

AUTOREFERAT

1. PODSTAWOWE INFORMACJE

1.1. Imiona i nazwisko: **Błażej Jakub Szepietowski**

1.2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe:

- dyplom magistra matematyki, Uniwersytet Gdański, Wydział Matematyki i Fizyki, 2002;
- stopień doktora matematyki na podstawie rozprawy „Generatory i relacje w grupie klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej”, promotor prof. dr hab. Grzegorz Gromadzki, Uniwersytet Gdański, Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, 2006.

1.3. Dotychczasowe zatrudnienie w jednostkach naukowych:

- 2002 - 2006 asystent w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego;
- od 2006 adiunkt w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego.

1.4. Osiągnięcie naukowe wynikające z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki: **jednotematyczny cykl 5 publikacji pod tytułem**

„Grupa klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej”.

Publikacje wchodzące w skład ww. osiągnięcia:

- [H1] B. Szepietowski, A presentation for the mapping class group of the closed non-orientable surface of genus 4, *Journal of Pure and Applied Algebra* 213 (2009), 2001–2016.
- [H2] B. Szepietowski, Crosscap slides and the level 2 mapping class group of a nonorientable surface, *Geometriae Dedicata* 160 (2012), 169–183.
- [H3] B. Szepietowski, A finite generating set for the level 2 mapping class group of a nonorientable surface, *Kodai Mathematical Journal* 36 (2013), 1–14.
- [H4] B. Szepietowski, Low-dimensional linear representations of the mapping class group of a nonorientable surface, *Algebraic & Geometric Topology* 14 (2014), 2445–2474.
- [H5] L. Paris, B. Szepietowski, A presentation for the mapping class group of a nonorientable surface, *Bulletin de la Société Mathématique de France* 143 (2015), 503–566.

2. OMÓWIENIE OSIĄGNIĘCIA NAUKOWEGO

W poniższym omówieniu, oprócz prac [H1-H5] cytowane są również niektóre z moich pozostałych prac [P1-P13], których listy znajdują się w paragrafach 3.1 i 3.2. Spis prac innych autorów znajduje się na końcu autoreferatu.

2.1. Wstęp.

Grupą klas odwzorowań (ang. *mapping class group*) zwartej spójnej powierzchni nieorientowalnej N , oznaczaną przez $\mathcal{M}(N)$, nazywamy grupę klas izotopii homeomorfizmów N równych identyczności na brzegu ∂N , o ile jest on niepusty:

$$\mathcal{M}(N) = \text{Homeo}(N, \partial N) / \text{Homeo}_0(N, \partial N).$$

Tutaj $\text{Homeo}_0(N, \partial N)$ oznacza podgrupę $\text{Homeo}(N, \partial N)$ składającą się z homeomorfizmów izotopijnych z identycznością, a przez izotopię rozumiemy homotopię $H: N \times [0, 1] \rightarrow N$ taką, że $H(-, t) \in \text{Homeo}(N, \partial N)$ dla $t \in [0, 1]$. Grupę klas odwzorowań zwartej spójnej powierzchni orientowalnej S definiuje się analogicznie, jako grupę klas izotopii homeomorfizmów zachowujących orientację:

$$\mathcal{M}(S) = \text{Homeo}^+(S, \partial S) / \text{Homeo}_0(S, \partial S).$$

W przypadku gdy na powierzchni wyróżniono skończony zbiór punktów P , w powyższej definicji zakłada się, że homeomorfizmy permutują P , a grupę klas odwzorowań oznacza się przez $\mathcal{M}(N, P)$ lub $\mathcal{M}(S, P)$.

Zwartą spójną powierzchnię, o której nie zakładamy ani że jest orientowalna, ani że jest nieorientowalna, będziemy oznaczać przez F , a jej grupę klas odwzorowań przez $\mathcal{M}(F)$ lub $\mathcal{M}(F, P)$ w przypadku wyróżnionych punktów. Będziemy również stosować oznaczenia $N_{g,n}$, $S_{g,n}$, $F_{g,n}$ dla powierzchni rodzaju g o n składowych spójności brzegu, przy czym będziemy opuszczać n , gdy $n = 0$. Tak więc $N_{g,n}$ oznacza powierzchnię homeomorficzną z sumą spójną g płaszczyzn rzutowych, z której usunięto wewnątrz n parami rozłącznych dysków.

Grupa klas odwzorowań odgrywa niezwykle ważną rolę w nisko-wymiarowej topologii (w tym teorii różnicowości wymiaru 3 i 4), a także w teorii funkcji zmiennej zespolonej, geometrii algebraicznej oraz geometrycznej teorii grup. Grupa ta cieszy się ogromnym zainteresowaniem wielu matematyków i jest przedmiotem intensywnych badań nieprzerwanie od ponad pięćdziesięciu lat. Pomimo tego, wciąż nie brakuje związanych z nią otwartych problemów.

Badanie grupy klas odwzorowań zapoczątkowali w latach dwudziestych ubiegłego stulecia, niezależnie od siebie, M. Dehn i J. Nielsen; jednak prawdziwie dynamiczny rozwój tej teorii rozpoczął się dopiero w latach sześćdziesiątych i był napędzany w następnych dziesięcioleciach przez przełomowe prace takich matematyków jak W. B. R. Lickorish, J. S. Birman, W. P. Thurston, J. L. Harer, N. V. Ivanov, D. Johnson, B. Wajnryb. Twierdzenia i metody wypracowane przez tych autorów do dzisiaj stanowią podstawowe narzędzia badawcze w omawianej dziedzinie. Co więcej, niektóre z tych metod, szczególnie te pochodzące od Thurstona, stosuje się z powodzeniem do badania innych, pokrewnych grup, przede wszystkim warkoczy i automorfizmów grupy wolnej.

Jednym z powodów dużego znaczenia grupy $\mathcal{M}(S_g)$ jest jej rola w konstrukcji przestrzeni moduli powierzchni Riemanna, gdzie grupa ta działa właściwie nieciągłe jako pełna grupa izometrii przestrzeni Teichmüllera $\text{Teich}(S_g)$, zaś przestrzeń orbit $\mathfrak{M}(S_g) = \text{Teich}(S_g)/\mathcal{M}(S_g)$ tego działania jest wspomnianą przestrzenią moduli zwartych powierzchni Riemanna rodzaju g ($g \geq 2$), centralnym obiektem teorii funkcji zmiennej zespolonej oraz teorii krzywych algebraicznych. Dopuszczając antyholomorficzne funkcje przejścia między mapami otrzymuje się pojęcie dianalitycznej struktury powierzchni Kleina na powierzchni nieorientowalnej N_g . Obiekty te rozpatrywane były już przez samego Kleina. W systematyczny sposób zostały opisane we współczesnej monografii [1], natomiast metodologia ich badań została rozwinięta w [18]. Przestrzeń moduli $\mathfrak{M}(N_g)$ tych powierzchni jest znowu przestrzenią orbit działania grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}(N_g)$ na przestrzeni Teichmüllera $\text{Teich}(N_g)$.

Każda zwarta powierzchnia Kleina jest przestrzenią orbit $S/\langle\sigma\rangle$ dla dokładnie jednej pary (S, σ) , gdzie S jest powierzchnią Riemanna, a $\sigma: S \rightarrow S$ jej symetrią, czyli antyholomorficzną inwolucją. Przy dobrze znanej, funktorialnej, wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości pomiędzy zwartymi powierzchniami Riemanna, a gładkimi, nierozkładalnymi krzywymi rzutowymi zespolonymi, symetryczne powierzchnie odpowiadają krzywym, które posiadają równania rzeczywiste. Parę (S, σ) nazywa się zwykle rzeczywistą krzywą algebraiczną [1].

Ponieważ $\text{Teich}(F)$ jest rozmaitością (homeomorficzną z kulą w przestrzeni euklidesowej), $\mathfrak{M}(F)$ ma strukturę orbifoldu, którego punkty osobliwe odpowiadają przestrzeniom Riemanna lub Kleina posiadającym nietrywialne automorfizmy. W grupie $\mathcal{M}(F)$ zakodowana jest większość topologicznych własności przestrzeni $\mathfrak{M}(F)$ i na odwrót, niezmienniki takie jak homologie $\mathcal{M}(F)$ są zdeterminowane przez topologię $\mathfrak{M}(F)$. Jako przykłady powyższej zależności można przywołać dowody jednorodności przestrzeni moduli powierzchni Riemanna [64] i Kleina [P1], twierdzenie Harera [31] o stabilności grup (ko)homologii $\mathcal{M}(S)$ i $\mathfrak{M}(S)$, czy też twierdzenie Madsena-Weissa [65] dowodzące hipotezy Mumforda o stabilnych grupach kohomologii $\mathfrak{M}(S)$. Analogiczne twierdzenia dla powierzchni nieorientowalnych udowodniła N. Wahl [82].

Drugim, po przestrzeni Teichmüllera, fundamentalnym obiektem, na którym działa grupa $\mathcal{M}(F)$ jest kompleks krzywych $\mathcal{C}(F)$ zdefiniowany przez Harvey'a [35]. Jest to kompleks symplecjalny, którego k -sympleksami są klasy izotopii rodzin $k+1$ parami rozłącznych i parami nieizotopijnych krzywych zamkniętych zwyczajnych na F . Kompleks ten odgrywa kluczową rolę w pracach Harera [31, 32], Ivanova [43] i Wahl [82] dotyczących (ko)homologii $\mathcal{M}(F)$. Po udowodnieniu hiperboliczności $\mathcal{C}(S)$ przez Masura i Minsky'ego [66], badanie grupy klas odwzorowań nabrało nowej dynamiki. W naszym nieorientowalnym przypadku hiperboliczność kompleksu krzywych $\mathcal{C}(N)$ została udowodniona przez Bestvinę i Fujiwarę [7] używając pracy Bowditcha [12], a także, inną metodą, przez Masura i Schleimera [67]. W pracach [H1, H5] użyliśmy działania $\mathcal{M}(N)$ na kompleksie krzywych do wyznaczenia skończonej prezentacji tej grupy.

