dr hab. Tomasz Weiss, prof. UKSW
Instytut Matematyki
Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego
w Warszawie

Warszawa, dn. 12.07.2016r.

Recenzja rozprawy doktorskiej magistra Marcina Staniszewskiego

Rozprawa doktorska magistra Marcina Staniszewskiego pt. "E-zbieżność ideałowa ciągów funkcyjnych", składająca się ze wstępu, trzech rozdziałów oraz bibliografii, poświęcona jest kombinatorycznym własnościom ideałów na ω i tzw. zbieżności ideałowej ciągu funkcji rzeczywistych. Tematyka ta zapoczątkowana przez H. Cartana pojawiła się w pracach Steinhausa i Schoenberga, a współcześnie rozwijana była przez znanych matematyków, m.in. Bukovskiego, Csaszara, Debsa, Laczkovicha, Recława, Saint-Raymonda i Soleckiego.

W rozdziale pierwszym pracy doktorskiej M. Staniszewskiego, autor przypomina standardowe definicje i fakty związane z pojęciem ideału na ω, a wśród nich porządek Katětova na ideałach, produkt ideałów oraz dziedziczną własność Baire'a. Rozważa również bardzo interesującą (pochodzącą od Farkasa i Soukupa) ideałową wersję znanej w teorii mnogości liczby $\mathfrak{b}$

$$\mathfrak{b}(I) = \{|\mathcal{F}|\colon \mathcal{F} \subseteq \omega^\omega \wedge \forall_{g\in\omega^\omega}\, \exists_{f\in\mathcal{F}}\, \{n \in \omega\colon f(n) \geqslant g(n)\}\} \in I^+,$$

gdzie $I^+ = \{A \subseteq \omega\colon A \notin I\}$.
Autor tej recenzji uważa, że warto byłoby zastanowić się nad możliwymi wersjami ideałowymi innych niezmienników kontinuum.
Twierdzenie 1.5 z pracy doktorskiej M. Staniszewskiego wiąże ideał I o dziedzicznej własności Baire'a z liczbą $\mathfrak{b}(I)$. Następnie autor definiuje ideały o własności $\kappa - P(I, J)$ oraz warunki $W(I, J, K), B(I, J, K, \kappa)$ i bada zależność między nimi i współczynnikiem $\mathfrak{b}$ dla ideałów,(publikcja [24] autora).
Przykładowo, powiemy, że ideał K jest $\kappa - P(I, J)$ ideałem, jeśli dla dowolnej rodziny $\{E_\alpha\colon \alpha < \kappa\} \subseteq K$ istnieje $A \in J$ takie, że $\forall_{\alpha<\kappa}\, E_\alpha \setminus A \in I$. Ideał K, który jest $\kappa - P(Fin, K)$ ideałem nazywamy $\kappa - P-$ ideałem.
W powyższej definicji I, J, K, Fin są ideałami na ω, κ - oznacza liczbę kardynalną.

Rozdział drugi (oparty na publikacji autora oznaczonej w bibliografii przez [23]), najważniejszy w całej rozprawie doktorskiej, zawiera porównanie e-zbieżności ideałowej z innymi typami zbieżności ideałowej.

Definicja 1. *Niech I, J będą ideałami na ω oraz $f_n\colon X \to R$, dla $n \in \omega$. Wtedy ciąg $\{f_n\}_{n\in\omega}$ jest (I, J)-e-zbieżny do funkcji f jeśli istnieje ciąg $\{\varepsilon_n\}_{n\in\omega}$, J-zbieżny do zera taki, że*

$$\{n \in \omega\colon |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_n\} \in I,$$

dla dowolnego $x \in X$.

W przypadku (I, J)-e-zbieżności stosujemy oznaczenie $\{f_n\} \xrightarrow{(I,J)-e} f$. Jak pisze M. Staniszewki w swojej rozprawie doktorskiej, e-zbieżność można umiejscowić pomiędzy zbieżnością jednostajną i punktową. W rozdziale drugim pracy autor sprawdza warunki kiedy między różnymi rodzajami zbieżności ideałowej zachodzą związki analogiczne do przykładów klasycznych (Twierdzenie 2.6). Istotną rolę odgrywają tutaj własności kombinatoryczne ideałów zdefiniowane w rozdziale pierwszym oraz moc przestrzeni X. Podsumowanie rozdziału drugiego stanowią: Twierdzenie 2.26, 2.32 i 2.33, które są, jak pisze M. Staniszewki, rozszerzeniami wyników z pracy [23] oraz rozwiązują problemy postawione wcześniej przez autorów pracy [19]. W ostatniej części rozdziału drugiego autor przedstawia również wzajemne relacje między $(I, J)-$e-zbieżnością a zbieżnością na zbiorze z filtru dualnego I^*.

Rozdział trzeci rozprawy oparty jest na wynikach uzyskanych przez autora w pozycji [35] (złożonej do publikacji).
Oznaczmy przez $PWD(X)$ zbiór funkcji rzeczywistych na przestrzeni topologicznej X, których zbiór punktów ciągłości jest gęsty w X. Niech $PWD_o(X)$ oznacza zbiór funkcji rzeczywistych określonych na X, dla których dopełnienie zbioru punktów quasi-ciągłości jest nigdziegęste. Przyjmujemy, że

$$(I, J)(\mathcal{F}) = \{f \in R^X : \exists_{\{f_n\}_{n\in\omega}\subseteq\mathcal{F}}\ \{f_n\}_{n\in\omega} \xrightarrow{(I,J)-e} f\}.$$

Analogicznie definiujemy klasę Baire'a $(I, J)_\alpha(\mathcal{F})$, dla dowolnej liczby porządkowej α.
W twierdzeniu 3.38 autor charakteryzuje $PWD_o(X)$ i $PWD(X)$ dla X - przestrzeni metrycznej Baire'a w oparciu o klasę $(I, J)(QC(X))$, gdzie I, J są ideałami spełniającymi pewne warunki kombinatoryczne, a $QC(X)$ jest zbiorem funkcji quasi-ciągłych na X.
Twierdzenie 3.40 charakteryzuje klasy Baire'a w oparciu o rozpatrywane wcześniej rodzaje zbieżności i rodziny funkcji z uwzględnieniem deskryptywnej złożoności ideału. Twierdzenie 3.53 podsumowuje wyniki dotyczące charakteryzacji klas Baire'a generowanych przez funkcje ciągłe względem e-zbieżności ideałowej.

Rozprawa doktorska magistra Marcina Staniszewkiego jast napisana w sposób czytelny i zrozumiały dla matematyków znających klasyczne metody teorii funkcji rzeczywistych i deskryptywnej teorii mnogości. Twierdzenia znajdujące się w pracy są interesujące i w większości posiadają nietrywialne dowody używające nowoczesnych technik (m.in. nieskończonych gier Laflamme'a) oraz zostały opublikowane w dobrych czasopismach.

Uważam, ze rozprawa doktorska Marcina Staniszewskiego spełnia warunki konieczne do uzyskania stopnia doktora nauk matematycznych zawarte w ustawie.

Tomasz Weiss