi, ale z topologiami bogatszymi niż topologia indukowana z przestrzeni odwzorowań częściowych. I to właśnie tym nowym topologiom zawdzięczają obie przestrzenie swoją użyteczność.

Przestrzeń odwzorowań właściwych, choć jedynie w odniesieniu do pól wektorowych na rozmaitości, pojawia się w pracy J. C. Beckera i D. H. Gottlieba [27] z roku 1999. Natomiast topologia w zbiorze odwzorowań lokalnych została zdefiniowana najpierw w naszej pracy [21], a następnie w pełnej ogólności w pracy [H5]. Warto podkreślić, że w pracy [H5] wprowadzamy uogólnioną definicję odwzorowania lokalnego, która obejmuje zarówno odwzorowania lokalne w starym sensie jak i odwzorowania właściwe.

Jednak dużo wcześniej, nim udało się zdefiniować topologię w zbiorze odwzorowań lokalnych, pojęcie odwzorowania lokalnego oraz bardzo użyteczne uogólnienie pojęcia homotopii nazywane otopią zostały wprowadzone i wykorzystane w pracach J. C. Beckera i D. H. Gottlieba ([26]) oraz D. H. Gottlieba i G. Samaranayake ([42]). Główna korzyść z używania tych pojęć polega na tym, że otopia łączy ze sobą odwzorowania lokalne o niekoniecznie tej samej dziedzinie, bowiem dziedzina odwzorowania może się zmieniać wzdłuż otopii. Co więcej, stopień topologiczny jest niezmiennikiem otopii, a klasy otopii pojawiają się w naturalny sposób w wielu twierdzeniach klasyfikacyjnych, co będzie jednym z głównych tematów poniższego omówienia.

Drugą ważną inspirację prac składających się na rozprawę stanowią badania dotyczące odwzorowań i homotopii gradientowych, a w szczególności artykuł A. Parusińskiego [52] z roku 1990, którego powstanie wiąże się z odkryciami dokonanymi we wcześniejszej dekadzie. Mianowicie, w połowie lat osiemdziesiątych poprzedniego stulecia E. N. Dancer podał definicję nowego niezmiennika typu stopień dla S^1-współzmienniczych odwzorowań gradientowych ([32]). Ponieważ ten nowy stopień daje więcej informacji niż zwykły stopień topologiczny, można przy jego pomocy otrzymać nowe twierdzenia o bifurkacji, których nie udałoby się uzyskać używając zwykłego stopnia.

W nawiązaniu do odkrycia Dancera pod koniec lat osiemdziesiątych zeszłego stulecia profesor K. Gęba postawił następujący problem: czy również w sytuacji bez działania grupy istnieje lepszy niezmiennik niż zwykły stopień topologiczny dla homotopii w klasie odwzorowań gradientowych? Negatywną odpowiedź na to pytanie dał we wspomnianym wyżej artykule A. Parusiński. Mianowicie udowodnił on, że jeśli dwa gradientowe pola wektorowe na dysku n-wymiarowym nieznikające na brzegu są homotopijne (mają ten sam stopień), to są również gradientowo homotopijne. Z jednej strony wynik ten stanowił pewne zaskoczenie, a z drugiej był ważnym krokiem na drodze do zrozumienia, które założenia są kluczowe dla konstrukcji nowego niezmiennika w przypadku współzmienniczym gradientowym.

Okazuje się, że problem postawiony przez profesora K. Gębę pojawia się w sposób naturalny przy rozważaniu odwzorowań lokalnych i ich klas otopii. Z tego właśnie powodu tak ważne miejsce w naszych badaniach zajmuje analiza i porównanie klas otopii gradientowych i zwykłych.

Warto zauważyć, że niezależnie od Beckera i Gottlieba pojęcia odwzorowania lokalnego i otopii wprowadzili E. N. Dancer, K. Gęba i S. Rybicki w pracy [33] z roku 2005. Co zrozumiałe, w pracy tej autorzy używają innej terminologii. Odwzorowanie lokalne nosi tam nazwę pary zwartej (parę tę tworzą odwzorowanie i jego dziedzina), a otopia nazywa się homotopią par zwartych. Pojęć tych używają autorzy jako narzędzi służących do dowodu twierdzeń o klasyfikacji współzmienniczych homotopii gradientowych.

Wszystkie prace wchodzące w skład rozprawy dotyczą przestrzeni odwzorowań lokalnych oraz jej różnych podprzestrzeni (z topologią indukowaną) składających się z odwzorowań gradientowych czy współzmienniczych. Koncentrujemy się przy tym na badaniu klas otopii odwzorowań lokalnych, czyli (jak wykażemy) składowych łukowej spójności powyższych przestrzeni. Przedstawiamy także klasyfikację różnych zbiorów klas otopii (zwykłych, gradientowych, współzmienniczych), a także naturalne związki pomiędzy różnymi zbiorami klas.

W celu zachowania przejrzystości podzielimy nasze omówienie na trzy części. W części pierwszej skupiamy się na badaniu zbioru klas otopii gradientowych.

Główne wyniki tej części dotyczą kolejno zbioru gradientowych odwzorowań lokalnych w $\mathbb{R}^n$ ([H2]), zbioru gradientowych odwzorowań właściwych w $\mathbb{R}^n$ ([H3]) oraz zbioru gradientowych pól lokalnych na rozmaitości ([H7]). Głównym tematem części drugiej jest wprowadzenie topologii w zbiorze odwzorowań lokalnych, co pozwala zinterpretować otopie jako drogi w przestrzeni odwzorowań lokalnych (podobnie jak ma to miejsce w przypadku homotopii), a także ustalić związki pomiędzy teorią otopii i homotopii. W tej części wyjaśniamy także związki pomiędzy przestrzenią odwzorowań właściwych a przestrzenią odwzorowań lokalnych (w węższym sensie) przy założeniu, że dziedziny i przeciwdziedziny tych odwzorowań są podzbiorami przestrzeni euklidesowej. Z kolei w części trzeciej zajmujemy się współzmienniczymi odwzorowaniami lokalnymi i ich otopiami. Przedstawiamy tu wersję teorii stopnia współzmienniczego sformułowaną w języku klas otopii ([H1]), a także wyniki dotyczące rozkładu zbioru klas otopii współzmienniczych na produkt indeksowany skończonym zbiorem typów orbitowych ([H6]).

Wspomnijmy na koniec, że dodatkową motywację do zajmowania się omawianą tu tematyką stanowią również prace [43,50,58,59]. Metody stosowane przez nas w dowodach twierdzeń klasyfikacyjnych nasuwają skojarzenia z przestrzeniami konfiguracji badanymi przez G. Segala i D. McDuff. Przedmiotem ich zainteresowania był m.in. typ homotopijny tychże przestrzeni. Z kolei M. Gromov w swojej monografii *Partial differential relations* nakreślił program badawczy mający na celu ustalenie relacji między przestrzenią odwzorowań i jej podprzestrzeniami określonymi warunkami zadanymi za pomocą pochodnych cząstkowych. On sam dał odpowiedź w przypadku immersji. Nasza uwaga koncentruje się zaś na gradientowości, którą można wyrazić za pomocą warunku Schwarza.

1.2. **Omówienie prac [H2], [H3] i [H7].** Wspomniane trzy artykuły są ze sobą ściśle związane. Głównym wynikiem pracy [H2] jest następująca wersja twierdzenia Parusińskiego: inkluzja zbioru gradientowych odwzorowań lokalnych w zbiór wszystkich odwzorowań lokalnych indukuje bijekcję pomiędzy odpowiednimi zbiorami klas otopii. Innymi słowy, nie ma lepszego niezmiennika w teorii gradientowych otopii niż zwykły stopień topologiczny.

Oczekiwaliśmy, że analogiczny rezultat powinien zachodzić również dla odwzorowań właściwych. Główną zaletą odwzorowań właściwych jest to, że odwzorowania te tworzą dobrą przestrzeń metryczną (w naszej sytuacji homeomorficzną z przestrzenią punktowanych odwzorowań sfery n-wymiarowej w siebie), podczas gdy w zbiorze odwzorowań lokalnych nie potrafiliśmy wtedy jeszcze określić topologii, co stanowiło istotną niedogodność z punktu widzenia teorii otopii.

Jednak, co było dla nas pewnym zaskoczeniem, okazało się, że dowód twierdzenia Parusińskiego w klasie odwzorowań właściwych znacznie się komplikuje. Mimo, że główna linia rozumowania jest w obu przypadkach podobna, dowód dla odwzorowań właściwych wymagał rozwinięcia nowych pomysłów, aby obejść liczne, choć głównie techniczne trudności. Głównym powodem tych trudności jest fakt, że założenia gradientowości i właściwości odwzorowania w pewien sposób kłócą się ze sobą, co najlepiej widać na przykładzie procedury uwłaściwienia odwzorowania i otopii, która to procedura nienaturalnie komplikuje się dla odwzorowań i otopii gradientowych.

Ostatecznie pełny dowód twierdzenia, że inkluzja przestrzeni gradientowych odwzorowań właściwych w przestrzeń wszystkich odwzorowań właściwych indukuje bijekcję pomiędzy zbiorami składowych łukowej spójności tych przestrzeni tj. pomiędzy zbiorami odpowiednich klas otopii, został zawarty w pracy [H3].