Pierwsze prace poświęcone w całości grupie klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej, autorstwa Lickorisha [61, 62], Chillingwortha [19] oraz Birman i Chillingwortha [9], powstały jeszcze w latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku. W ciągu następnych trzydziestu lat miał miejsce pewien zastój, zakończony pracami Korkmaza [52, 53] i od tego momentu tematyka grup klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnych cieszy się stale rosnącym zainteresowaniem.

Każda powierzchnia nieorientowalna N dopuszcza nakrycie stopnia dwa powierzchnią orientowalną S . Na mocy twierdzenia Birman-Chillingwortha [9], grupa $\mathcal{M}(N)$ jest izomorficzna z podgrupą nieskończonego indeksu grupy $\mathcal{M}(S)$, składającą się z elementów przemiennych z inwolucją nakrywającą. Ta zależność powoduje, że niektóre własności $\mathcal{M}(S)$ automatycznie przenoszą się na $\mathcal{M}(N)$ - na przykład wszelkiego rodzaju własności rezydualne. Z drugiej strony, nieskończoność indeksu jest poważną przeszkodą w problemach takich jak, na przykład, znalezienie skończonej prezentacji. Tak więc chociaż twierdzenie Birman-Chillingwortha jest bardzo ważne, to jednak jego użyteczność jest ograniczona. Ponadto, wiele rezultatów dotyczących $\mathcal{M}(S)$ w fundamentalny sposób wykorzystuje orientowalność. Tym samym prosta adaptacja do przypadku powierzchni nieorientowalnej nie jest możliwa i wymaga ona nowych pomysłów.

Wiele ważnych twierdzeń o $\mathcal{M}(S)$ doczekało się swoich odpowiedników dla powierzchni nieorientowalnej, jak wspomniane wyżej twierdzenia Harera, Madsena-Weissa i Masura-Minsky'ego, czy też nie mniej słynne twierdzenie Ivanova [46] o automorfizmach $\mathcal{C}(S)$, przeniesione ostatnio na powierzchnie nieorientowalne przez Atalan i Korkmaza [3]. Do niedawna, jednym z głównych wyjątków od powyższej reguły było twierdzenie Wajnryba [83, 86] podające prostą prezentację grupy $\mathcal{M}(S)$ za pomocą generatorów i relacji. Brak takiej prezentacji dla grupy $\mathcal{M}(F)$ został uzupełniony w pracy [H5], co uważam za swoje najważniejsze osiągnięcie.

Na zakończenie tego wstępu przedstawię krótko moje główne wyniki uzyskane w pracach [H1-H5], w kolejności ich ważności według mojej oceny.

- Prace [H1, H5] poświęcone są problemowi wyznaczenia skończonej prezentacji dla grup $\mathcal{M}(N_{g,n})$. W [H1] wyznaczyłem taką prezentację dla $(g, n) = (4, 0)$, a w [H5], wspólnie z L. Parisem dla $n \in \{0, 1\}$ i dowolnego g takiego, że $g + n > 3$. W problemie wyznaczania prezentacji grup $\mathcal{M}(N_{g,n})$ najbardziej istotny jest przypadek $n = 0$, ponieważ zaczynając od prezentacji $\mathcal{M}(N_{g,0})$ można indukcyjnie obliczyć prezentację $\mathcal{M}(N_{g,n})$ dla dowolnego n metodą opartą na ciągu dokładnym Birman, jak w pracy [60] w przypadku powierzchni orientowalnych.
- W pracy [H4] opisałem wszystkie nietrywialne homomorfizmy $\mathcal{M}(N_g) \rightarrow \text{GL}(m, \mathbb{C})$ dla $g \geq 5$ i $m \leq g - 1$. W ten sposób rozszerzyłem, na przypadek powierzchni nieorientowalnej, wyniki uzyskane niedawno przez J. Franka, M. Handela i M. Korkmaza i uzupełniłem opis reprezentacji liniowych niskiego wymiaru grup klas odwzorowań powierzchni. Praca [H4] stanowi istotny wkład do tego opisu, ponieważ dla powierzchni nieorientowalnych sytuacja jest bardziej skomplikowana niż dla powierzchni orientowalnych.

Jako zastosowanie, wykazałem, że dla $h < g$ i $g \geq 5$ dowolny nietrywialny homomorfizm $\mathcal{M}(N_g) \rightarrow \mathcal{M}(N_h)$ ma obraz izomorficzny z \mathbb{Z}_2 lub $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, przy czym ten drugi przypadek jest możliwy tylko dla $g \in \{5, 6\}$.

- Prace [H2, H3] poświęcone są grupie klas odwzorowań poziomu 2, oznaczanej przez $\Gamma_2(N_g)$ i zdefiniowanej jako podgrupa $\mathcal{M}(N_g)$ składająca się z klas izotopii homeomorfizmów indukujących identyczność na $H_1(N_g, \mathbb{Z}_2)$. W [H2] wykazałem, że $\Gamma_2(N_g)$ jest generowana przez tak zwane Y-homeomorfizmy zdefiniowane przez Lickorisha w 1963 r., a także jest generowana przez involucje (elementy rzędu 2). W [H3] znalazłem skończony zbiór generujący tę grupę.

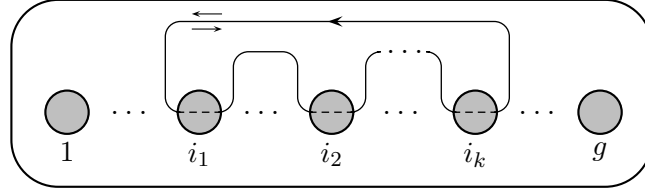
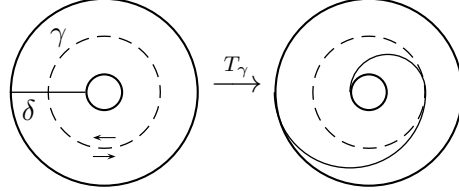
W dalszej części autoreferatu opisze powyższe wyniki bardziej szczegółowo, na tle rezultatów innych autorów.

2.2. Prezentacja za pomocą generatorów i relacji. [H1, H5]

McCool [70] podał pierwszy algorytm wyznaczenia skończonej prezentacji grupy $\mathcal{M}(S_{g,1})$. Jego podejście było czysto algebraiczne i za pomocą tego algorytmu nie uzyskano jawnej prezentacji. W przełomowej pracy [37] Hatcher i Thurston podali algorytm obliczenia skończonej prezentacji tej grupy oparty na jej działaniu na pewnym jednorodnym 2-wymiarowym CW-kompleksie. Za pomocą tego algorytmu, Harer [30] wyznaczył skończoną, ale bardzo skomplikowaną prezentację $\mathcal{M}(S_{g,1})$ dla dowolnego g . Ta prezentacja została następnie uproszczona przez Wajnryba [83, 86], który również znalazł prezentację $\mathcal{M}(S_{g,0})$. Używając rezultatu Wajnryba, Matsumoto [68] podał inne prezentacje $\mathcal{M}(S_{g,1})$ i $\mathcal{M}(S_{g,0})$, a Gervais [26] wyznaczył prezentację $\mathcal{M}(S_{g,n})$ dla dowolnych $g \geq 1$ i n . Labruère i Paris [60] znaleźli skończoną prezentację $\mathcal{M}(S_{g,n}, P)$ dla dowolnych $g \geq 1$, n i P . Benvenuti [6] i Hirose [38] pokazali niezależnie, jak można otrzymać prezentację Gervais używając działania $\mathcal{M}(S_{g,n})$ na kompleksie krzywych Harvey'a, zamiast kompleksu Hatcher-Thurstona.

Jeśli chodzi o prezentacje $\mathcal{M}(N_{g,n})$, to przed pracami [H1, H5] były one znane tylko dla kilku powierzchni nieorientowalnych rodzaju $g \leq 3$, w tym $\mathcal{M}(N_{2,0}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ [61] i $\mathcal{M}(N_{3,0}) \cong \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ [9, 27]. Używając wyników Lickorisha [61, 62] Chillingworth [19] podał skończony zbiór generujący $\mathcal{M}(N_{g,0})$ dla dowolnego $g \geq 3$. Ten wynik został uogólniony na powierzchnie nieorientowalne z wyróżnionymi punktami [53] i z brzegiem [77].

