Łódź, dn. 15 marca 2016 r.

dr hab. Szymon Głąb
Instytut Matematyki
Politechnika Łódzka

Recenzja pracy doktorskiej Pana mgra Pawła Klingi pt. „Permutacje i odwzorowania o nośnikach ideałowych oraz ich zastosowanie w szeregach i odwzorowaniach osiowych"

Klasyczne twierdzenie Riemanna mówi, że elementy szeregu warunkowo zbieżnego można przepermutować tak, by był on zbieżny do z góry danej liczby. Filipów i Szuca badali problem czy teza twierdzenia Riemanna zachodzi, jeśli o pemutacji założyć, że jej nośnik należy do pewnego ideału. Okazuje się, że dla jednych ideałów tak jest w istocie (np. dla ideału gęstości zero), podczas gdy dla innych nie (np. dla ideału zbiorów skończonych). Własność tę nazwali (R). Autorzy wykazali, że własność (R) przysługuje ideałom, których nie da się rozszerzyć do ideałów sumowalnych. Jako, że istnieje wielowymiarowa wersja twierdzenia Riemanna (udowodniona przez Levy'ego i Steinitza), naturalnym pytaniem jest, czy wielowymiarowy odpowiednik własności (R) dla ideałów jest równoważny własności (R). Ciekawe jest także, które znane ideały mają własność (R), lub równoważnie, nie rozszerzają się do ideałów sumowalnych. Znaczną część rozprawy Autor poświęca tym pytaniom.

W roku 1935 Stefan Banach postawił w słynnej Księdze Szkockiej pytanie, czy każda permutacja ω^2 jest złożeniem skończenie wielu permutacji osiowych. Problem ten został pozytywnie rozwiązany przez Ehrenfeuchta i Grzegorka, którzy wykazali, że wystarczą 4 permutacje osiowe i że nie da się tego wyniku poprawić. Autor analizuje następujące pytanie – czy wyniki Ehrenfeuchta i Grzegorka da się wzmocnić zastępując permutacje osiowe, permutacjami osiowymi, które na każdej osi mają nośnik skończony lub należący do ustalonego ideału?

Praca zawiera Wstęp, w którym znajduje się wprowadznie do tematyki oraz krótkie streszczenie uzyskanych w rozprawie wyników. W pierwszym rozdziale zatytułowanym „Podstawowe pojęcia" umieszczone są definicje używanych w pracy pojęć oraz główne fakty, które zostaną wykorzystane w dalszych częściach pracy. Wyniki autora są zamieszczone w kolejnych czterech rozdziałach, które składają się na dwie tematyczne części. Część pierwsza – rozdziały drugi i trzeci – to nawiązanie do wyników uzyskanych przez Filipowa i Szucę. Część druga – rozdziały czwarty i piąty – to nawiązanie do wyników Ehrenfeuchta i Grzegorka.

Rozdział 2 rozpoczyna się od Twierdzenia 2.1.1. mówiącego, że jeśli ideał $\mathcal{I}$ ma własność (R), a zbiór $S(\sum_{n\in\omega} v_n)$ osiągalnych sum dla szeregu $\sum_{n\in\omega} v_n$ elementów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ jest prostą l, to zbiór $S(\sum_{n\in\omega} v_n)$ osiągalnych sum dla permutacji o nośnikach w $\mathcal{I}$ też jest prostą