W pracach [H2] i [H3] badaliśmy odwzorowania lokalne i właściwe określone na otwartych podzbiorach $\mathbb{R}^n$ o wartościach w $\mathbb{R}^n$. Natomiast podstawowym celem pracy [H7] było uogólnienie głównego wyniku pracy [H2] na przypadek dowolnej rozmaitości riemannowskiej bez brzegu. Wspomniane uogólnienie nie jest sztuką dla sztuki, bo okazuje się, że taka właśnie sytuacja, czyli przypadek gradientowych lokalnych pól wektorowych na rozmaitości pojawia się w sposób naturalny przy analizie współzmienniczych gradientowych odwzorowań lokalnych. Mianowicie, niech V będzie ortogonalną reprezentacją zwartej grupy Liego G, a Ω otwartym niezmienniczym podzbiorem V, na którym G działa wolno. Wtedy istnieje naturalna bijekcja pomiędzy zbiorem klas otopii współzmienniczych gradientowych odwzorowań lokalnych w Ω, a zbiorem klas otopii gradientowych lokalnych pól wektorowych na rozmaitości Ω/G.

W celu precyzyjnego sformułowania powyższych rezultatów wprowadźmy następujące definicje. Ciągłe odwzorowanie $f\colon D_f \to \mathbb{R}^n$ nazywamy *lokalnym*, jeżeli D_f jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ i $f^{-1}(0)$ jest zwarty. Odwzorowanie lokalne f nazywamy *gradientowym*, jeśli istnieje funkcja $\varphi\colon D_f \to \mathbb{R}$ klasy C^1 taka, że $f = \nabla\varphi$, a *właściwym*, jeśli przeciwobrazy zbiorów zwartych są zwarte.

Rozważmy zbiór wszystkich odwzorowań lokalnych $\mathcal{F}(n)$ i następujące jego podzbiory:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\nabla(n) &:= \{f \in \mathcal{F}(n) \mid f \text{ jest gradientowe}\},\\ \mathcal{P}(n) &:= \{f \in \mathcal{F}(n) \mid f \text{ jest właściwe}\},\\ \mathcal{P}_\nabla(n) &:= \mathcal{F}_\nabla(n) \cap \mathcal{P}(n).\end{aligned}$$

Niech $I = [0, 1]$. Ciągłe odwzorowanie $h\colon \Lambda \to \mathbb{R}^n$ nazywamy *otopią*, jeśli Λ jest otwartym podzbiorem $I \times \mathbb{R}^n$ oraz $h^{-1}(0)$ jest zwarty. Mając daną otopię h możemy zdefiniować dla każdego $t \in I$ zbiory $\Lambda_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (t, x) \in \Lambda\}$ i odwzorowania $h_t\colon \Lambda_t \to \mathbb{R}^n$, gdzie $h_t(x) = h(t, x)$. Zauważmy, że h_t może być odwzorowaniem pustym.

Jeśli h jest otopią, to mówimy, że h_0 i h_1 są *otopijne*. Oczywiście, „bycie otopijnym" jest relacją równoważności w zbiorze $\mathcal{F}(n)$. Zbiór klas otopii odwzorowań lokalnych oznaczamy przez $\mathcal{F}[n]$. Zauważmy, że jeśli f jest odwzorowaniem lokalnym oraz U jest otwartym podzbiorem D_f takim, że $f^{-1}(0) \subset U$, to f i $f|_U$ są otopijne. W szczególności, jeśli $f^{-1}(0) = \emptyset$, to f jest otopijne z odwzorowaniem pustym.

Oprócz zwykłych otopii będziemy rozważali otopie, które spełniają pewne dodatkowe warunki, mianowicie

- *gradientowe* tj. $h(t,x) = \nabla_x \chi(t,x)$ dla pewnej niekoniecznie ciągłej funkcji χ takiej, że χ_t jest klasy C^1 dla każdego $t \in I$,
- *właściwe* tj. h jest właściwe,
- *właściwe gradientowe*.

Zbiory odpowiednich klas otopii w $\mathcal{F}_\nabla(n)$, $\mathcal{P}(n)$, $\mathcal{P}_\nabla(n)$ będziemy oznaczać przez $\mathcal{F}_\nabla[n]$, $\mathcal{P}[n]$, $\mathcal{P}_\nabla[n]$.

Wyjaśnimy teraz, dlaczego $\mathcal{P}(n)$ w przeciwieństwie do $\mathcal{F}(n)$ ma naturalną strukturę przestrzeni metrycznej. Niech $\Sigma^n = R^n \cup \{*\}$ oznacza jednopunktową kompaktyfikację $\mathbb{R}^n$. Jest to przestrzeń punktowana z punktem bazowym $*$. Piszemy $\mathcal{M}_*\Sigma^n$ na oznaczenie zbioru ciągłych odwzorowań punktowanych z Σ^n do Σ^n. Z każdym odwzorowaniem $f \in \mathcal{M}_*\Sigma^n$ można stowarzyszyć odwzorowanie właściwe $f\restriction_{f^{-1}(R^n)}$. Na odwrót, jeśli $f \in \mathcal{P}(n)$, to funkcja $f^+ \colon \Sigma^n \to \Sigma^n$ dana przez

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{jeśli } x \in U, \\ * & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

jest ciągła. Wynika z tego, że funkcja $\mu \colon \mathcal{P}(n) \to \mathcal{M}_*\Sigma^n$ dana wzorem

$$\mu(f) = f^+$$

jest bijekcją. Ponieważ $\mathcal{M}_*\Sigma^n$ jest wyposażona w metrykę supremum, więc $\mathcal{P}(n)$ posiada również metrykę indukowaną przez pullback.

Łatwo sprawdzić, że inkluzje odpowiednich zbiorów odwzorowań indukują następujący diagram przemienny odpowiadających im zbiorów klas otopii:

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_\nabla[n] & \xrightarrow{\mathfrak{a}} & \mathcal{P}[n] \\ {\scriptstyle\mathfrak{b}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\mathfrak{c}} \\ \mathcal{F}_\nabla[n] & \xrightarrow{\mathfrak{d}} & \mathcal{F}[n] \end{array}$$

Najkrótsze podsumowanie najważniejszych wyników prac [H2] i [H3] można sformułować następująco.

Twierdzenie 1 ([H2],[H3]). *Wszystkie funkcje w diagramie $(*)$ są bijekcjami.*

W [H2] pokazaliśmy, że funkcje $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ są surjekcjami, natomiast funkcje $\mathfrak{c}$ i $\mathfrak{d}$ są bijekcjami. Warto zaznaczyć, że nasz wynik zawiera w sobie jedną z wersji twierdzenia Parusińskiego: funkcja $\mathfrak{d}\colon \mathcal{F}_\nabla[n] \to \mathcal{F}[n]$ indukowana przez inkluzję $\mathcal{F}_\nabla(n) \hookrightarrow \mathcal{F}(n)$ jest bijekcją. Jednak nasz dowód różni się od oryginalnego dowodu Parusińskiego. Wydaje się, że nasz dowód jest prostszy, co jest wynikiem zastąpienia stałej dziedziny i homotopii przez odwzorowania lokalne i otopie. Główna trudność w dowodzie twierdzenia 1 polegała na udowodnieniu następującej wersji twierdzenia Hopfa dla gradientowych odwzorowań lokalnych ($\deg$ oznacza klasyczny stopień topologiczny).

Twierdzenie 2 ([H2]). *Funkcja* $\deg\colon \mathcal{F}_\nabla[n] \to \mathbb{Z}$ *jest bijekcją.*

Co więcej, okazuje się, że jedynie injektywność stanowi tu poważny problem.

W pracy [H3] udało nam się istotnie wzmocnić wyniki otrzymane w [H2] pokazując, że funkcje $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ również są bijekcjami. Ogólny schemat rozumowań w obydwu powyższych pracach jest podobny. Tutaj również zasadnicza trudność leży w dowodzie twierdzenia typu Hopfa, które mówi, że funkcja $\deg\colon \mathcal{P}_\nabla[n] \to \mathbb{Z}$ jest bijekcją. Jednak w przypadku odwzorowań właściwych napotkaliśmy szereg trudności technicznych wymagających wprowadzenia nowych pojęć i rozwinięcia pewnych nowych idei. Zauważmy, że fakt, że $\mathfrak{a}$ jest bijekcją można potraktować jako wersję twierdzenia Parusińskiego w klasie odwzorowań właściwych gradientowych.

W artykule [H2] pojawia się jeszcze jedna klasa odwzorowań, mianowicie odwzorowania właściwe gradientopodobne. Jednak podstawowym powodem wprowadzenia tej klasy był fakt, że w [H2] nie udało nam się jeszcze udowodnić, że funkcja $\mathfrak{a}$ jest bijekcją, więc spróbowaliśmy zdefiniować klasę odwzorowań jak najbardziej zbliżoną do właściwych gradientowych, w której twierdzenie Parusińskiego potrafimy udowodnić. Oczywiście, w świetle wyników z [H3] klasa ta straciła na znaczeniu.

Podamy teraz główne wyniki pracy [H7]. Wspomniane wyżej definicje (gradientowego) odwzorowania lokalnego i (gradientowej) otopii można łatwo uogólnić na przypadek rozmaitości (riemannowskiej). Załóżmy, że M jest spójną riemannowską rozmaitością bez brzegu. Niech $\mathcal{F}[M]$ ($\mathcal{F}^\nabla[M]$) oznacza zbiór klas (gradientowych) otopii (gradientowych) lokalnych pól wektorowych na M, a I oznacza indeks przecięcia pola wektorowego. Łatwo widać, że indeks przecięcia (podobnie jak stopień topologiczny) jest stały na klasach otopii.

Główny wynik pracy [H7] to następujące twierdzenie typu Hopfa.

Twierdzenie 3 ([H7]). *Funkcja* $\mathrm{I}\colon \mathcal{F}^\nabla[M] \to \mathbb{Z}$ *jest bijekcją.*

Zauważmy, że inkluzja przestrzeni gradientowych lokalnych pól wektorowych w przestrzeń wszystkich lokalnych pól wektorowych indukuje dobrze określoną funkcję $\Phi\colon \mathcal{F}^{\nabla}[M] \to \mathcal{F}[M]$. Bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia 3 jest następujące uogólnienie twierdzenia Parusińskiego.