W celu sformułowania głównego wyniku prac [H1, H5] ustalmy model powierzchni nieorientowalnej. Dla $N_{g,1}$ (odpowiednio $N_{g,0}$) będzie to 2-wymiarowy dysk (odp. sfera), z którego wycięto wewnątrz g parami rozłącznych dysków, a następnie utożsamiono punkty antypodyczne na każdej z powstałych składowych brzegu, lub równoważnie: wklejono wstęgi Möbiusa w miejsca usuniętych dysków. Na Rysunku 1 wewnątrz usuniętych dysków są zacieniowane i ponumerowane od 1 do g . Dla dowolnego niepustego podzbioru $I \subseteq \{1, 2, \dots, g\}$ niech γ_I oznacza krzywą zamkniętą zwyczajną na N przedstawioną na Rysunku 1. Zauważmy, że taka krzywa jest jednostronna jeśli I ma nieparzystą liczbę elementów, a w przeciwnym

RYSUNEK 1. Krzywa γ_I dla $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$.RYSUNEK 2. Twist Dehna względem dwustronnej krzywej γ .

wypadku - dwustronna. Z każdą dwustronną krzywą zamkniętą zwyczajną γ na N można stowarzyszyć twist Dehna względem γ , czyli klasę izotopii homeomorfizmu zdefiniowanego następująco. Wybieramy zorientowane domknięte otoczenie regularne $A \subset N$ krzywej γ , które utożsamiamy ze standardowym walcem $S^1 \times [0, 1]$. Twist Dehna T_γ jest równy identyczności poza A , natomiast jego działanie na A jest takie, jak na Rysunku 2: odcinek δ jest przekształcany w spiralny łuk, zgodnie ze wzorem

$$T_\gamma(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \notin A \\ (e^{2i\pi(\theta+r)}, r) & \text{dla } x = (e^{2i\pi\theta}, r) \in A = S^1 \times [0, 1]. \end{cases}$$

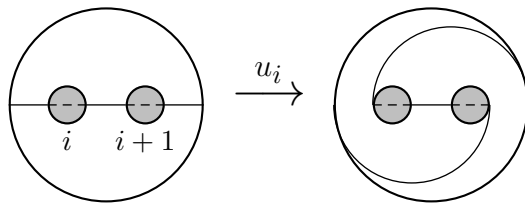
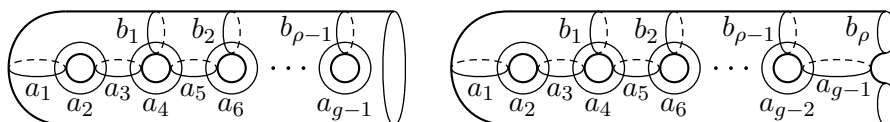
Dla $I \subseteq \{1, 2, \dots, g\}$ o parzystej liczbie elementów oznaczamy przez T_I twist Dehna względem γ_I w kierunku oznaczonym strzałkami na Rysunku 1. Przyjmijmy też oznaczenia:

$$\begin{aligned} a_i &= T_{\{i, i+1\}} \text{ dla } i = 1, 2, \dots, g-1; \\ b_j &= T_{\{1, 2, \dots, 2j+2\}} \text{ dla } 1 \leq j \leq (g-2)/2. \end{aligned}$$

Dla $i = 1, 2, \dots, g-1$ definiujemy homeomorfizm u_i zamieniający miejscami dwie kolejne wstęgi Möbiusa jak na Rysunku 3 i równy identyczności na zewnątrz butelki Kleina z brzegiem zawierającej te wstęgi. Klasę izotopii u_i oznaczamy tym samym symbolem i nazywamy crosscap transposition. Jesteśmy już gotowi do sformułowania głównych wyników pracy [H5].

Twierdzenie 1 (Paris-Szepietowski [H5, Theorem 3.5]). *Dla $g \geq 3$ grupa $\mathcal{M}(N_{g,1})$ posiada prezentację o generatorach u_i, a_i dla $1 \leq i \leq g-1$, b_j dla $0 \leq j \leq (g-2)/2$ i relacjach:*

- (A1) $a_i a_j = a_j a_i$ dla $|i - j| > 1$,
- (A2) $a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1}$ dla $1 \leq i \leq g-2$,
- (A3) $a_i b_1 = b_1 a_i$ dla $i \neq 4$ jeśli $g \geq 4$,

RYSUNEK 3. Crosscap transposition u_i .RYSUNEK 4. Krzywe na orientowalnej podpowierzchni rodzaju $\rho = \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$ definiujące generatory a_i, b_j .

- (A4) $b_1 a_4 b_1 = a_4 b_1 a_4$ jeśli $g \geq 5$,
- (A5) $(a_2 a_3 a_4 b_1)^{10} = (a_1 a_2 a_3 a_4 b_1)^6$ jeśli $g \geq 5$,
- (A6) $(a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 b_1)^{12} = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 b_1)^9$ jeśli $g \geq 7$,
- (A7) $b_0 = a_1$,
- (A8) $b_{i+1} = (b_{i-1} a_{2i} a_{2i+1} a_{2i+2} a_{2i+3} b_i)^5 (b_{i-1} a_{2i} a_{2i+1} a_{2i+2} a_{2i+3})^{-6}$
dla $2 \leq 2i \leq g-4$,
- (A9) $b_{\frac{g-2}{2}} a_{g-5} = a_{g-5} b_{\frac{g-2}{2}}$ jeśli g jest parzyste i $g > 6$,
- (A10) $b_2 b_1 = b_1 b_2$ jeśli $g = 6$.
- (B1) $u_i u_j = u_j u_i$ dla $|i-j| > 1$,
- (B2) $u_i u_{i+1} u_i = u_{i+1} u_i u_{i+1}$ dla $i = 1, \dots, g-2$.
- (C1) $a_1 u_i = u_i a_1$ dla $i = 3, \dots, g-1$,
- (C2) $a_i u_{i+1} u_i = u_{i+1} u_i a_{i+1}$ dla $i = 1, \dots, g-2$,
- (C3) $a_{i+1} u_i u_{i+1} = u_i u_{i+1} a_i$ dla $i = 1, \dots, g-2$,
- (C4) $a_1 u_1 a_1 = u_1$,
- (C5) $u_2 a_1 a_2 u_1 = a_1 a_2$,
- (C6) $(u_3 b_1)^2 = (a_1 a_2 a_3)^2 (u_1 u_2 u_3)^2$ jeśli $g \geq 4$,
- (C7) $u_5 b_1 = b_1 u_5$ jeśli $g \geq 6$,
- (C8) $a_4 u_4 (a_4 a_3 a_2 a_1 u_1 u_2 u_3 u_4) b_1 = b_1 a_4 u_4$ jeśli $g \geq 5$.

Twisty Dehna a_i, b_j są zdefiniowane przy pomocy krzywych leżących na orientowalnej podpowierzchni homeomorficznej z $S_{\rho,r}$, gdzie $r \in \{1, 2\}$ i $g = 2\rho + r$ (Rys. 4). Generatory te, wraz z relacjami (A1-A10) stanowią prezentację grupy $\mathcal{M}(S_{\rho,r})$ [H5, Theorem 3.1]. Gdy g jest nieparzyste, to relacji (A9) i (A10) nie ma i można usunąć z prezentacji generatory b_j dla $j = 0$ i $j > 1$ oraz relacje (A7, A8). Pozostałe generatory $a_i, i = 1, \dots, g-1$ i b_1 wraz z relacjami (A1-A6) stanowią prezentację $\mathcal{M}(S_{\rho,1})$ znalezioną przez Matsumoto [68]. Gdy g jest parzyste, to

tak samo można wyrugować b_j dla $j \neq 1$. Jednak wówczas w relacjach (A9, A10) $b_{\frac{g-2}{2}}$ musiałyby być zastąpione przez odpowiednie wyrażenie w generatorach a_i i b_1 . Znalezienie takiego jawnego wyrażenia znacznie uprościłoby naszą prezentację.

Generatory u_i , $i = 1, \dots, g-1$ wraz z relacjami (B1, B2) tworzą dobrze znaną prezentację grupy warkoczy B_g . Tak więc Twierdzenie 1 mówi, że $\mathcal{M}(N_{g,1})$ jest izomorficzna z grupą ilorazową powstającą przez podzielenie produktu wolnego $\mathcal{M}(S_{\rho,r}) * B_g$ przez relacje (C1-C8). Aby otrzymać prezentację $\mathcal{M}(N_{g,0})$ należy dodać jeszcze trzy relacje.

Twierdzenie 2 (Paris-Szepietowski [H5, Theorem 3.6]). *Dla $g \geq 4$ grupa $\mathcal{M}(N_{g,0})$ jest izomorficzna z grupą ilorazową powstającą przez podzielenie $\mathcal{M}(N_{g,1})$, o prezentacji danej w Twierdzeniu 1, przez relacje:*

$$(B3) \quad (u_1 u_2 \cdots u_{g-1})^g = 1,$$

$$(B4) \quad (u_1 u_2 \cdots u_{g-2})^{g-1} = 1.$$

$$(D) \quad a_1(a_2 a_3 \cdots a_{g-1} u_{g-1} \cdots u_3 u_2) a_1 = a_2 a_3 \cdots a_{g-1} u_{g-1} \cdots u_3 u_2.$$

Przyjmując $g = 4$ w Twierdzeniu 2 otrzymujemy prezentację grupy $\mathcal{M}(N_{4,0})$ różniącą się od tej podanej w [H1, Theorem 2.1]. W [H5, Section 4] pokazaliśmy, że te prezentacje są równoważne, wykonując w ten sposób krok bazowy indukcyjnego dowodu Twierdzenia 2. Tak więc można powiedzieć, że praca [H1] zawiera część dowodu Twierdzenia 2.

Dowody Twierdzeń 1 i 2 są indukcyjne względem rodzaju g , przy czym Twierdzenie 1 dowodzimy przy założeniu, że prawdziwe jest Twierdzenie 2. Dowód Twierdzenia 2 wykorzystuje twierdzenie K.S. Browna [16] umożliwiające wyliczenie skończonej prezentacji grupy, która działa na jednospójnym CW-kompleksie X permutując jego komórki, przy założeniu, że:

- stabilizator każdego wierzchołka X ma skończoną prezentację;
- stabilizator każdej krawędzi X jest skończenie generowany;
- liczba orbit komórek wymiaru ≤ 2 jest skończona.

