Łódź, 28 lipca 2016

dr hab. Grażyna Horbaczewska
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Łódzki
ul. Banacha 22
90-238 Łódź

Recenzja pracy doktorskiej mgr. Marcina Staniszewskiego "E-zbieżność ideałowa ciągów funkcyjnych"

Rozprawa doktorska Pana magistra Marcina Staniszewskiego poświęcona jest badaniu $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-równej zbieżności ciągów funkcyjnych (nazywanej w pracy $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżnością), gdzie $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ są ideałami na ω. Zbieżność ta jest uogólnieniem e-zbieżności wprowadzonej przez Császára i Laczkovicha, uogólnia również badane w pracach matematyków z Uniwersytetu Gdańskiego, a także z Indii różne wersje e-zbieżności ideałowej. Zagadnienia te wpisują się w żywo rozwijający się od wielu lat w różnych osrodkach badawczych nurt badań inspirowany zbieżnością ideałową. Szczególnie ciekawe w tej dziedzinie jest swoiste połączenie problematyki kombinatorycznej, topologicznej oraz teorii funkcji rzeczywistych, co ma wyraźne odzwierciedlenie w recenzowanej rozprawie.

Przedstawiona do recenzji praca została przygotowana na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego. Promotorem jest dr hab. Rafał Filipów, a promotorem pomocniczym - dr Adam Kwela.

Rozprawa zawiera "abstract" w języku angielskim będący wprowadzeniem w tematykę i krótką prezentacją wyników. We wstępie, napisanym jak cała reszta pracy w języku polskim, doktorant nieco szerzej niż w angielskim opisie przedstawia kontekst prowadzonych badań i koncepcję rozprawy.

Rozdział pierwszy "Ideały i ich własności" ma charakter wprowadzający. Przedstawia podstawowe definicje dotyczące ideałów i przykłady ideałów na ω. Opisuje operacje i porządki na zbiorze ideałów oraz sposób przypisywania ideałom własności topologicznych poprzez traktowanie ich jako podzbiorów przestrzeni Cantora. Istotne znaczenie w dalszej części pracy ma omówiona w podrozdziale 1.3 dziedziczna własność Baire'a dla ideałów, bowiem dla ideałów o tej własności wprowadzona w podrozdziale 1.4 ideałowa wersja liczby ograniczającej dla funkcji rozważanych na podzbiorach z koideału $\mathfrak{b}^*(\mathcal{I})$ jest równa liczbie $\mathfrak{b}(\mathcal{I})$ wprowadzonej przez Farkasa i Soukupa oraz klasycznej liczbie ograniczającej $\mathfrak{b}$ (Twierdzenie 1.5). Podrozdział 1.5 wprowadza kombinatoryczne własności opisujące związki między trzema ideałami. Należy podkreślić, że prezentowane tu własności zostały wyabstrahowane przy okazji badań, których wyniki są przedstawione w dalszej części pracy i są uogólnieniami wprowadzonymi przez doktoranta pewnych rozważanych wcześniej własności.

W rozdziale 2, zgodnie z jego tytułem, znajdujemy porównanie e-zbieżności ideałowej z innymi rodzajami zbieżności. W klasycznym przypadku, to znaczy dla ciągów funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze liczb rzeczywistych, ze zbieżności jednostajnej ciągu wynika e-zbieżność, a z niej jego punktowa zbieżność. Ponadto zbieżności te nie są równoważne. Natomiast e-zbieżność jest równoważna zbieżności σ-jednostajnej. W rozprawie prezentowane sa konieczne i dostateczne warunki na to, aby analogiczne własności zachodziły dla odpowiedników ideałowych. W podrozdziale 2.3 w tym samym kontekście omówione zostały zbieżności na podzbiorze z filtru dualnego do pewnego ideału.

Rozważania w drugiej części rozdziału zostają ograniczone do par ideałów, dla których $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżność daje jednoznaczność granicy, to znaczy dla ideałów, które nie są ortogonale (Twierdzenie 2.3).

Twierdzenia 2.6, 2.7 oraz 2.12 charakteryzują implikowanie przez $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżność $\mathcal{K}$-zbieżności punktowej i odwrotnie. Okazuje się, że zbieżność punktowa wymusza równą e-zbieżność wtedy i tylko wtedy, gdy moc dziedziny funkcji rozważanego ciągu nie przekracza pewnego analizowanego w rozdziale 1 współczynnika kardynalnego dla trójki ideałów. W przypadku, gdy ideał $\mathcal{K}$ nie jest zawarty w $\mathcal{I}$ wykorzystano założenie o posiadaniu przez ideał $\mathcal{I}$ dziedzicznej własności Baire'a. Na podkreślenie zasługuje fakt, iż otrzymane wyniki dają odpowiedź na pytania postawione w pracy Dasa, Dutty i Pala oraz są uogólnieniem rezultatów otrzymanych przez Šupinę (Wniosek 2.16 i 2.17). Podobne warunki charakteryzują związki między $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżnością a $\mathcal{K}$-zbieżnością jednostajną. W przypadku $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżności i zbieżności $\sigma-\mathcal{I}$-jednostajnej fakt, że $\mathcal{I}$ zawiera $\mathcal{J}$ i jest $|X|$- przeliczalnie generowany, gdzie X jest dziedziną funkcji, okazał się być warunkiem równoważnym implikowaniu przez równą zbiezność zbieżności σ-jednostajnej (Twierdzenie 2.33), co znów daje odpowiedź na pytanie Dasa, Dutty i Pala. Podobnie jest w przypadku pewnych wyników zaprezentowanych w podrozdziale 2.3.