Wniosek 4 ([H7]). *Funkcja Φ jest bijekcją.*

Oprócz wspomnianych wyników praca [H7] zawiera ich zastosowanie do badania współzmienniczych gradientowych odwzorowań lokalnych, co było najważniejszym powodem powyższego uogólnienia.

Załóżmy, że V jest rzeczywistą skończenie wymiarową ortogonalną reprezentacją zwartej grupy Liego G, Ω jest otwartym niezmienniczym podzbiorem V, G działa wolno na Ω oraz $M := \Omega/G$. Jak dobrze wiadomo, M jest rozmaitością riemannowską.

Niech $\mathcal{F}_G[\Omega]$ ($\mathcal{F}_G^{\nabla}[\Omega]$) oznacza zbiór klas współzmienniczych (gradientowych) otopii współzmienniczych (gradientowych) odwzorowań lokalnych. Ścisłe definicje tych pojęć z pracy [H7] sformułowane z wykorzystaniem topologii w zbiorze odwzorowań lokalnych wprowadzonej w [H4] tutaj pomijamy.

Jeśli U jest otwartym niezmienniczym podzbiorem Ω i $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ jest funkcją niezmienniczą, to $\widetilde{\varphi}$ oznacza funkcję ilorazową $\widetilde{\varphi}\colon U/G \to \mathbb{R}$. Niech funkcja $\Psi\colon \mathcal{F}_G^{\nabla}[\Omega] \to \mathcal{F}^{\nabla}[M]$ będzie dana przez $\Psi([\nabla\varphi]) = [\nabla\widetilde{\varphi}]$. Przedstawimy teraz dwa wyniki z [H7] dotyczące przypadku współzmienniczego gradientowego.

Twierdzenie 5 ([H7]). *Funkcja Ψ jest bijekcją.*

Bezpośrednim wnioskiem z twierdzeń 3 i 5 jest następujący rezultat.

Wniosek 6 ([H7]). *Istnieje naturalna bijekcja*

$$\mathcal{F}_G^{\nabla}[\Omega] \approx \sum_{\alpha} \mathbb{Z},$$

gdzie suma prosta jest indeksowana zbiorem składowych spójności α rozmaitości Ω/G.

Pracę [H7] zamyka uwaga dotycząca istotnej różnicy pomiędzy zbiorami współzmienniczych gradientowych i zwykłych współzmienniczych klas otopii. Mianowicie, w nieopublikowanej pracy [13] dowodzimy istnienia bijekcji $\mathcal{F}_G[\Omega] \approx \sum_{\alpha} \mathbb{Z}$, gdzie suma prosta indeksowana jest wszystkimi składowymi spójności rozmaitości M, ale tylko wtedy, gdy $\dim G = 0$. Jeśli $\dim G > 0$, to zbiór $\mathcal{F}_G[\Omega]$ jest jednoelementowy. W konsekwencji funkcja $\mathcal{F}_G^{\nabla}[\Omega] \to \mathcal{F}_G[\Omega]$ indukowana przez inkluzję jest bijekcją, gdy $\dim G = 0$, natomiast zbiory $\mathcal{F}_G^{\nabla}[\Omega]$ i $\mathcal{F}_G[\Omega]$ są istotnie różne, gdy $\dim G > 0$. Tym samym analogia z twierdzeniem Parusińskiego występuje tylko, gdy $\dim G = 0$.

1.3. **Omówienie prac [H4] i [H5].** Głównym celem pracy [H4] jest wprowadzenie topologii w zbiorze odwzorowań lokalnych oraz dowód prawa wykładniczego dla odwzorowań lokalnych oraz właściwych. Ponadto w pracy tej pokazujemy, że inkluzja przestrzeni odwzorowań właściwych w przestrzeń odwzorowań lokalnych jest słabą homotopijną równoważnością, jeżeli ograniczymy się do odwzorowań lokalnych z dziedzinami w $\mathbb{R}^{n+k}$ i o wartościach w $\mathbb{R}^n$. Przypomnijmy, że typ homotopijny przestrzeni odwzorowań właściwych jest dobrze znany.

Z kolei główny wynik pracy [H5] mówi, że przestrzenie powyższe nie są jednak homotopijnie równoważne dla $n > 1$. Przypadek $n = 1$ pozostaje nadal otwartym problemem.

Warto tu zaznaczyć, że pierwszą próbę zdefiniowania topologii w zbiorze odwzorowań lokalnych podjęliśmy w artykule [21]. W pracy tej również dowodzimy prawa wykładniczego, a następnie korzystając z prawa wykładniczego przedstawiamy interesujący opis (z dokładnością do homeomorfizmu) przestrzeni odwzorowań lokalnych jako zwykłej przestrzeni odwzorowań tj. przestrzeni odwzorowań z jedną ustaloną dziedziną.

Szybko po opublikowaniu [21] zdaliśmy sobie jednak sprawę, że prezentowany tam sposób ujęcia tematu, mimo że logiczne poprawny, posiada dwa istotne ograniczenia. Po pierwsze, okazuje się, że klasę odwzorowań lokalnych z [21] można tak rozszerzyć, aby obejmowała również odwzorowania częściowe i właściwe. Co więcej, również topologię w przestrzeni odwzorowań lokalnych (w nowym, szerszym sensie) można tak zdefiniować, aby otrzymać znane wcześniej przestrzenie odwzorowań częściowych (patrz [1]) i właściwych (patrz [H2]) jako szczególne (w pewnym sensie ekstremalne) przypadki przestrzeni odwzorowań lokalnych w uogólnionym sensie. Dzięki temu uzyskujemy szersze spojrzenie na teorię otopii i unikamy rozpatrywania oddzielnych przypadków. Po drugie, okazuje się, że proste odwrócenie (w stosunku do [21]) kolejności dowodzenia twierdzeń, mianowicie najpierw opis przestrzeni odwzorowań lokalnych jako zwykłej przestrzeni odwzorowań, a potem dowód prawa wykładniczego, mocno upraszcza dowody, ponieważ pozwala skorzystać z prawa wykładniczego w wersji klasycznej, tj. dla odwzorowań o stałej dziedzinie. Z tych właśnie powodów zdecydowaliśmy się zamieścić to nowe, jednocześnie uogólnione (jeśli chodzi o definicje) i uproszczone (jeśli chodzi o dowody) podejście w pracy [H4]. Ponadto praca [H4] zawiera rozdział dotyczący otopii w przestrzeniach euklidesowych, który nie ma odpowiednika w pracy [21].

Przejdźmy teraz do podania niezbędnych definicji i ścisłego sformułowania najważniejszych wyników prac [H4] i [H5]. Zapis $A \Subset B$ oznacza, że A jest zwartym podzbiorem B. Dla przestrzeni topologicznej X oznaczamy przez $\tau(X)$ topologię w X. Przypomnijmy, że jeśli A, B są przestrzeniami topologicznymi, to $\mathrm{Map}(A, B)$ oznacza zbiór wszystkich odwzorowań ciągłych z A do B wyposażony w zwykłą topologię zwarto-otwartą. Ponadto, dla punktowanych przestrzeni topologicznych

A i B niech $\mathrm{Map}_*(A, B)$ będzie podprzestrzenią przestrzeni $\mathrm{Map}(A, B)$ składającą się z odwzorowań zachowujących punkt bazowy.

Dla dowolnej przestrzeni topologicznej X oraz $* \notin X$ niech $\widetilde{X}$ oznacza zbiór $X \cup \{*\}$. Będziemy rozważać różne topologie na $\widetilde{X}$. Niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną podzbiorów przestrzeni X. Będziemy oznaczać przez $X^+_{\mathcal{R}}$ zbiór $\widetilde{X}$ z topologią generowaną przez podbazę

$$\mathcal{S} := \tau(X) \cup \{\widetilde{X}\} \cup \{\widetilde{X} \setminus R \mid R \in \mathcal{R}\}.$$

Jeśli $\mathcal{R} = \emptyset$, to będziemy skracać zapis $X^+_{\mathcal{R}}$ do X^+, a jeśli $\mathcal{K} := \{K \mid K \Subset X\}$, to będziemy skracać zapis $X^+_{\mathcal{K}}$ do X^*. Zauważmy, że jeśli X jest Hausdorffa, to X^* jest zwykłą jednopunktową kompaktyfikacją.

Dla dowolnych przestrzeni topologicznych X i Y niech $\mathrm{Par}(X, Y)$ będzie zbiorem wszystkich odwzorowań ciągłych $f\colon D_f \to Y$ takich, że D_f jest otwartym podzbiorem przestrzeni X. Elementy zbioru $\mathrm{Par}(X, Y)$ nazywamy *odwzorowaniami częściowymi*. W zbiorze $\mathrm{Par}(X, Y)$ wprowadzamy topologię zwarto-otwartą, tj. generowaną przez podbazę złożoną ze zbiorów

$$H(C, U) = \{ f \in \mathrm{Par}(X, Y) \mid C \subset D_f,\ f(C) \subset U \}$$

dla $C \Subset X$ i $U \in \tau(Y)$. Zauważmy, że przestrzeń $\mathrm{Par}(X, Y)$ nie jest T_1, ponieważ jedynym otoczeniem odwzorowania pustego jest cała przestrzeń $\mathrm{Par}(X, Y)$.

Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi i $\mathcal{R}$ będzie rodziną podzbiorów przestrzeni Y. Definiujemy

$$\mathrm{Loc}(X, Y, \mathcal{R}) := \{ f \in \mathrm{Par}(X, Y) \mid f^{-1}(R) \Subset D_f \text{ dla każdego } R \in \mathcal{R} \}.$$

W zbiorze $\mathrm{Loc}(X, Y, \mathcal{R})$ wprowadzamy topologię generowaną przez podbazę składającą się ze wszystkich zbiorów postaci

- $H(C, U) := \{ f \in \mathrm{Loc}(X, Y, \mathcal{R}) \mid C \subset D_f,\ f(C) \subset U \}$ dla $C \Subset X$ i $U \in \tau(Y)$,
- $M(V, R) := \{ f \in \mathrm{Loc}(X, Y, \mathcal{R}) \mid f^{-1}(R) \subset V \}$ dla $V \in \tau(X)$ i $R \in \mathcal{R}$.

Elementy przestrzeni $\mathrm{Loc}(X, Y, \mathcal{R})$ nazywamy *odwzorowaniami lokalnymi*. Naturalnym punktem bazowym przestrzeni $\mathrm{Loc}(X, Y, \mathcal{R})$ jest odwzorowanie puste.

Możemy już sformułować podstawowe wyniki pracy [H4]. Zacznijmy od opisu przestrzeni odwzorowań lokalnych jako zwykłej przestrzeni odwzorowań.

Stwierdzenie 1 ([H4]). *Jeśli X jest lokalnie zwarta Hausdorffa, to funkcja*

$$\kappa\colon \mathrm{Loc}(X, Y, \mathcal{R}) \to \mathrm{Map}_*(X^*, Y^+_{\mathcal{R}})$$

dana przez $\kappa(f) := f^+$, gdzie

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{jeśli } x \in D_f, \\ * & \textit{w przeciwnym wypadku}, \end{cases}$$

jest homeomorfizmem.

Zauważmy, że $\mathrm{Loc}(X, Y, \mathcal{R}) = \mathrm{Par}(X, Y)$, jeśli $\mathcal{R} = \emptyset$ lub $\mathcal{R} = \{\emptyset\}$. Z kolei jeśli $\mathcal{R} \neq \emptyset$ i $\mathcal{R} \neq \{\emptyset\}$, to inkluzja $\mathrm{Loc}(X, Y, \mathcal{R}) \hookrightarrow \mathrm{Par}(X, Y)$ jest ciągła, ale topologia w $\mathrm{Loc}(X, Y, \mathcal{R})$ jest bogatsza niż topologia indukowana.

W dalszym ciągu będziemy szczególnie zainteresowani przypadkiem, gdy $\mathcal{R} = \{\{y\}\}$ dla pewnego $y \in Y$. W tym przypadku będziemy pisać $\mathrm{Loc}(X, Y, y)$ opuszczając podwójne nawiasy klamrowe.

Przypomnijmy, że odwzorowanie pomiędzy przestrzeniami topologicznymi nazywamy *właściwym*, jeżeli przeciwobrazy zbiorów zwartych są zwarte. Niech X i Y będą przestrzeniami topologicznymi. Definiujemy

$$\mathrm{Prop}(X, Y) := \mathrm{Loc}(X, Y, \mathcal{K}),$$

gdzie $\mathcal{K} := \{K \mid K \Subset Y\}$. Łatwo widać, że (jako zbiór)

$$\mathrm{Prop}(X, Y) = \{\, f \in \mathrm{Par}(X, Y) \mid f \text{ jest właściwe} \,\}.$$

Kolejny wynik jest wnioskiem ze stwierdzenia 1.

Stwierdzenie 2 ([H4]). *Załóżmy, że X jest lokalnie zwarta Hausdorffa. Wtedy funkcja*

$$\kappa\colon \mathrm{Prop}(X, Y) \to \mathrm{Map}_*(X^*, Y^*),$$

dana tym samym wzorem co w poprzednim stwierdzeniu, jest homeomorfizmem.

Podamy teraz sformułowanie prawa wykładniczego dla odwzorowań lokalnych.

Twierdzenie 3 ([H4]). *Jeżeli Z i X są lokalnie zwarte Hausdorffa, to funkcja wykładnicza*

$$\theta\colon \mathrm{Loc}(Z \times X, Y, \mathcal{R}) \to \mathrm{Map}_*\left(Z^*, \mathrm{Loc}(X, Y, \mathcal{R})\right)$$

dana przez $\theta(h) = h^*$, gdzie $h^*(t)(x) = h(t, x)$, jest homeomorfizmem.

W zastosowaniach szczególnie przydatny jest następujący wniosek z twierdzenia 3.

Wniosek 4 ([H4]). *Jeżeli Z jest zwarta Hausdorffa i X jest lokalnie zwarta Hausdorffa, to funkcja wykładnicza*

$$\theta\colon \mathrm{Loc}(Z \times X, Y, \mathcal{R}) \to \mathrm{Map}\left(Z, \mathrm{Loc}(X, Y, \mathcal{R})\right)$$

jest homeomorfizmem.

Omówimy teraz krótko wyniki z prac [H4] i [H5] dotyczące odwzorowań lokalnych w przestrzeniach euklidesowych. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\mathcal{F}(n, k) := \mathrm{Loc}(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^n, 0),$$

$$\mathcal{P}(n, k) := \mathrm{Prop}(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^n).$$

Będziemy skracać zapis $\mathcal{F}(n,0)$ ($\mathcal{P}(n,0)$) do $\mathcal{F}(n)$ ($\mathcal{P}(n)$). Ponadto będziemy oznaczać przez $\mathcal{F}_\alpha(n,k)$ ($\mathcal{P}_\alpha(n,k)$) tę składową przestrzeni $\mathcal{F}(n,k)$ ($\mathcal{P}(n,k)$), która zawiera odwzorowanie α (piszemy 0 dla oznaczenia odwzorowania pustego).

Niech $S_0^n := (\mathbb{R}^n)^+_{\mathcal{R}}$, gdzie $\mathcal{R} = \{\{0\}\}$. Na mocy prawa wykładniczego istnieją naturalne homeomorfizmy

$$\mathcal{P}(n,k) \approx \Omega^{n+k}(S^n) \quad \text{oraz} \quad \mathcal{F}(n,k) \approx \Omega^{n+k}(S_0^n).$$

W szczególności $\mathcal{P}(n) \approx \Omega^n(S^n)$ oraz $\mathcal{F}(n) \approx \Omega^n(S_0^n)$.

Związek pomiędzy przestrzeniami odwzorowań właściwych i lokalnych (w węższym sensie) wyjaśniają dwa twierdzenia. Pierwsze zostało udowodnione w [H4], drugie jest głównym wynikiem pracy [H5].

Twierdzenie 5 ([H4]). *Inkluzja $\mathcal{P}(n,k) \hookrightarrow \mathcal{F}(n,k)$ jest słabą homotopijną równoważnością.*

Twierdzenie 6 ([H5]). *Jeśli $n > 1$ oraz $k \geq 0$, to przestrzenie $\mathcal{P}_0(n,k)$ i $\mathcal{F}_0(n,k)$ nie są homotopijnie równoważne.*

Topologia w przestrzeni odwzorowań lokalnych oraz prawo wykładnicze dla odwzorowań lokalnych pozwalają na eleganckie i przejrzyste sformułowanie podstaw teorii otopii w przypadku euklidesowym, co jest częścią pracy [H4].

Niech $I = [0,1]$. Dowolny element przestrzeni $\mathrm{Loc}(I \times \mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^n, 0)$ nazywamy *otopią*, a dowolny element przestrzeni $\mathrm{Prop}(I \times \mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^n)$ nazywamy *otopią właściwą*. Na mocy prawa wykładniczego istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy otopiami (właściwymi) a drogami w przestrzeni $\mathcal{F}(n,k)$ ($\mathcal{P}(n,k)$).

Mając daną otopię (właściwą) $h\colon \Lambda \to \mathbb{R}^n$ możemy zdefiniować dla każdego $t \in I$ zbiory $\Lambda_t = \{x \in \mathbb{R}^{n+k} \mid (t,x) \in \Lambda\}$ i odwzorowania $h_t\colon \Lambda_t \to \mathbb{R}^n$, gdzie $h_t(x) = h(t,x)$. Jeśli h jest otopią (właściwą), to mówimy, że h_0 i h_1 są *(właściwie) otopijne*. Oczywiście, otopie (właściwe) zadają relację równoważności w $\mathcal{F}(n,k)$ ($\mathcal{P}(n,k)$). Zbiory klas otopii (właściwej) oznaczamy przez $\mathcal{F}[n,k]$ ($\mathcal{P}[n,k]$).

Kluczem do dowodu Twierdzenia 5 jest następujący fakt.

Stwierdzenie 7 ([H4]). *Funkcja $\mathcal{P}[n,k] \to \mathcal{F}[n,k]$ indukowana przez inkluzję jest bijekcją.*

Na koniec zauważmy, że na mocy prawa wykładniczego otrzymujemy następujące kanoniczne izomorfizmy:

$$\mathcal{P}[n,k+m] \approx \pi_m\left(\mathcal{P}_0(n,k)\right) \approx \pi_{m+k}(S^n),$$
$$\mathcal{F}[n,k+m] \approx \pi_m\left(\mathcal{F}_0(n,k)\right) \approx \pi_{m+k}(S_0^n)$$

dla $m > 0$.