Twierdzenie Browna stosujemy do działania $\mathcal{M}(N)$, gdzie $N = N_{g,0}$, $g \geq 4$, na uporządkowanym kompleksie krzywych $\mathcal{C}^{\text{ord}}(N)$, zdefiniowanym w [6] podobnie do kompleksu krzywych Harvey'a. Dwie uporządkowane k -krotki parami rozłącznych i nieizotopijnych krzywych zamkniętych zwyczajnych na N , $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ i $(\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_k)$, są równoważne, jeśli γ_i i γ'_i są izotopijne (jako nieorientowane krzywe) dla $i = 1, \dots, k$. Klasy równoważności takich k -krotek są $(k-1)$ -sympleksami kompleksu $\mathcal{C}^{\text{ord}}(N)$. Uzyskanie prezentacji $\mathcal{M}(N)$ używając działania tej grupy na $\mathcal{C}^{\text{ord}}(N)$ wymaga obliczenia prezentacji stabilizatorów wierzchołków, wybierając po jednym reprezentancie z każdej orbity wierzchołków. Stabilizator $\text{Stab}_{\mathcal{M}(N)}[\gamma]$ wierzchołka $[\gamma]$ jest bardzo bliski grupie klas odwzorowań powierzchni N_γ powstającej przez rozcięcie N wzdłuż krzywej γ . Dzięki temu, łatwo obliczyć prezentację $\text{Stab}_{\mathcal{M}(N)}[\gamma]$ znając prezentację $\mathcal{M}(N_\gamma)$, która z kolei może być obliczona rekurencyjnie, ponieważ N_γ ma niższy rodzaj niż N . Sytuację komplikuje nieco fakt, że N_γ ma niepusty brzeg, w przeciwieństwie do N .

W pracy [P4] zaproponowałem algorytm wyznaczania prezentacji $\mathcal{M}(N)$, oparty na powyższym twierdzeniu Browna. Prezentacja będąca jego wynikiem jest skończona, ale olbrzymia; zawiera obliczane rekurencyjnie prezentacje stabilizatorów wierzchołków kompleksu $\mathcal{C}^{\text{ord}}(N)$ oraz wiele relacji związanych z sympleksami wymiaru 1 i 2. Aby otrzymać jawną prezentację $\mathcal{M}(N)$ o rozsądnej liczbie generatorów i relacji trzeba ten algorytm stosować w subtelny sposób, dbając o to, żeby prezentacje otrzymywane w krokach pośrednich nie były zbyt duże. W pracy [H1] udało się to zrobić dla $g = 4$, a ostateczny cel, to znaczy jawna prezentacja $\mathcal{M}(N_g)$ dla dowolnego g , został osiągnięty w pracy [H5]. Dzięki temu, że przypadek $g = 4$ został rozpatrzony we wcześniejszej pracy [H1], w [H5] mogliśmy użyć przełomowego pomysłu polegającego na zastąpieniu kompleksu $\mathcal{C}^{\text{ord}}(N)$ jego podkompleksem zbudowanym tylko z krzywych nierozdzielających, który jest jednopójny dla $g \geq 5$. W przypadku $g \geq 7$ użyliśmy jeszcze mniejszego podkompleksu, co znacząco zmniejszyło prezentację wynikającą z twierdzenia Browna.

Wychodząc od prezentacji $\mathcal{M}(N_{g,0})$ można indukcyjnie obliczyć prezentację grupy $\mathcal{M}(N_{g,n}, P)$ dla dowolnych n i P metodą opartą na ciągu dokładnym Birman, jak w pracy [60] w przypadku powierzchni orientowalnych. Znalezienie takiej prezentacji w ogólnym przypadku jest ciekawym wyzwaniem badawczym.

Z prezentacji podanych w Twierdzeniach 1 i 2 można dosyć łatwo wyrugować generatory u_i dla $i > 1$. Zrobił to Stukow [78] otrzymując w ten sposób prezentacje $\mathcal{M}(N_{g,1})$ i $\mathcal{M}(N_{g,0})$ z mniejszą liczbą generatorów i relacji, a przy ich pomocy obliczył pierwszą grupę homologii $\mathcal{M}(N_{g,n})$ o współczynnikach w $H_1(N_{g,n}; \mathbb{Z})$ dla $n \leq 1$ [79]. Niedawno w repozytorium arXiv pojawił się ciekawy preprint Omori [72], zawierający nieskończone prezentacje grup $\mathcal{M}(N_{g,1})$ i $\mathcal{M}(N_{g,0})$ z bardzo prostymi relacjami. Generatorami w tych prezentacjach są wszystkie twisty Dehna oraz wszystkie Y-homeomorfizmy (nazywane również *crosscap slides*, o których piszę poniżej w paragrafie 2.4). Dowód głównego wyniku pracy [72] korzysta z prezentacji Stukowa [78], a więc pośrednio również z Twierdzeń 1 i 2.

Warto dodać, że nie jest możliwa prezentacja $\mathcal{M}(N_{g,n})$, w której wszystkie generatory byłyby twistami Dehna. Istotnie, podgrupa $\mathcal{M}(N_{g,n})$ generowana przez wszystkie twisty Dehna ma indeks 2 [62, 76].

2.3. Reprezentacje liniowe i inne homomorfizmy. [H4]

Działanie grupy $\mathcal{M}(S_{g,n})$ na $H_1(S_g, \mathbb{Z})$ zachowuje algebraiczny indeks przecięcia, który jest formą symplektyczną. Indukowany surjektywny homomorfizm

$$\Phi: \mathcal{M}(S_{g,n}) \rightarrow \text{Sp}(2g, \mathbb{Z}),$$

nazywany standardową reprezentacją symplektyczną, jest jednym z ważniejszych narzędzi do badania grupy klas odwzorowań powierzchni orientowalnej. W ostatnich latach J. Franks, M. Handel i M. Korkmaz [23, 57, 58] udowodnili, że dla $g \geq 3$ najmniejszym stopniem nietrywialnej reprezentacji $\mathcal{M}(S_{g,n}) \rightarrow \text{GL}(m, \mathbb{C})$ jest $m = 2g$, a standardowa reprezentacja symplektyczna jest jedyną, z dokładnością do sprzężenia w \mathbb{C} , zespoloną reprezentacją $\mathcal{M}(S_{g,n})$ wymiaru $2g$. W pracy

[H4] udowodniłem analogiczne twierdzenia dla grupy klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej.

Mówimy, że dwa homomorfizmy f_1, f_2 z grupy G do H są sprzężone, jeśli istnieje takie $y \in H$, że $f_1(x) = yf_2(x)y^{-1}$ dla każdego $x \in G$. Obraz homomorfizmu f oznaczamy przez $\text{Im}(f)$.

Ustalmy podwójne nakrycie $P: S_{g-1} \rightarrow N_g$. Na mocy twierdzenia Birman i Chillingwortha [9] $\mathcal{M}(N_g)$ jest izomorficzna z podgrupą $\mathcal{M}(S_{g-1})$ złożoną z zachowujących orientację podniesień homeomorfizmów N_g . Stąd mamy działanie $\mathcal{M}(N_g)$ na $H_1(S_{g-1}, \mathbb{Z})$. Oznaczmy przez K_g jądro homomorfizmu $P_*: H_1(S_{g-1}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(N_g, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$ indukowanego przez nakrycie P , gdzie \mathbb{Z}_2 oznacza podgrupę torsyjną $H_1(N_g, \mathbb{Z})$. Grupa K_g jest niezmiennicza względem działania $\mathcal{M}(N_g)$ na $H_1(S_{g-1}, \mathbb{Z})$. Ponadto, K_g i $H_1(S_{g-1}, \mathbb{Z})/K_g$ są wolnymi \mathbb{Z} -modułami rangi $g-1$, a zatem otrzymujemy dwie reprezentacje $\mathcal{M}(N_g)$ stopnia $g-1$

$$\Psi_1: \mathcal{M}(N_g) \rightarrow \text{GL}(K_g), \quad \Psi_2: \mathcal{M}(N_g) \rightarrow \text{GL}(H_1(S_{g-1}, \mathbb{Z})/K_g),$$

które, po ustaleniu baz, traktujemy jako homomorfizmy w $\text{GL}(g-1, \mathbb{C})$. Są one niesprzężone, chociaż $\ker \Psi_1 = \ker \Psi_2$ [H4, Lemma 4.1]. Pierwszy rezultat pracy [H4] mówi, że $g-1$ jest najmniejszym stopniem nietrywialnej (nieabelowej) reprezentacji $\mathcal{M}(N_g)$.

Twierdzenie 3 (Szepietowski [H4, Theorem 1.3]). *Niech $n \leq 1$, $g \geq 5$, $m \leq g-2$ i założymy, że $f: \mathcal{M}(N_{g,n}) \rightarrow \text{GL}(m, \mathbb{C})$ jest nietrywialnym homomorfizmem. Wtedy $\text{Im}(f)$ jest izomorficzne z \mathbb{Z}_2 lub $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, przy czym drugi przypadek jest możliwy tylko dla $g = 5$ lub 6 .*

Powyższy rezultat został wcześniej udowodniony przez Korkmaza [57] przy dodatkowym założeniu, że $m \leq g-3$ jeśli g jest parzyste. Nowość Twierdzenia 3 polega na tym, że obejmuje ono również przypadek $m = g-2$ dla parzystego g . Jako zastosowanie Twierdzenia 3 udowodniłem następujący rezultat, który stanowi rozwiązanie Problemu 3.3 z [56].

Twierdzenie 4 (Szepietowski [H4, Theorem 1.4]). *Założmy, że $g \geq 5$, $h < g$ i $f: \mathcal{M}(N_g) \rightarrow \mathcal{M}(N_h)$ jest nietrywialnym homomorfizmem. Wtedy $\text{Im}(f)$ jest jak w Twierdzeniu 3.*

Analogiczne twierdzenie dla grup klas odwzorowań zamkniętych powierzchni orientowalnych udowodnili Harvey i Korkmaz [36]. Zarówno Twierdzenie 3 jak i 4 nie zachodzą dla $g = 4$, ponieważ pokazałem, że istnieje homomorfizm z $\mathcal{M}(N_4)$ do $\mathcal{M}(N_3) \cong \text{GL}(2, \mathbb{Z})$, którego obraz jest nieskończoną grupą diedralną [H4, Corollary 6.2]. Do skonstruowania takiego homomorfizmu użyłem prezentacji grupy $\mathcal{M}(N_4)$ z prac [H1, H5].