Rozdział 3 "Klasy Baire'a względem e-zbieżności ideałowej" opisuje klasy Baire'a względem $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżności generowane przez rodzinę funkcji rzeczywistych quasi-ciągłych określonych na metrycznej przestrzeni Baire'a (podrozdział 3.4) oraz przez rodzinę ciągłych funkcji rzeczywistych określonych na przestrzeni doskonale normalnej (podrozdział 3.5). Przedstawione tu wyniki sa analogiczne do uzyskanych przez matematyków gdańskich w przypadku $(\mathcal{I}, Fin)$-e-zbieżności, gdzie Fin oznacza ideał zbiorów skończonych.

Zastosowanie tu zaawansowanych metod, takich jak charakteryzowanie ideałów przez nieskończone gry Laflamme'a, inspirowane jest wcześniejszymi wynikami innych matematyków, ale w rozważanych przypadkach prowadzi do bardzo subtelnych kombinatorycznych klasyfikacji par ideałów. Wprowadzono trzy różne q-typy oraz trzy różne c-typy par ideałów. Systemy Baire'a generowane przez funkcje quasiciągłe dla $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżności są identyczne dla wszystkich par $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ tego samego q-typu, przy założeniu, że $\mathcal{I}$ jest idałem koanalitycznym (Twierdzenia 3.38, i 3.40). Analogiczny rezultat otrzymano dla funkcji ciagłych i c-typów (Twierdzenie 3.53) dla klas Baire'a rzędu $\alpha < \omega$.

Najciekawsze rezultaty otrzymano w przypadku par ideałów drugiego q-typu i drugiego c-typu, ponieważ $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-e-zbieżność generuje tu przez przechodzenie ciągów funkcji do granicy nową rodzinę funkcji, która nie jest otrzymywana w przypadku klasycznej e-zbieżności.

Nierozwiązanym pozostał problem uzyskania charakteryzacji pierwszej klasy Baire'a w przypadku funkcji ciągłych i pary ideałów trzeciego c-typu, jak również dla wszystkich typów dla klas Baire'a rzędu $\alpha < \omega_1$.

Prezentowane wyniki, jak zaznacza doktorant we wprowadzeniu, pochodzą z dwóch opublikowanych i dwóch wysłanych do czasopism prac. Jedna z tych prac przygotowana jest samodzielnie, w pozostałych trzech przypadkach doktorant jest współautorem. Jak wynika z przedstawionych dokumentów zarówno merytoryczny jak i redakcyjny wkład doktoranta w powstanie tych publikacji był znaczący.

Przedstawiona do recenzji obszerna i treściwa rozprawa została napisana bardzo starannie, wszystkie potrzebne pojęcia są dokładnie opisane, dowody zawierają szczegółowe wyjaśnienia. Żadnych błędów merytorycznych nie zauważyłam. Drobne pomyłki drukarskie, jak na przykład zmiana indeksu sumowania w dowodzie Stwierdzenia 1.2, są na tyle rzadkie, że nie warto zwracać tu na nie uwagi.

Zaletą pracy jest bardzo dobre umiejscowienie wyników doktoranta wśród wyników innych matematyków świadczące o orientacji w tematyce badawczej. Autor cytuje i omawia dość dokładnie prace, które były inspiracją dla prowadzonych przez niego badań. Ponadto bardzo dobrze akcentuje wyniki, które odpowiadają na postawione w literaturze pytania lub uogólniają otrzymane wcześniej wyniki.

Rezultaty zawarte w rozprawie oceniam wysoko. Są wartościowe i ciekawe. Dobrze wpisują się w żywo rozwijający się nurt badań. Doktorant pokazuje, że potrafi swobodnie posługiwać się szerokim spektrum metod pochodzących z różnych dziedzin matematyki. Przez staranną analizę problemów uzyskał eleganckie rezultaty, czasem podążajac śladem analogicznych badań innych matematyków, czasem prezentując twórcze podejście do zagadnienia.

Podsumowując, uważam, że praca magistra Marcina Staniszewskiego spełnia z naddatkiem wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie jej autora do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Ponadto wnioskuję o wyróżnienie rozprawy.

Grażyna Horbaczewska