1.4. Omówienie prac [H1] i [H6]. W pracach [H1] i [H6] badamy zbiory klasy otopii współzmienniczej (zwykłej i gradientowej) odwzorowań lokalnych w przypadku rzeczywistej skończenie wymiarowej ortogonalnej reprezentacji zwartej grupy Liego G. Artykuł [H1] jest najstarszą pracą cyklu publikacji składających się na rozprawę i pochodzi z roku 2010. Rozważamy w niej zbiór odwzorowań lokalnych, gdyż topologia w tym zbiorze została wprowadzona, jak już wiemy, dopiero w pracy [H4] z roku 2014. Głównym celem pracy [H1] jest przedstawienie rozszerzenia teorii stopnia topologicznego na współzmiennicze odwzorowania lokalne zarówno w przypadku gradientowym, jak i niegradientowym, oraz wyjaśnienie zależności pomiędzy tymi dwoma uogólnieniami.

Z kolei w pracy [H6] wprowadzamy przestrzeń współzmienniczych odwzorowań lokalnych i badamy podstawowe jej własności. W szczególności prezentujemy pełny dowód twierdzenia o rozkładzie zbioru klas G-otopii współzmienniczych odwzorowań lokalnych według typów orbitowych domkniętych podgrup grupy G.

Podamy teraz ścisłe sformułowania podstawowych wyników prac [H1] i [H6]. Niech G będzie zwartą grupą Liego, a H jej domkniętą podgrupą. Przez (H) oznaczamy klasę sprzężoności podgrupy H, a przez WH jej grupę Weyla, tj. grupę ilorazową NH/H, gdzie NH jest normalizatorem H w G. Będziemy używać następujących oznaczeń:

$$\begin{aligned}
\Phi(G) &= \{\, (H) \mid H \text{ jest domkniętą podgrupą grupy } G \,\},\\
\Phi_k(G) &= \{\, (H) \in \Phi(G) \mid \dim WH = k \,\},\\
\Phi_{k,\beta}(G) &= \{\, (H) \in \Phi_k(G) \mid WH \text{ jest biorientowalna} \,\},\\
\Phi_{k,\nu}(G) &= \{\, (H) \in \Phi_k(G) \mid WH \text{ nie jest biorientowalna} \,\}.
\end{aligned}$$

Wolna grupa abelowa $U(G)$ generowana przez $\Phi(G)$ dopuszcza naturalną strukturę pierścienia opisaną przez T. tom Diecka w [61] i nosi nazwę *pierścienia Eulera*. Jej podgrupa $A(G)$ generowana przez $\Phi_0(G)$ z mnożeniem zdefiniowanym w podobny sposób nosi nazwę *pierścienia Burnside'a*. Naturalne rzutowanie

$$\iota\colon U(G) \to A(G)$$

jest homomorfizmem grup, który na ogół nie zachowuje struktury pierścienia.

Dodatkowo zdefiniujmy

$$A_k(G) := \bigoplus_{(H)\in\Phi_{k,\beta}(G)} \mathbb{Z} \;\oplus \bigoplus_{(H)\in\Phi_{k,\nu}(G)} \mathbb{Z}_2 \qquad \text{dla } k = 0, 1, \ldots, \dim G.$$

Niech V będzie rzeczywistą skończenie wymiarową ortogonalną reprezentacją zwartej grupy Liego G, a $\mathbb{R}^k$ oznacza trywialną reprezentację grupy G. *Odwzorowaniem lokalnym* w $V \oplus \mathbb{R}^k$ nazywamy parę (f, U) składającą się z otwartego niezmienniczego zbioru $U \subset V \oplus \mathbb{R}^k$ i współzmienniczego ciągłego odwzorowania $f\colon U \to V$

takiego, że $f^{-1}(0)$ jest zwarty. Oznaczmy przez $\mathcal{F}(V \oplus \mathbb{R}^k)$ zbiór wszystkich odwzorowań lokalnych w $V \oplus \mathbb{R}^k$. Zakładamy, że G działa trywialnie na $I = [0,1]$. *Otopią* w $V \oplus \mathbb{R}^k$ nazywamy parę (h, Ω) składającą się z otwartego niezmienniczego zbioru $\Omega \subset (V \oplus \mathbb{R}^k) \times I$ i współzmienniczego ciągłego odwzorowania $h \colon \Omega \to V$ takiego, że $h^{-1}(0)$ jest zwarty. Oznaczmy przez $\mathcal{O}(V \oplus \mathbb{R}^k)$ zbiór wszystkich otopii w $V \oplus \mathbb{R}^k$.

W szczególnym przypadku $k = 0$ mówimy, że $(f, U) \in \mathcal{F}(V)$ jest *gradientowe*, jeśli istnieje niezmiennicza funkcja $\varphi \colon U \to \mathbb{R}$ klasy C^1 taka, że $f = \nabla\varphi$. Podobnie, mówimy, że $(h, \Omega) \in \mathcal{O}(V)$ jest *gradientową otopią*, jeśli istnieje niezmiennicza funkcja $\psi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ klasy C^1 taka, że $h(x,t) = \nabla\psi_t(x)$, gdzie $\psi_t(x) = \psi(x,t)$. Oznaczmy przez $\mathcal{F}^\nabla(V)$ podzbiór $\mathcal{F}(V)$ składający się ze wszystkich gradientowych odwzorowań lokalnych, a przez $\mathcal{O}^\nabla(V)$ podzbiór $\mathcal{O}(V)$ składający się ze wszystkich gradientowych otopii. Dla $(h, \Omega) \in \mathcal{O}(V \oplus \mathbb{R}^k)$ oraz $t \in [0,1]$ kładziemy $(h, \Omega)_t := (h_t, \Omega_t)$, gdzie $\Omega_t := \{x \in V \oplus \mathbb{R}^k ; (x,t) \in \Omega\}$ oraz $h_t(x) = h(x,t)$. Mówimy, że (h, Ω) jest otopią z (h_0, Ω_0) do (h_1, Ω_1).

Sformułujemy teraz dwa najważniejsze wyniki pracy [H1].

Twierdzenie 1 ([H1]). *Istnieją dwie funkcje:*

(a) $\mathbf{deg}_G$ *przyporządkowująca każdemu* $(f, U) \in \mathcal{F}(V)$ *element* $\mathbf{deg}_G(f, U) \in A(G)$;

(u) $\mathbf{deg}_G^\nabla$ *przyporządkowująca każdemu* $(f, U) \in \mathcal{F}^\nabla(V)$ *element* $\mathbf{deg}_G^\nabla(f, U) \in U(G)$.

Funkcje te mają następujące własności.

(1) $\iota(\mathbf{deg}_G^\nabla(f, U)) = \mathbf{deg}_G(f, U)$ *dla* $(f, U) \in \mathcal{F}^\nabla(V)$.

(2) (a) $\mathbf{deg}_G(h_0, \Omega_0) = \mathbf{deg}_G(h_1, \Omega_1)$ *dla* $(h, \Omega) \in \mathcal{O}(V)$,
(u) $\mathbf{deg}_G^\nabla(h_0, \Omega_0) = \mathbf{deg}_G^\nabla(h_1, \Omega_1)$ *dla* $(h, \Omega) \in \mathcal{O}^\nabla(V)$.

(3) *Załóżmy, że* $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. *Wtedy*

(a) *jeśli* $(f_1, U_1), (f_2, U_2) \in \mathcal{F}(V)$, *to*

$$\mathbf{deg}_G(f_1 \sqcup f_2, U_1 \cup U_2) = \mathbf{deg}_G(f_1, U_1) + \mathbf{deg}_G(f_2, U_2).$$

(u) *jeśli* $(f_1, U_1), (f_2, U_2) \in \mathcal{F}^\nabla(V)$, *to*

$$\mathbf{deg}_G^\nabla(f_1 \sqcup f_2, U_1 \cup U_2) = \mathbf{deg}_G^\nabla(f_1, U_1) + \mathbf{deg}_G^\nabla(f_2, U_2),$$

gdzie $(f_1 \sqcup f_2)(x) = f_1(x)$ *dla* $x \in U_1$ *i* $(f_1 \sqcup f_2)(x) = f_2(x)$ *dla* $x \in U_2$.

(4) *Niech* $f \colon U \to V$ *będzie klasy* C^1. *Załóżmy, że* $f^{-1}(0) = Ga$ *dla pewnego* $a \in U$ *i* $Df(a)(v) = v$ *dla wszystkich* $v \in (T_a(Ga))^\perp$. *Wtedy*

(a)

$$\mathbf{deg}_G(f, U) = \begin{cases} (G_a), & \textit{jeśli} \quad (G_a) \in \Phi_0(G), \\ 0, & \textit{jeśli} \quad (G_a) \notin \Phi_0(G), \end{cases}$$

(u)

$$\mathbf{deg}_G^\nabla(f, U) = (G_a).$$

Twierdzenie 2 ([H1]). *Istnieje funkcja* $\mathbf{deg}_G^k$ *przyporządkowująca każdemu* $(f, U) \in \mathcal{F}(V \oplus \mathbb{R}^k)$ *element* $\mathbf{deg}_G^k(f, U) \in A_k(G)$ *o następujących własnościach.*

(1) $\mathbf{deg}_G^k(h_0, \Omega_0) = \mathbf{deg}_G^k(h_1, \Omega_1)$ *dla* $(h, \Omega) \in \mathcal{O}(V \oplus \mathbb{R}^k)$.

(2) *Jeśli* $(f_1, U_1), (f_2, U_2) \in \mathcal{F}(V \oplus \mathbb{R}^k)$ *i* $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, *to*

$$\mathbf{deg}_G^k(f_1 \sqcup f_2, U_1 \cup U_2) = \mathbf{deg}_G^k(f_1, U_1) + \mathbf{deg}_G^k(f_2, U_2),$$

gdzie $(f_1 \sqcup f_2)(x) = f_1(x)$ *dla* $x \in U_1$ *i* $(f_1 \sqcup f_2)(x) = f_2(x)$ *dla* $x \in U_2$.