Założmy, że $g \geq 7$. Wtedy abelianizacja $\mathcal{M}(N_g)$ jest izomorficzna z \mathbb{Z}_2 [52]. Oznaczamy przez $\text{ab}: \mathcal{M}(N_g) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ kanoniczne rzutowanie i dla $i = 1, 2$ definiujemy $\Psi'_i: \mathcal{M}(N_g) \rightarrow \text{GL}(g-1, \mathbb{C})$ wzorem $\Psi'_i(x) = (-1)^{\text{ab}(x)}\Psi_i(x)$ dla $x \in \mathcal{M}(N_g)$. Kolejny rezultat pracy [H4] jest następujący.

Twierdzenie 5 (Szepietowski [H4, Theorem 1.5]). *Niech $g \geq 7$, $g \neq 8$ i załóżmy, że $f: \mathcal{M}(N_g) \rightarrow \mathrm{GL}(g-1, \mathbb{C})$ jest nietrywialnym homomorfizmem. Wtedy albo $\mathrm{Im}(f) \cong \mathbb{Z}_2$, albo f jest sprzężony z jednym z homomorfizmów $\Psi_1, \Psi'_1, \Psi_2, \Psi'_2$.*

Dla $g = 8$ udowodniłem analogiczne twierdzenie [H4, Theorem 1.6]. W tym przypadku mamy dodatkowy homomorfizm $\mathcal{M}(N_8) \rightarrow \mathrm{GL}(7, \mathbb{C})$ wynikający z faktu, że istnieje epimorfizm z $\mathcal{M}(N_8)$ na $\mathrm{Sp}(6, \mathbb{Z}_2)$, a ostatnia grupa ma nieprzywiedlną reprezentację w $\mathrm{GL}(7, \mathbb{C})$.

2.4. Grupa klas odwzorowań poziomu 2. [H2, H3]

Składając standardową reprezentację symplektyczną grupy $\mathcal{M}(S_g)$ z homomorfizmem redukcji modulo m , dla pewnej liczby naturalnej $m \geq 2$, otrzymujemy surjektywną reprezentację $\mathcal{M}(S_g) \rightarrow \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}_m)$, której jądro oznaczamy przez $\Gamma_m(S_g)$ i nazywamy grupą klas odwzorowań poziomu m powierzchni S_g . Grupa $\Gamma_m(S_g)$ może być również opisana jako grupa klas izotopii homeomorfizmów S_g działających trywialnie na $H_1(S_g, \mathbb{Z}_m)$. Podsumowując, mamy krótki ciąg dokładny

$$1 \rightarrow \Gamma_m(S_g) \rightarrow \mathcal{M}(S_g) \rightarrow \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}_m) \rightarrow 1.$$

Grupy $\Gamma_m(S_g)$ były intensywnie badane, między innymi przez Haina [29] i Ivanowa [45], a z nowszych rezultatów warto wspomnieć obliczenie ich abelianizacji [74, 75].

W przypadku powierzchni nieorientowalnej N_g , algebraiczny indeks przecięcia na $H_1(N_g, \mathbb{Z})$ jest zdefiniowany jedynie modulo 2. Z tego powodu bardzo naturalnie jest rozważać działanie $\mathcal{M}(N_g)$ na $H_1(N_g, \mathbb{Z}_2)$ i jego jądro $\Gamma_2(N_g)$. Grupę automorfizmów $H_1(N_g, \mathbb{Z}_2)$ zachowujących algebraiczny indeks przecięcia oznaczamy, za Korkmazem [52], przez $\mathrm{Iso}(H_1(N_g, \mathbb{Z}_2))$. Wybierając standardową bazę $H_1(N_g, \mathbb{Z}_2)$ otrzymujemy izomorfizm

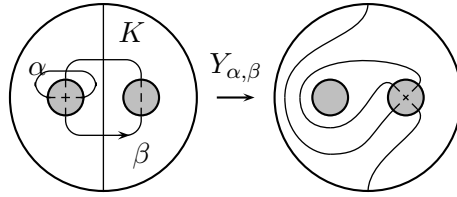
$$\mathrm{Iso}(H_1(N_g, \mathbb{Z}_2)) \cong \{A \in \mathrm{GL}(g, \mathbb{Z}_2) \mid AA^t = I\}.$$

McCarthy i Pinkall [69] oraz Gadgil i Pancholi [24] wykazali, że odwzorowanie $\mathcal{M}(N_g) \rightarrow \mathrm{Iso}(H_1(N_g, \mathbb{Z}_2))$ jest surjekcją. Mamy zatem krótki ciąg dokładny

$$1 \rightarrow \Gamma_2(N_g) \rightarrow \mathcal{M}(N_g) \rightarrow \mathrm{Iso}(H_1(N_g, \mathbb{Z}_2)) \rightarrow 1.$$

Prace [H2, H3] poświęcone są grupie $\Gamma_2(N_g)$. Do sformułowania zawartych w nich wyników potrzebne jest pojęcie Y -homeomorfizmu.

W odróżnieniu od $\mathcal{M}(S_g)$, grupa $\mathcal{M}(N_g)$ nie jest generowana przez twisty Dehna. Udowodnił to Lickorish [61], który podał pierwszy przykład elementu $\mathcal{M}(N_g)$, który nie jest iloczynem twistów. Jest to Y -homeomorfizm, nazywany także *crosscap slide*. Załóżmy, że $g \geq 2$ i α i β są dwiema krzywymi zamkniętymi zyczejnymi na N_g , przecinającymi się transwersalnie w jednym punkcie, gdzie α jest jednostronna, a β dwustronna. Niech $K \subset N_g$ będzie otoczeniem regularnym $\alpha \cup \beta$, homeomorficznym z butelką Kleina z brzegiem. Oznaczmy przez M wstęgę Möbiusa będącą otoczeniem regularnym krzywej α . Y -homeomorfizm $Y_{\alpha, \beta}$ może być opisany jako efekt przeciągnięcia M jeden raz wzdłuż krzywej β , zachowując przy tym każdy punkt na brzegu K (Rys.5).



RYSUNEK 5. Y-homeomorfizm lub crosscap slide.

Lickorish wykazał, że dla $g \geq 2$ grupa $\mathcal{M}(N_g)$ jest generowana przez twisty Dehna i jeden Y-homeomorfizm, a podgrupa generowana przez wszystkie twisty ma indeks 2 [61, 62]. Oznaczmy przez $\mathcal{Y}(N_g)$ podgrupę $\mathcal{M}(N_g)$ generowaną przez wszystkie Y-homeomorfizmy. Jak łatwo sprawdzić, każdy Y-homeomorfizm indukuje identyczność na $H_1(N_g, \mathbb{Z}_2)$, a zatem $\mathcal{Y}(N_g) \subseteq \Gamma_2(N_g)$. W pracy [H2] wykazałem, że zachodzi równość $\mathcal{Y}(N_g) = \Gamma_2(N_g)$.

Twierdzenie 6 (Szepietowski [H2, Theorem 5.5]). *Niech $g \geq 2$. Element $f \in \mathcal{M}(N_g)$ indukuje identyczność na $H_1(N_g, \mathbb{Z}_2)$ wtedy i tylko wtedy gdy f jest iloczynem Y-homeomorfizmów.*

W szczególności, $\mathcal{Y}(N_g)$ jest właściwą podgrupą $\mathcal{M}(N_g)$ skończonego indeksu. Dla $I, J \subseteq \{1, 2, \dots, g\}$ oznaczmy Y_{γ_I, γ_J} przez $Y_{I, J}$, gdzie γ_I, γ_J są krzywymi z Rysunku 1, zakładając, że krzywe te spełniają założenia definicji Y-homeomorfizmu. Wykazałem, że $\mathcal{Y}(N_g)$ jest domknięciem normalnym w $\mathcal{M}(N_g)$ jednego Y-homeomorfizmu $Y_{\{1\}; \{1, 2\}}$ [H2, Lemma 3.6], który jest iloczynem dwóch inwolucji należących do $\mathcal{Y}(N_g)$. W ten sposób udowodniłem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7 (Szepietowski [H2, Theorem 3.7 i Corollary 5.7]). *Dla $g \geq 2$ grupa $\Gamma_2(N_g)$ jest generowana przez inwolucje.*

Z ostatniego twierdzenia wynika, że abelianizacja grupy $\Gamma_2(N_g)$ jest \mathbb{Z}_2 -modułem.

Ponieważ $\mathcal{M}(N_g)$ jest skończenie generowana, $\Gamma_2(N_g)$ również jest skończenie generowana, jako podgrupa skończonego indeksu. Wobec tego, naturalnym problemem jest znalezienie skończonego zbioru generującego dla $\Gamma_2(N_g)$. Problem ten rozwiązałem w pracy [H3], której główny wynik jest następujący.

Twierdzenie 8 (Szepietowski [H3, Theorem 3.2]). *Dla $g \geq 3$, grupa $\Gamma_2(N_g)$ jest generowana przez następujące elementy:*

- (1) $Y_{\{i\}; \{i, j\}}$ dla $i \in \{1, 2, \dots, g-1\}$, $j \in \{1, 2, \dots, g\}$, $i \neq j$;
- (2) $Y_{\{i, j, k\}; \{i, j, k, l\}}$ dla $i < j < k < l$, jeśli $g \geq 4$.

Dla uzupełnienia dodajmy, że $\Gamma_2(N_1) = \mathcal{M}(N_1) = \{1\}$ i $\Gamma_2(N_2) \cong \mathbb{Z}_2$.

W Twierdzeniu 8, każdy generator $Y_{\{i, j, k\}; \{i, j, k, l\}}$ typu (2) może być zastąpiony przez $T_{\{i, j, k, l\}}^2$, gdzie $T_{\{i, j, k, l\}}$ jest twistem Dehna względem $\gamma_{\{i, j, k, l\}}$ [H3, Remark 3.9]. Zauważmy, że jest $(g-1)^2$ generatorów typu (1) i $\binom{g}{4}$ generatorów typu (2). W ostatniej części pracy [H3] wykazałem, że liczba generatorów $\Gamma_2(N_g)$ z Twierdzenia 8 jest minimalna dla $g = 3$ i 4. Działanie $\mathcal{M}(N_3)$ na $H_1(N_3, \mathbb{Z})$ indukuje

izomorfizm $\mathcal{M}(N_3) \rightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$, który przeprowadza $\Gamma_2(N_3)$ na główną podgrupę kongruencyjną poziomu 2 grupy $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ [H3, Corollary 4.2]. Następujące twierdzenie mówi, że liczba generatorów $\Gamma_2(N_4)$ z Twierdzenia 8 jest równa randze abelianizacji tej grupy, a więc jest minimalna.

Twierdzenie 9 (Szepietowski [H3, Theorem 4.3]). *Grupa $H_1(\Gamma_2(N_4), \mathbb{Z})$ jest izomorficzna z \mathbb{Z}_2^{10} .*

Dowód Twierdzenia 9 wykorzystuje Twierdzenia 7 i 8, a także prezentację grupy $\mathcal{M}(N_4)$ z pracy [H1]. Dla $g > 4$ zbiór generujący $\Gamma_2(N_g)$ z Twierdzenia 8 nie jest minimalny. Hirose i Sato [41] pokazali, że zawiera on podzbiór mocy $\binom{g+1}{3}$, który również generuje $\Gamma_2(N_g)$, a następnie udowodnili, że $H_1(\Gamma_2(N_g), \mathbb{Z})$ ma rangę równą $\binom{g+1}{3}$, co stanowi uogólnienie powyższego Twierdzenia 9. Do obliczenia abelianizacji $\Gamma_2(N_g)$ Hirose i Sato wykorzystali moje Twierdzenia 7 i 8.

Praca [H2] zawiera ważną konstrukcję homomorfizmu *crosscap pushing map*

$$\psi: \pi_1(N_{g-1}, x_0) \rightarrow \mathcal{M}(N_g),$$

gdzie N_{g-1} powstaje przez wycięcie z N_g wstęgi Möbiusa i zastąpienie jej dyskiem z wyróżnionym punktem x_0 . Gdy $\alpha \in \pi_1(N_{g-1}, x_0)$ jest klasą homotopii reprezentowaną przez krzywą zwyczajną, to $\psi(\alpha)$ jest albo Y-homeomorfizmem, gdy α jest jednostronna, albo iloczynem dwóch twistów, gdy α jest dwustronna. Pozwala to na otrzymywanie w $\mathcal{M}(N_g)$ relacji postaci

$$(1) \quad \psi(\alpha\beta) = \psi(\alpha)\psi(\beta),$$

gdzie po obu stronach występują Y-homeomorfizmy lub twisty, o ile α , β i $\alpha\beta$ są reprezentowane przez krzywe zwyczajne (uwaga: tutaj iloczyn $\alpha\beta$ w $\pi_1(N_{g-1}, x_0)$ oznacza najpierw β , a potem α). W ten sposób uzyskano niektóre relacje występujące w skończonych prezentacjach grup $\mathcal{M}(N_g)$ i $\mathcal{M}(N_{g,1})$ znalezionych w pracach [H5] i [78]. Co więcej, (1) jest jedną z relacji definiujących w nieskończonej prezentacji Omori [72]. Homomorfizm ψ jest podstawowym narzędziem służącym do badania Y-homeomorfizmów, wykorzystanym w pracach [H2, H3], a także w pracach innych autorów, między innymi w [42] oraz we wspomnianych powyżej pracach [72, 78]. Sądzę, że narzędzie to ma duży potencjał, ponieważ badanie Y-homeomorfizmów jest ważną częścią teorii grupy klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej.

Grupę $\Gamma_2(N_g)$ można widzieć jako pewne przybliżenie podgrupy Torelli $\mathcal{I}(N_g)$ składającej się z elementów $\mathcal{M}(N_g)$ indukujących identyczność na $H_1(N_g, \mathbb{Z})$. Z jednej strony jest to przybliżenie bardzo niedokładne, bo $\mathcal{I}(N_g)$ jest podgrupą $\Gamma_2(N_g)$ nieskończonego indeksu. Z drugiej strony jednak, skończony zbiór generujący $\Gamma_2(N_g)$ występujący w Twierdzeniu 8 i zredukowany w [41] stanowi jeden ze składników wyjściowych dowodu głównego twierdzenia pracy [42], w której Hirose i Kobayashi znaleźli pewien nieskończony zbiór generujący $\mathcal{I}(N_g)$. Wynik ten jest analogiczny do klasycznego twierdzenia Powella [73] o generatorach grupy Torelli powierzchni orientowalnej. Warto dodać, że do tej pory nie jest znany żaden skończony zbiór generujący $\mathcal{I}(N_g)$.

Twierdzenia 6 i 8 zostały także wykorzystane w dowodzie głównego twierdzenia pracy [40], podającego warunek konieczny i wystarczający na to, żeby homeomorfizm powierzchni nieorientowalnej, zanurzonej w pewien standardowy sposób w 4-wymiarowej sferze S^4 , rozszerzał się do homeomorfizmu S^4 .

3. POZOSTAŁE OSIĄGNIĘCIA NAUKOWO-BADAWCZE

3.1. Prace przed uzyskaniem doktoratu:

- [P1] B. Szepietowski, Mapping class group of a non-orientable surface and moduli space of Klein surfaces, *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Paris, Ser. I* 335 (2002) 1053–1056.
- [P2] B. Szepietowski, Involutions in mapping class groups of non-orientable surfaces, *Collectanea Mathematica* 55, 3 (2004), 253–260.
- [P3] B. Szepietowski, The mapping class group of a nonorientable surface is generated by three elements and by four involutions, *Geometriae Dedicata* 117 (2006), 1–9.
- [P4] B. Szepietowski, A presentation for the mapping class group of a non-orientable surface from the action on the complex of curves, *Osaka Journal of Mathematics* 45 (2008), 283–326.

3.2. Prace po uzyskaniu doktoratu:

- [P5] B. Szepietowski, On the commutator length of a Dehn twist, *Comptes Rendus Mathematique* 348 (2010), 923–926.
- [P6] E. Bujalance, F. J. Cirre, M. D. E. Conder, B. Szepietowski, Finite group actions on bordered surfaces of small genus, *Journal of Pure and Applied Algebra* 214 (2010), 2165–2185.
- [P7] B. Szepietowski, Embedding the braid group in mapping class groups, *Publicacions Matemàtiques* 54 (2010), 359–368.
- [P8] B. Szepietowski, Counting pseudo-Anosov elements in the mapping class group of the three-punctured projective plane, *Turkish Journal of Mathematics* 38 (2014) 524–534.
- [P9] B. Szepietowski, On finite index subgroups of the mapping class group of a nonorientable surface, *Glasnik Matematički* 49 (2014) 337–350.
- [P10] E. Bujalance, J. J. Etayo, E. Martínez, B. Szepietowski, On the connectedness of the branch loci of non-orientable unbordered Klein surfaces of low genus, *Glasgow Mathematical Journal* 57 (2015), 211–230.
- [P11] G. Gromadzki, B. Szepietowski, On topological type of periodic self-homeomorphisms of closed non-orientable surfaces, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Serie A, Matemáticas*, online first 2015, 18 pp. DOI: 10.1007/s13398-015-0234-6
- [P12] G. Gromadzki, B. Szepietowski, X. Zhao, On classification of cyclic orientation-reversing actions of big order on closed surfaces, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 220 (2016), 465–481.

[P13] F. Atalan, B. Szepietowski, Automorphisms of the mapping class group of a nonorientable surface, preprint 2014, ArXiv:1403.2774. Złożone do publikacji.

W przygotowaniu:

[P14] G. Gromadzki, S. Hirose, B. Szepietowski, On topological classification of finite cyclic actions on bordered surfaces, preprint 2015.

Poniżej opiszę najważniejsze wyniki powyższych prac, zaczynając od tych poświęconych ściśle grupom klas odwzorowań. Następnie omówię prace dotyczące innej tematyki, gdzie we współpracy z innymi matematykami udało mi się zastosować moje doświadczenia w badaniu grupy klas odwzorowań. Są to cztery prace dotyczące topologicznej klasyfikacji działań grup skończonych na powierzchniach [P6, P11, P12, P14] oraz jedna praca o spójności miejsca osobliwego przestrzeni moduli nieorientowalnych powierzchni Kleina [P10].

3.3. Podgrupy skończonego indeksu grupy klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej. [P9]

Na mocy twierdzenia Grossman [28], grupa $\mathcal{M}(S_{g,n})$ jest rezydualnie skończona, a ponieważ $\mathcal{M}(N_{g,n})$ jest izomorficzna z podgrupą $\mathcal{M}(S_{g-1,2n})$, więc też jest rezydualnie skończona. To oznacza, że grupy klas odwzorowań posiadają bardzo dużo podgrup skończonego indeksu. Warto dodać, że każdej takiej podgrupie odpowiada pewne nakrycie skończonego stopnia odpowiedniej przestrzeni moduli. Z drugiej strony, A. J. Berrick, V. Gebhardt i L. Paris [8] wykazali, że dla $g \geq 3$ minimalny indeks właściwej podgrupy $\mathcal{M}(S_{g,n})$ wynosi $2^{g-1}(2^g - 1)$. Dokładniej, w [8] udowodniono, że $\mathcal{M}(S_{g,n})$ zawiera jedyną z dokładnością do sprzężenia podgrupę indeksu $m_g^- = 2^{g-1}(2^g - 1)$, jedyną z dokładnością do sprzężenia podgrupę indeksu $m_g^+ = 2^{g-1}(2^g + 1)$, a wszystkie inne właściwe podgrupy $\mathcal{M}(S_{g,n})$ mają indeks większy od m_g^+ (co najmniej $5m_g^-$ jeśli $g \geq 4$).