(3) *Niech* $f \colon U \to V$ *będzie klasy* C^1. *Załóżmy, że* $f^{-1}(0) = Ga$ *dla pewnego* $a \in U$ *i* $Df(a)(v) = v$ *dla każdego* $v \in (T_a(Ga))^{\perp}$. *Wtedy*

$$\mathbf{deg}_G^k(f, U) = \begin{cases} (G_a), & \textit{jeśli} \quad (G_a) \in \Phi_k(G), \\ 0, & \textit{jeśli} \quad (G_a) \notin \Phi_k(G). \end{cases}$$

Przejdźmy do przedstawienia najważniejszych wyników pracy [H6]. Zacznijmy od wprowadzenia oznaczeń. Załóżmy, że V jest rzeczywistą skończenie wymiarową ortogonalną reprezentacją zwartej grupy Liego G oraz H jest domkniętą podgrupą grupy G. Przypomnijmy, że $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$. Niech Ω będzie otwartym niezmienniczym podzbiorem V. Definiujemy następujące podzbiory Ω:

$$\Omega^H = \{x \in \Omega \mid H \subset G_x\},$$
$$\Omega_H = \{x \in \Omega \mid H = G_x\},$$
$$\Omega_{(H)} = \{x \in X \mid (H) = (G_x)\}.$$

Niech

$$\Phi(G) = \{(H) \mid H \text{ jest domkniętą podgrupą grupy } G\},$$
$$\mathrm{Iso}(\Omega) = \{(H) \in \Phi(G) \mid \Omega_{(H)} \neq \emptyset\}.$$

Zbiór $\mathrm{Iso}(\Omega)$ jest częściowo uporządkowany. Mianowicie, $(H) \leq (K)$, jeśli H jest sprzężone z pewną podgrupą grupy K. W poniższych rozważaniach będziemy korzystać z następujących dobrze znanych faktów:

- $\mathrm{Iso}(\Omega)$ jest skończony,
- WH jest zwartą grupą Liego,
- V^H jest podprzestrzenią liniową V i ortogonalną reprezentacją grupy WH,
- działanie WH na Ω_H jest wolne,
- Ω_H jest otwarty i gęsty w Ω^H,
- $\Omega_{(H)}$ jest G-niezmienniczą podrozmaitością Ω,
- $\Omega_{(H)} = G\Omega_H$ i Ω_H jest domknięty w $\Omega_{(H)}$,
- jeśli (H) jest maksymalny w $\mathrm{Iso}(\Omega)$, to $\Omega_{(H)}$ jest domknięty w Ω.

Przypomnijmy, że jeśli X, Y są przestrzeniami topologicznymi i $\mathcal{R}$ jest rodziną podzbiorów przestrzeni Y, to $\mathrm{Loc}(X, Y, \mathcal{R})$ ($\mathrm{Prop}(X, Y)$) oznacza przestrzeń odwzorowań lokalnych (właściwych) wprowadzoną w pracy [H4]. Odwołanie się do artykułu [H4] pozwoliło na eleganckie i ścisłe ujęcie podstaw teorii otopii w przypadku współzmienniczym. Mianowicie, załóżmy, że X, Y są G-przestrzeniami. Niech $\mathrm{Loc}_G(X, Y, \mathcal{R})$ ($\mathrm{Prop}_G(X, Y)$) będzie podprzestrzenią przestrzeni $\mathrm{Loc}(X, Y, \mathcal{R})$ ($\mathrm{Prop}(X, Y)$) składającą się z odwzorowań współzmienniczych o niezmienniczych dziedzinach i wyposażoną w topologię indukowaną.

Niech Ω będzie otwartym niezmienniczym podzbiorem $\mathbb{R}^k \oplus V$. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\mathcal{F}_G(\Omega) := \mathrm{Loc}_G(\Omega, V, 0),$$
$$\mathcal{P}_G(\Omega) := \mathrm{Prop}_G(\Omega, V).$$

Niech $I = [0, 1]$. Załóżmy, że działanie G na I jest trywialne. Każdy element $\mathrm{Loc}_G(I \times \Omega, V, 0)$ nazywamy *otopią*, a każdy element $\mathrm{Prop}_G(I \times \Omega, V)$ nazywamy *otopią właściwą*.

Mając daną otopię (właściwą) $h\colon \Lambda \subset I \times \Omega \to V$ możemy zdefiniować dla każdego $t \in I$ zbiory $\Lambda_t = \{x \in \Omega \mid (t, x) \in \Lambda\}$ oraz odwzorowania $h_t\colon \Lambda_t \to V$, gdzie $h_t(x) = h(t, x)$. Jeśli h jest otopią (właściwą), to mówimy, że h_0 i h_1 są *(właściwie) otopijne*. Oczywiście otopie (właściwe) zadają relację równoważności w $\mathcal{F}_G(\Omega)$ ($\mathcal{P}_G(\Omega)$). Zbiór klas otopii (właściwej) oznaczamy przez $\mathcal{F}_G[\Omega]$ ($\mathcal{P}_G[\Omega]$).

W początkowej części pracy [H6] formułujemy następujące rezultaty dotyczące zbiorów klas współzmienniczej otopii.

Twierdzenie 3 ([H6]). *Funkcja $\mathcal{P}_G[\Omega] \to \mathcal{F}_G[\Omega]$ indukowana przez inkluzję jest bijekcją.*

Twierdzenie 4 ([H6]). *Inkluzja $\mathcal{P}_G(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{F}_G(\Omega)$ jest słabą homotopijną równoważnością.*

Twierdzenie 5 ([H6]). *Jeżeli $\dim G > 0$, Ω jest otwartym niezmienniczym podzbiorem V oraz G działa wolno na Ω, to zbiór $\mathcal{F}_G[\Omega]$ jest jednoelementowy.*

Kolejnym podstawowym celem pracy [H6] było wykazanie, że przy założeniu, że (H) jest maksymalny w $\mathrm{Iso}(\Omega)$, istnieje naturalna bijekcja pomiędzy zbiorami $\mathcal{F}_G[\Omega]$ oraz $\mathcal{F}_{WH}[\Omega_H] \times \mathcal{F}_G\left[\Omega \setminus \Omega_{(H)}\right]$. Naiwne podejście sugeruje, aby zdefiniować tę bijekcję biorąc po prostu klasy otopii odpowiednich obcięć, tzn. za pomocą wzoru

$$[f] \mapsto \left(\left[f\restriction_{D_f \cap \Omega_H}\right], \left[f\restriction_{D_f \setminus \Omega_{(H)}}\right]\right).$$

Niestety $f\restriction_{D_f \setminus \Omega_{(H)}}$ może nie mieć zwartego zbioru zer. Z tego powodu zaburzamy najpierw f w jego klasie otopii tak, aby obcięcie zaburzenia do zbioru $D_f \setminus \Omega_{(H)}$ było współzmienniczym odwzorowaniem lokalnym. Nasze zaburzenie nie zmienia f na $\Omega_{(H)}$ i odsuwa zera o maksymalnym typie orbitowym od pozostałych zer odwzorowania f. Ścisłą definicję powyższej procedury podaną w pracy [H6] tutaj pomijamy, ponieważ jest wieloetapowa i wymaga wprowadzenia dużej ilości dodatkowych oznaczeń. Sformułujmy jednak sam wynik.

Twierdzenie 6 ([H6]). *Jeśli (H) jest maksymalny w $\mathrm{Iso}(\Omega)$, to istnieje naturalna bijekcja* $\Theta\colon \mathcal{F}_G[\Omega] \to \mathcal{F}_{WH}[\Omega_H] \times \mathcal{F}_G\left[\Omega \setminus \Omega_{(H)}\right]$.

Pracę [H6] zamyka seria rezultatów będących konsekwencjami twierdzenia 6, a dotyczących rozkładów zbiorów klas współzmienniczej otopii i homotopii. Załóżmy, że V jest rzeczywistą skończenie wymiarową ortogonalną reprezentacją zwartej grupy Liego G i Ω jest otwartym niezmienniczym podzbiorem $\mathbb{R}^k \oplus V$. Niech $\mathrm{Iso}_k(\Omega) := \{(H) \in \mathrm{Iso}(\Omega) \mid \dim WH \leq k\}$. Jak wiadomo, zbiór $\mathrm{Iso}(\Omega)$ jest skończony, więc również zbiór $\mathrm{Iso}_k(\Omega)$ jest skończony. Niech S^{k+V} i S^V oznaczają *sfery reprezentacji*, tj. jednopunktowe kompaktyfikacje odpowiednio reprezentacji $\mathbb{R}^k \oplus V$ i V. Zbiór klas G-homotopii punktowanych współzmienniczych odwzorowań pomiędzy S^{k+V} i S^V będziemy oznaczać $[S^{k+V}; S^V]_G^*$. Przypomnijmy, że jeśli X, Y są G-przestrzeniami i A (B) jest G-podprzestrzenią X (Y), to zbiór klas relatywnych G-homotopii G-odwzorowań z (X, A) do (Y, B) oznaczamy przez $[X, A; Y, B]_G$.

Twierdzenie 7 ([H6]). *Istnieją naturalne bijekcje*

$$\mathcal{F}_G[\Omega] \approx \prod_{(H)} \mathcal{F}_{WH}[\Omega_H], \tag{1}$$

$$\mathcal{P}_G[\Omega] \approx \prod_{(H)} \mathcal{P}_{WH}[\Omega_H], \tag{2}$$

$$\left[S^{k+V}; S^V\right]_G^* \approx \prod_{(H)} \left[S^{k+V^H}, S^{k+V^H} \setminus (\mathbb{R}^k \times V_H); S^{V^H}, *\right]_{WH}, \tag{3}$$

gdzie produkty są indeksowane elementami zbioru $\mathrm{Iso}_k(\Omega)$.