Dla $g \geq 2$ minimalny indeks właściwej podgrupy $\mathcal{M}(N_{g,n})$ wynosi 2, a jeśli $g \geq 7$, to jedyną podgrupą $\mathcal{M}(N_{g,n})$ indeksu 2 jest podgrupa generowana przez wszystkie twisty Dehna, oznaczana przez $\mathcal{T}(N_{g,n})$. Załóżmy, że $g \geq 7$, $n \in \{0, 1\}$ i przyjmijmy $h = \lfloor (g-1)/2 \rfloor$. Niech G oznacza grupę $\mathcal{M}(N_{g,n})$ lub $\mathcal{T}(N_{g,n})$. W [P9, Theorem 1.1] wykazałem, że G zawiera jedyną z dokładnością do sprzężenia podgrupę indeksu $m_h^- = 2^{h-1}(2^h - 1)$, jedyną z dokładnością do sprzężenia podgrupę indeksu $m_h^+ = 2^{h-1}(2^h + 1)$, a wszystkie inne właściwe podgrupy G mają indeks większy od m_h^+ (co najmniej $5m_h^-$ jeśli $h \geq 4$). W szczególności, minimalny indeks właściwej podgrupy $\mathcal{T}(N_{g,n})$ wynosi m_h^- .

Dla $2 \leq g \leq 6$, minimalny indeks właściwej podgrupy $\mathcal{T}(N_{g,n})$ wynosi 2. Dla $g \in \{5, 6\}$ wykazałem [P9, Theorem 4.1], że $\mathcal{T}(N_{g,n})$ zawiera jedną podgrupę indeksu 2, dwie podgrupy indeksu $m_2^- = 6$ i jedną podgrupę indeksu $m_2^+ = 10$, z dokładnością do sprzężenia, a wszystkie inne właściwe podgrupy $\mathcal{T}(N_{g,n})$ mają indeks większy niż 10. Ponieważ abelianizacja grupy $\mathcal{T}(N_{4,0})$ jest izomorficzna z $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ [76], każda liczba całkowita dodatnia jest indeksem pewnej podgrupy $\mathcal{T}(N_{4,n})$.

3.4. Zanurzenia grupy warkoczy w grupy klas odwzorowań. [P7]

Gdy dwie dwustronne krzywe zamknięte zwyczajne α, β na powierzchni F nie przecinają się, to odpowiadające im twisty Dehna komutują: $T_\alpha T_\beta = T_\beta T_\alpha$; natomiast gdy α i β przecinają w jednym punkcie, to twisty spełniają w $\mathcal{M}(F)$ relację warkocza: $T_\alpha T_\beta T_\alpha = T_\beta T_\alpha T_\beta$ (o ile kierunki twistów zgadzają się w punkcie przecięcia). Tak więc każdemu łańcuchowi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ dwustronnych krzywych zamkniętych zwyczajnych na F , gdzie $\alpha_i \cap \alpha_j = \emptyset$ dla $|i - j| > 1$ oraz α_i przecina α_{i+1} w jednym punkcie dla $i = 1, 2, \dots, n-2$, odpowiada homomorfizm z grupy B_n warkoczy o n pasmach do grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}(F)$. Taki homomorfizm jest na ogół różnowartościowy. Praca [P7] była motywowana pytaniem B. Wajnryba [87] o istnienie “niegeometrycznych” zanurzeń $B_n \rightarrow \mathcal{M}(F)$, przy których obrazy standardowych generatorów B_n nie są twistami Dehna. W pracy [P7] udowodniłem, że odwzorowanie standardowych generatorów B_g na crosscap transpositions u_i (Rys. 3), $i = 1, \dots, g-1$, definiuje zanurzenie

$$\varphi: B_g \rightarrow \mathcal{M}(N_{g,1}).$$

W tej samej pracy uogólniłem twierdzenie Birman-Chillingwortha na powierzchni z brzegiem dowodząc, że $\mathcal{M}(N_{g,n})$ jest izomorficzna z podgrupą $\mathcal{M}(S_{g-1,2n})$, co pozwoliło zdefiniować zanurzenie

$$\psi: B_g \rightarrow \mathcal{M}(S_{g-1,2})$$

przez podniesienie u_i z $N_{g,1}$ do podwójnego nakrycia $S_{g-1,2}$. Oba zanurzenia φ i ψ mają tę własność, że obrazy standardowych generatorów B_g nie są twistami Dehna. Bödighheimer i Tillmann [11] wykazali, że zanurzenie ψ indukuje odwzorowanie zerowe pomiędzy grupami homologii dodatniego stopnia, o ile rodzaj powierzchni jest odpowiednio duży w stosunku do stopnia homologii. Tę samą własność mają standardowe zanurzenia geometryczne oraz inne niegeometryczne zanurzenia grupy warkoczy w grupę klas odwzorowań powierzchni orientowalnej opisane w [11], ale nie zanurzenie φ . Dla $g \geq 7$ i $0 < k \leq g/3$ indukowany homomorfizm $\varphi_*: H_k(B_g; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_k(\mathcal{M}(N_{g,1}); \mathbb{Z}_2)$ jest różnowartościowy [11].

3.5. Twist Dehna jako komutator. [P5]

Podgrupę grupy G generowaną przez wszystkie komutatory $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$, $a, b \in G$ oznacza się przez $[G, G]$. Dla $x \in [G, G]$ niech $cl_G(x)$ oznacza najmniejszą liczbę naturalną k taką, że x jest iloczynem k komutatorów, a $scl_G(x)$ niech oznacza granicę

$$scl_G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{cl(x^n)}{n}.$$

Liczby $cl_g(x)$ i $scl_G(x)$ nazywa się odpowiednio długością komutatorową (commutator length) i stabilną długością komutatorową (stable commutator length) elementu x w grupie G .

Założmy, że S jest zamkniętą powierzchnią orientowalną rodzaju $g \geq 3$. Grupa klas odwzorowań $\mathcal{M}(S)$ jest doskonała, to znaczy $[\mathcal{M}(S), \mathcal{M}(S)] = \mathcal{M}(S)$ [73]. Niech α będzie krzywą zamkniętą zwyczajną na S , nieściągalską do punktu, a T_α

niech oznacza twist Dehna względem α . Wtedy $cl_{\mathcal{M}(S)}(T_\alpha) = 2$ [59] i $scl_{\mathcal{M}(S)}(T_\alpha) \geq \frac{1}{18g-6}$ [20, 54]. W szczególności, ciąg $cl_{\mathcal{M}(S)}(T_\alpha^n)$, $n \in \mathbb{Z}$ jest nieograniczony. Rozszerzoną grupę klas odwzorowań $\mathcal{M}^\circ(S)$ definiuje się jako grupę klas izotopii wszystkich homeomorfizmów S , również tych odwracających orientację. W pracy [P5] udowodniłem, że T_α^n jest równe pojedynczemu komutatorowi elementów $\mathcal{M}^\circ(S)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$. Zatem $cl_{\mathcal{M}^\circ(S)}(T_\alpha^n) = 1$, a stąd $scl_{\mathcal{M}^\circ(S)}(T_\alpha) = 0$.

Załóżmy, że N jest zamkniętą powierzchnią nieorientowalną rodzaju $g \geq 7$. Wtedy $[\mathcal{M}(N), \mathcal{M}(N)] = \mathcal{T}(N) = [\mathcal{T}(N), \mathcal{T}(N)]$, gdzie $\mathcal{T}(N)$ jest podgrupą $\mathcal{M}(N)$ indeksu 2 generowaną przez wszystkie twisty Dehna [52]. W pracy [P5] udowodniłem, że $cl_{\mathcal{M}(N)}(T_\alpha^n) = 1$ dla dowolnej krzywej zamkniętej zwyczajnej dwustronnej α na N i dowolnego $n \in \mathbb{Z}$, a przy dodatkowych założeniach o α i N także $cl_{\mathcal{T}(N)}(T_\alpha^n) = 1$.

3.6. Funkcja wzrostu i gęstość elementów pseudo-Anosova w grupie klas odwzorowań płaszczyzny rzutowej z trzema nakłuciami. [P8]

Grupa G z ustalonym zbiorem generującym A może być wyposażona w metrykę, zwaną metryką słów. W tej metryce, długością elementu x jest minimalna liczba czynników, potrzebna do zapisania x w postaci iloczynu generatorów ze zbioru A . Dla dowolnego podzbioru X grupy G definiuje się szereg potęgowy, którego współczynniki a_n są równe liczbom elementów zbioru X o długości n . Szereg ten nazywa się szeregiem wzrostu, a funkcja, którą on definiuje nazywa się funkcją wzrostu. Gęstością zbioru X nazywamy granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|B(n) \cap X|}{|B(n)|},$$

gdzie $B(n)$ oznacza zbiór elementów G długości nie większej niż n .

Niech N będzie powierzchnią nieorientowalną ze skończonym zbiorem P wyróżnionych punktów (nakłuc). Czystą grupę klas odwzorowań $\mathcal{PM}(N, P)$ definiujemy jako grupę klas izotopii homeomorfizmów N zachowujących każdy punkt z P oraz zachowujących lokalną orientację w każdym punkcie z P . W pracy [P8] rozważyłem grupę $\mathcal{PM}(N, P)$, gdzie (N, P) jest płaszczyzną rzutową z trzema wyróżnionymi punktami, wyposażoną w metrykę słów indukowaną przez pewien ustalony zbiór generujący. Obliczyłem funkcje wzrostu dla zbiorów elementów redukowalnych i pseudo-Anosova. Okazało się, że funkcje te są wymierne. Udowodniłem też, że zbiór elementów pseudo-Anosova ma gęstość równą 1.