Zaznaczmy, że główny ciężar dowodu twierdzenia 7 spoczywa na twierdzeniu 6.

Zauważmy, że przypadek działania trywialnego pokrywają prace [H2] i [H4]. Mianowicie, jeżeli G działa trywialnie na V i Ω jest otwartym podzbiorem V, to

$$\mathcal{F}_G[\Omega] = \mathcal{F}_{\{e\}}[\Omega] \approx \sum_{\alpha} \mathbb{Z},$$

gdzie suma prosta przebiega wszystkie składowe spójności α zbioru Ω. Podobnie, jeśli G działa trywialnie na $\mathbb{R}^{n+k}$, to

$$\mathcal{F}_G\left[\mathbb{R}^{n+k}\right] = \mathcal{F}_{\{e\}}\left[\mathbb{R}^{n+k}\right] \approx \pi_{n+k}(S^n).$$

Dokładniejszy opis zbioru $\mathcal{F}_G[\Omega]$ oparty na wzorze (1) i szczegółowej analizie czynników $\mathcal{F}_{WH}[\Omega_H]$ znajduje się w nieopublikowanej jeszcze pracy [13], która kontynuuje i rozwija podejście prezentowane w [H6].

2. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

2.1. Prace dotyczące teorii indeksu Conleya. Tematyce związanej z teorią indeksu Conleya poświęcone są dwie prace poprzedzające doktorat ([14, 15]), rozprawa doktorska ([6]) oraz pięć prac opublikowanych po doktoracie ([7–10, 12]).

Jedna z głównych idei teorii indeksu Conleya polega na zastosowaniu narzędzi z topologii algebraicznej do badania układów dynamicznych (dyskretnych i ciągłych), a szczególnie do badania struktury zbiorów niezmienniczych ([29, 30, 49, 57]). To podejście, motywowane teorią Morse'a, koncentruje się na rozkładzie izolowanego zbioru niezmienniczego na podzbiory niezmiennicze (zbiory Morse'a) i orbity łączące pomiędzy nimi. Struktura ta nosi nazwę rozkładu Morse'a izolowanego zbioru niezmienniczego. Filtracja par indeksowych stowarzyszona z rozkładem Morse'a pozwala znaleźć połączenia pomiędzy różnymi zbiorami Morse'a. Podstawowymi narzędziami służącymi do tego celu są macierze połączeń ([9, 10, 38, 54]), grafy połączeń ([8, 37]) i ciągi spektralne ([7, 10, 31]).

Prace [14, 15] dotyczą teorii macierzy połączeń w przypadku dyskretnych układów dynamicznych. Głównym celem pracy [14] jest dowód twierdzenia o istnieniu filtracji indeksowej. Istnienie takich filtracji w przypadku ciągłych układów dynamicznych (potoków) zostało udowodnione w [30] i [57]. W [14] przeprowadzamy dowód w przypadku dyskretnym, gdy układ dynamiczny zadany jest przez homeomorfizm lokalnie zwartej przestrzeni metrycznej. Z kolei w pracy [15] przenosimy na przypadek dyskretny konstrukcję macierzy połączeń modyfikując odpowiednio konstrukcję dla potoków pochodzącą z [38]. Podstawowa różnica pomiędzy tymi przypadkami leży w definicji homologicznego indeksu Conleya. W przypadku ciągłym homologiczny indeks Conleya definiujemy jako zwykłe homologie pary indeksowej, natomiast w przypadku dyskretnym musimy dodatkowo przeprowadzić redukcję Leray'a. Prace [14, 15] mają w dużej mierze charakter techniczny i w pewnym sensie stanowią przygotowanie do rozprawy doktorskiej [6].

Praca [8] zawiera w uogólnionej wersji główny wynik rozprawy doktorskiej, tj. twierdzenie o istnieniu grafów połączeń. W rozprawie dowodzimy to twierdzenie w przypadku potoków, natomiast w [8] przeprowadzamy dowód równolegle w przypadku ciągłym (potok) i dyskretnym (homeomorfizm). Chociaż podstawowa linia dowodu nie uległa zmianie, pewne fragmenty dowodu (głównie w części algebraicznej) zostały ujęte w nowej, bardziej klarownej formie. Ponadto praca [8] została poszerzona o serię przykładów ilustrujących otrzymane wyniki.

W pracy [7] definiujemy ciągi spektralne dla rozkładu Morse'a zwartej przestrzeni metrycznej i przedstawiamy dowód istnienia i jednoznaczności takich ciągów w przypadku ciągłych układów dynamicznych.

Praca [9], podobnie jak [14, 15], dotyczy teorii macierzy połączeń. Przypomnijmy, że macierze połączeń stanowią algebraiczną reprezentację układu dynamicznego i wyrażają związki pomiędzy pewnymi grupami homologii. Ponieważ klasyczna definicja macierzy połączeń jest mocno skomplikowana, w pracy [9] wprowadzamy tzw. proste macierze połączeń, które stanowią, jak się wydaje, najprostszą możliwą wersję tego narzędzia i dowodzimy istnienia takich macierzy dla rozkładów Morse'a zwartej przestrzeni metrycznej. W ten sposób zachowując podstawowy pomysł unikamy jednocześnie mnóstwa szczegółów technicznych, które zacierają całościowy obraz.

Artykuły [10, 12] to chyba najbardziej dojrzałe prace z serii poświęconej teorii indeksu Conleya. W pierwszym z nich badamy związki pomiędzy ciągami spektralnymi i macierzami połączeń. Przypomnijmy, że zarówno ciągi spektralne, jaki i macierze połączeń stanowią w pewnym sensie uogólnienie ciągów dokładnych homologii. Idea macierzy połączeń pochodzi od C. Conleya, a teoria macierzy połączeń była rozwijana przez jego uczniów. W pracy [10] wprowadzamy tzw. szczegółowe macierze połączeń dla przestrzeni wektorowych z filtracją i różniczką. Przestrzenią wektorową z filtracją i różniczką nazywamy skończoną rosnącą filtrację przestrzeni wektorowej wraz z endomorfizmem d takim, że $d^2 = 0$ i d zachowuje filtrację. Szczegółowa macierz połączeń jest podprzestrzenią z bigradacją przestrzeni z filtracją i różniczką, która dostarcza informacji o pewnych grupach homologii stowarzyszonych z tą przestrzenią. Jak dobrze wiadomo, podobna informacja zawarta jest w ciągach spektralnych. Główny wynik pracy [10] mówi, że dla danej przestrzeni wektorowej z filtracją i różniczką istnieje szczegółowa macierz połączeń, która pozwala w pełni odtworzyć ciąg spektralny tej przestrzeni. Praca zawiera także zastosowanie otrzymanych wyników do badania układów dynamicznych.

Zasadniczym celem artykułu [12] jest wyjaśnienie związków pomiędzy macierzami połączeń (uogólnionymi tutaj do rozszczepień spektralnych), grafami połączeń (zwanymi tu grafami spektralnymi) i ciągami spektralnymi. Chociaż porównanie jest zrobione głównie na poziomie algebraicznym, to wydaje się, że dotyka ono istotnych aspektów teorii indeksu Conleya. Praca ma też w pewnej mierze charakter przeglądowy i podsumowuje wyniki zawarte w [7–10].

2.2. **Prace tematycznie zbliżone do cyklu [H1]–[H7].** Kilka prac nieujętych w rozprawie podejmuje tematykę podobną do tematyki cyklu. Dotyczy to artykułów [19, 20] poświęconych gradientowym polom wektorowym na dysku dwuwymiarowym oraz artykułu [21], w którym wprowadzamy pierwszą, jeszcze nie w pełni ogólną wersję definicji topologii w zbiorze odwzorowań lokalnych.

Prace [19, 20] poruszają problematykę związaną z twierdzeniem Parusińskiego ([52]). Przypomnijmy, że twierdzenie Parusińskiego można sformułować w następujący sposób: inkluzja przestrzeni gradientowych pól wektorowych w przestrzeń wszystkich ciągłych pól wektorowych określonych na dysku D^n nieznikających na brzegu indukuje bijekcję pomiędzy zbiorami składowych spójności tych przestrzeni funkcyjnych.

W pracy [19] wzmacniamy powyższy wynik dla $n = 2$. Mianowicie pokazujemy, że wspomniana inkluzja jest faktycznie homotopijną równoważnością. Wyprowadzamy stąd wniosek, że obie przestrzenie pól wektorowych (gradientowych i ciągłych) są homotopijnie równoważne przestrzeni S^1. Ściśle rzecz ujmując zostało to udowodnione w [52] dla przypadku stopnia różnego od 1. Nam udało się przeprowadzić dowód w dużo trudniejszym przypadku stopnia równego 1.

Z kolei praca [20] (napisana przed pracą [19], opublikowana po niej) zawiera nowy dowód twierdzenia Parusińskiego w przypadku płaszczyzny ($n = 2$). Nasze podejście uwypukla mocno geometryczne aspekty rozumowania. Takie podejście okazało się na tyle owocne, że znalazło swoją naturalną kontynuację w pomysłach zastosowanych w pracy [19]. Ponadto w pracy [20] udało nam się także uzupełnić pewną lukę obecną w oryginalnym dowodzie zawartym w [52].

Natomiast o artykule [21] wspomnieliśmy już przy okazji omawiania pracy [H4]. Przypomnijmy, że głównym celem pracy [21] było wprowadzenie topologii w zbiorze odwzorowań lokalnych w ten sposób, by otopie odpowiadały drogom w tej przestrzeni funkcyjnej. Mianowicie, dowodzimy tu pewnej wersji prawa wykładniczego, które ustanawia homeomorfizm pomiędzy przestrzenią otopii i przestrzenią dróg w przestrzeni odwzorowań lokalnych. Kluczowe jest, że topologia ta jest istotnie bogatsza od topologii indukowanej z przestrzeni odwzorowań częściowych, co ilustrujemy na odpowiednich przykładach.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. M. Abd-Allah, R. Brown, *A compact-open topology on partial maps with open domain*, J. London Math. Soc. (2), 21 (1980), 480–486.

[2] Z. Balanov, *Equivariant Hopf theorem*, Nonlinear Anal. 30 (1997), 3463–3474.

[3] Z. Balanov, W. Krawcewicz, *Remarks on the equivariant degree theory*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 13 (1999), 91–103.

[4] Z. Balanov, W. Krawcewicz, H. Steinlein, *Applied Equivariant Degree*, AIMS, 2006.

[5] Z. Balanov, A. Kushkuley, *On the problem of equivariant homotopic classification*, Arch. Math. 65 (1995), 546–552.

[6] **P. Bartłomiejczyk**, *Zagadnienia teorii macierzy połączeń*, PhD Thesis, 1999, Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland.

[7] **P. Bartłomiejczyk**, *The Conley Index and Spectral Sequences*, Topol. Methods Nonlin. Anal. 25(1) (2005), 195–203.

[8] **P. Bartłomiejczyk**, *Connection Graphs*, Fund. Math. 192(2) (2006), 93–110.

[9] **P. Bartłomiejczyk**, *Simple Connection Matrices*, Annal. Polon. Math. 90(1) (2007), 77–87.

[10] **P. Bartłomiejczyk**, *Spectral Sequences and Detailed Connection Matrices*, Topol. Methods Nonlin. Anal. 34(1) (2009), 187–200.

[11] **P. Bartłomiejczyk**, *On the space of equivariant local maps*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 45(1) (2015), 233–246.

[12] **P. Bartłomiejczyk**, *Spectral splittings in the Conley index theory*, J. Fixed Point Theory Appl. 17(2) (2015), 403–412.

[13] **P. Bartłomiejczyk**, *The Hopf type theorem for equivariant local maps*, `arXiv:1508.06468 [math.AT]`, submitted.

[14] **P. Bartłomiejczyk**, Z. Dzedzej, *Index Filtrations and Morse Decomposition for Discrete Dynamical Systems*, Annal. Polon. Math. 72(1) (1999), 51–70.

[15] **P. Bartłomiejczyk**, Z. Dzedzej, *Connection Matrix Theory for Discrete Dynamical Systems*, Conley Index Theory, Banach Center Publ. vol. 47, 67–78, Warszawa, 1999.

[16] **P. Bartłomiejczyk**, K. Gęba, M. Izydorek, *Otopy classes of equivariant local maps*, J. Fixed Point Theory Appl. 7(1) (2010), 145–160.

[17] **P. Bartłomiejczyk**, P. Nowak-Przygodzki, *Gradient otopies of gradient local maps*, Fund. Math. 214(1) (2011), 89–100.

[18] **P. Bartłomiejczyk**, P. Nowak-Przygodzki, *Proper gradient otopies*, Topol. Appl. 159 (2012), 2570–2579.

[19] **P. Bartłomiejczyk**, P. Nowak-Przygodzki, *The homotopy type of the space of gradient vector fields*, Glasgow Math. J. 54 (2012), 619–626.

[20] **P. Bartłomiejczyk**, P. Nowak-Przygodzki, *Path components of the space of gradient vector fields on the two dimensional disc*, Math. Slovaca 63(6) (2013), 1381–1390.

[21] **P. Bartłomiejczyk**, P. Nowak-Przygodzki, *On the topology of the spaces of partial and local maps*, Georgian Math. J. 21(1) (2014), 41–48.

[22] **P. Bartłomiejczyk**, P. Nowak-Przygodzki, *The exponential law for partial, local and proper maps and its application to otopy theory*, Commun. Contemp. Math. 16(5) (2014), 1450005 (12 pages).

[23] **P. Bartłomiejczyk**, P. Nowak-Przygodzki, *On the homotopy equivalence of the spaces of proper and local maps*, Cent. Eur. J. Math. 12(9) (2014), 1330–1336.

[24] **P. Bartłomiejczyk**, P. Nowak-Przygodzki, *The Hopf theorem for gradient local vector fields on manifolds*, New York J. Math. 21 (2015), 943–953.

[25] **P. Bartłomiejczyk**, P. Nowak-Przygodzki, *The Hopf type theorem for equivariant gradient local maps*, `arXiv:1510.00235 [math.AT]`, submitted.

[26] J. C. Becker, D. H. Gottlieb, *Vector fields and transfers*, Manuscripta Math. 72 (1991), 111–130.

[27] J. C. Becker, D. H. Gottlieb, *Spaces of local vector fields*, Contemp. Math. 227 (1999), 21–28.

[28] G. E. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[29] C. Conley, *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*, CMBS Reg. Conf. Ser. in Math. 38, AMS, Providence, RI 1978.

[30] C. Conley, E. Zehnder, *Morse type index theory for flows and periodic solutions to Hamiltonian system*, Comm. Pure Appl. Math. 37 (1984), 207–253.

[31] O. Cornea, K.A. de Rezende, M.R. Silveira, *Spectral sequences in Conley's theory*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 30 (2010), 1009–1054.

[32] E. N. Dancer, *A new degree for S1-invariant gradient mappings and applications*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire, 2 (1985), 329–370

[33] E. N. Dancer, K. Gęba, S. Rybicki, *Classification of homotopy classes of gradient equivariant maps*, Fund. Math. 185 (2005), 1–18.

[34] G. Dylawerski, *An S1-degree and S1-maps between representation spheres*, Algebraic Topology and Transformation Groups (T. tom Dieck, ed.), Lecture Notes in Math., 1361 (1988), 14–28.

[35] G. Dylawerski, K. Gęba, J. Jodel, W. Marzantowicz, *An S^1-equivariant degree and the Fuller index*, Ann. Polon. Math. 63 (1991), 243–280.

[36] D. Ferrario, *On the equivariant Hopf theorem*, Topology 42 (2003), 447–465.

[37] B. Fiedler, K. Mischaikow, *Dynamics of bifurcation for variational problems with $O(3)$ equivariance: a Conley index approach*, Arch. Rational Mech. Anal. 119 (1992), no. 2, 145–196.

[38] R. Franzosa, *The connection matrix theory for Morse decompositions*, Trans. AMS 311 (1989), 561–592.

[39] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[40] K. Gęba, M. Izydorek, *On relations between gradient and classical equivariant homotopy groups of spheres*, J. Fixed Point Theory and Appl. 12 (2012), 49–58.

[41] K. Gęba, W. Krawcewicz, J. Wu, *An equivariant degree with applications to symmetric bifurcation problems I: Construction of the degree*, Bull. London. Math. Soc. 69 (1994), 377–398.

[42] D. H. Gottlieb, G. Samaranayake, *The index of discontinuous vector fields*, New York J. Math. 1 (1994), 130–148.

[43] M. Gromov, *Partial Differential Relations*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Vol. 9, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[44] V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.

[45] M. W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer, New York, 1994.

[46] K. Kawakubo, *The Theory of Transformation Groups*, Oxford Univ. Press, New York, 1991.

[47] W. Marzantowicz, C. Prieto, *Computation of the equivariant 1-stem*, Nonlinear Anal. 63 (2005), 513–524.

[48] W. Marzantowicz, C. Prieto, *A decomposition formula for equivariant stable homotopy classes*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 33 (2009), 285–292.

[49] K. Mischaikow, M. Mrozek, *The Conley Index Theory*, Handbook of Dynamical Systems III: Towards Applications, Singapore 2002, 393–460.

[50] D. McDuff, *Configuration spaces of positive and negative particles*, Topology 14 (1975), 91–107.

[51] I. Nagasaki, F. Ushitaki, *A Hopf type classification theorem for isovariant maps from free G-manifoldsto representation spheres*, Acta Math. Sin., Engl. Ser. 27 (2011), 685–700.

[52] A. Parusiński, *Gradient homotopies of gradient vector fields*, Studia Math. XCVI (1990), 73–80.

[53] G. Peschke, *Degree of certain equivariant maps into a representation sphere*, Topology Appl. 59 (1994), 137–156.

[54] J. W. Robbin, D. Salamon, *Lyapunow maps, simplicial complexes and the Stone functor*, Ergod. Th. & Dyn. Sys. 12 (1992), 153–183.

[55] S. Rybicki, *A degree for S 1-equivariant orthogonal maps and its applications to bifurcation theory*, Nonlinear Anal. 23 (1994), 83–102.

[56] S. Rybicki, *Degree for gradient equivariant maps*, Milan J. Math. 73 (2005), 475–488.

[57] D. Salamon, *Connected simple systems and the Conley index of isolated invariant sets*, Trans. AMS 291 (1985), 1–41.

[58] G. Segal, *Configuration spaces and iterated loop spaces*, Invent. Math. 21 (1973), 213–221.

[59] G. Segal, *The topology of spaces of rational functions*, Acta Math. 143 (1979), 39–72.

[60] M. Szymik, *A stable approach to the equivariant Hopf theorem*, Topology Appl. 154 (2007), 2323–2332.

[61] T. tom Dieck, *Transformation Groups*, de Gruyter, 1987.

[62] E. C. Zeeman, *On the filtered differential group*, Ann. Math. 66 (1957), 557–585.

Gdańsk 14 grudnia 2015

Piotr Bartłomiejczyk

Piotr Bartłomiejczyk