Analogiczne wyniki uzyskano w [2] dla sfery z czterema nakłuciami i w [81] dla torusa. Opisane rezultaty stanowią częściową odpowiedź na pytanie 3.13 i potwierdzenie hipotezy 3.15 z [22] w szczególnym przypadku.

3.7. Inne prace poświęcone grupie klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej. [P1-P4, P13]

Praca [P1] zawiera wyniki uzyskane w mojej pracy magisterskiej, a prace [P2, P3, P4] stanowią trzon mojego doktoratu, chociaż [P4] została opublikowana dwa lata po moim doktoracie.

Niech N_g oznacza zamkniętą powierzchnię nieorientowalną rodzaju $g \geq 3$. W [P1] udowodniłem, że grupa klas odwzorowań $\mathcal{M}(N_g)$ jest generowana przez inwolucje. Jako ważne zastosowanie tego faktu, wykazałem jednorodność przestrzeni moduli $\mathfrak{M}(N_g)$ powierzchni Kleina homeomorficznych z N_g , naśladując dowód jednorodności przestrzeni moduli powierzchni Riemanna podany przez MacLachlana [64]. W [P2] udowodniłem, że grupa $\mathcal{M}(N_g, P)$, gdzie P jest skończonym zbiorem wyróżnionych punktów na N_g , również jest generowana przez inwolucje. W [P3] wykazałem, że $\mathcal{M}(N_g)$ jest generowana przez trzy elementy, a także jest generowana przez cztery inwolucje. Praca [P3] była inspirowana artykułami [13, 50, 55, 84] zawierającymi podobne wyniki dla grupy klas odwzorowań powierzchni orientowalnej. W [P4] podałem algorytm rekurencyjnego wyznaczania prezentacji grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}(N_{g,n})$ wykorzystujący jej działanie na kompleksie krzywych. Algorytm ten został zastosowany w pracach [H1, H5]. W [P4] wyznaczyłem też skończone prezentacje grup $\mathcal{M}(N_{g,n})$ dla $(g, n) \in \{(1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\}$. Dla tych powierzchni kompleks krzywych nie jest jednorodny.

W pracy [P13], jak dotąd nieopublikowanej, udowodniliśmy wspólnie z F. Atalan, że jeśli N jest zamkniętą powierzchnią nieorientowalną rodzaju $g \geq 5$ z dowolnym skończonym (być może pustym) zbiorem wyróżnionych punktów P , to każdy automorfizm grupy $\mathcal{M}(N, P)$ jest wewnętrzny. Analogiczne twierdzenie dla grupy klas odwzorowań powierzchni orientowalnej udowodnił Ivanov [44]. Pokazał on, że jeśli S jest powierzchnią orientowalną rodzaju $g \geq 3$ ze zbiorem wyróżnionych punktów P , to każdy automorfizm $\mathcal{M}(S, P)$ jest indukowany przez homeomorfizm S , niekoniecznie zachowujący orientację.

3.8. Topologiczna klasyfikacja działań grup skończonych na zwartych powierzchniach. [P6, P11, P12, P14].

Przez działanie grupy G na powierzchni F rozumiemy zanurzenie G w $\text{Homeo}(F)$, a dwa takie działania nazywamy topologicznie równoważnymi jeżeli ich obrazy są sprzężone w $\text{Homeo}(F)$. Klasyfikacja działań grup skończonych na zwartych powierzchniach, z dokładnością do topologicznej równoważności, jest klasycznym problemem, którego historia sięga czasów Nielsena, a literatura poświęcona tej tematyce jest bardzo obszerna, szczególnie w przypadku powierzchni orientowanych.

W pracach [P6, P11, P12, P14] stosujemy metody kombinatorycznej teorii nieeuklidesowych grup krystalograficznych, w skrócie NEC, czyli dyskretnych i zwartych podgrup grupy izometrii płaszczyzny hiperbolicznej \mathcal{H} , zapoczątkowanej przez Macbeatha [63]. Działanie skończonej grupy G na zwartej powierzchni F o ujemnej charakterystyce Eulera może być zrealizowane jako działanie analityczne lub dianalityczne względem pewnej struktury powierzchni Riemanna lub Kleina na F . Oznacza to, że takie działanie może być zadane przez gładki epimorfizm $\theta: \Lambda \rightarrow G$, gdzie Λ jest pewną grupą NEC, którego jądro również jest grupą NEC, beztorsyjną gdy F jest powierzchnią zamkniętą, lub nie zawierającą zachowujących orientację izometrii skończonego rzędu gdy F jest powierzchnią z brzegiem. Rzecz w tym, że topologia działania G jest zdeterminowana przez algebraiczne

własności θ i Λ . Tak więc w badaniu działań grup skończonych można ograniczyć się do algebry i kombinatoryki, zapominając o aspektach analitycznych. W tym języku, dwa działania grupy G na F są topologicznie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im gładkie epimorfizmy $\theta_i: \Lambda_i \rightarrow G$, $i = 1, 2$ wpisują się w diagram przemienny

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} \Lambda_1 & \xrightarrow{\theta_1} & G \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \Lambda_2 & \xrightarrow{\theta_2} & G \end{array}$$

gdzie α i β są pewnymi izomorfizmami. Aby rozstrzygnąć, czy dwa dane gładkie epimorfizmy $\Lambda \rightarrow G$ odpowiadają topologicznie równoważnym działaniom, potrzebujemy zatem znać grupę automorfizmów grupy NEC Λ . W tym miejscu wykorzystujemy bliski związek grupy $\text{Out}(\Lambda)$ automorfizmów zewnętrznych grupy Λ i odpowiednio zdefiniowanej grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}(\mathcal{H}/\Lambda)$ orbifoldu \mathcal{H}/Λ . Znając generatory grupy $\mathcal{M}(\mathcal{H}/\Lambda)$ możemy w łatwy sposób otrzymać generatory $\text{Out}(\Lambda)$, a gdy rząd grupy G jest odpowiednio duży w stosunku do rodzaju powierzchni, to grupy $\mathcal{M}(\mathcal{H}/\Lambda)$ i $\text{Out}(\Lambda)$ są skończone, co umożliwia efektywne badanie topologicznej równoważności działań opisanych przez gładkie epimorfizmy.

Prace [P11, P12, P14] stanowią cykl poświęcony działaniom skończonych grup cyklicznych dużego rzędu na zwartych powierzchniach. Pod koniec XIX w. Wieman [89] udowodnił, że rząd zachowującego orientację automorfizmu powierzchni Riemanna rodzaju $g \geq 2$ wynosi co najwyżej $4g + 2$, a Harvey [33] wykazał, że ograniczenie to jest osiągalne dla wszystkich $g \geq 2$. Analogiczne wyniki dotyczące maksymalnego rzędu periodycznego homeomorfizmu odwracającego orientację oraz periodycznego homeomorfizmu powierzchni nieorientowalnej zostały udowodnione w pracach [17, 21, 88]. Naturalnym pytaniem jest, do jakiego stopnia rząd periodycznego homeomorfizmu powierzchni determinuje jego klasę sprzężoności. W przypadku zachowujących orientację homeomorfizmów S_g wiadomo, że rząd determinuje klasę sprzężoności o ile ten rząd i rodzaj g są odpowiednio duże [4, 39]. W pracach [P11] i [P12] rozważyliśmy analogiczny problem odpowiednio dla homeomorfizmów N_g , $g \geq 3$ i odwracających orientację homeomorfizmów S_g , $g \geq 2$. W pracy [P11] (odpowiednio [P12]) obliczyliśmy liczby topologicznie nierównoważnych działań grupy cyklicznej \mathbb{Z}_n na N_g (odp. na S_g zawierających homeomorfizmy odwracające orientację), w zależności od typu orbifoldu N_g/\mathbb{Z}_n , dla $n > g - 2$ (odp. S_g/\mathbb{Z}_n , dla $n > 2g - 2$). W szczególności udowodniliśmy, że działania maksymalnego rzędu są jedyne z dokładnością do topologicznej równoważności, z wyjątkiem powierzchni nieorientowalnej parzystego rodzaju g , na której mamy dwa różne typy topologiczne działań maksymalnego rzędu $n = 2g$. Warto podkreślić, że chociaż w twierdzeniach sformułowanych w [P11, P12] podaliśmy tylko liczby działań dużego rzędu, to w dowodach wyznaczyliśmy odpowiadające im gładkie epimorfizmy, a zatem otrzymaliśmy ich topologiczną klasyfikację. Praca [P14], będąca w przygotowaniu, zawiera analogiczną klasyfikację działań na powierzchniach z brzegiem grup cyklicznych rzędu większego niż $p - 2$, gdzie

p jest algebraicznym rodzajem powierzchni. W szczególności, sklasyfikowaliśmy działania realizujące rozwiązania tak zwanych problemów minimalnego rodzaju i maksymalnego rzędu dla powierzchni z brzegiem, znalezione trzydzieści lat temu w [18].

W pracy [P6] sklasyfikowaliśmy, z dokładnością do topologicznej równoważności, działania dowolnych grup skończonych rzędu co najmniej 6, na zwartych powierzchniach z brzegiem rodzaju algebraicznego p dla $2 \leq p \leq 6$. W przypadku powierzchni orientowalnych bez brzegu, analogiczna topologiczna klasyfikacja została przeprowadzona dla powierzchni rodzaju 2 i 3 przez Broughtona [15] oraz 4 przez Bogopolskiego [10] i Kimurę [51]. W celu znalezienia wszystkich możliwych gładkich epimorfizmów $\Lambda \rightarrow G$ dla danej grupy Λ , użyliśmy tutaj programu komputerowego MAGMA. Dla $p = 5$ i 6 otrzymaliśmy odpowiednio 273 i 216 topologicznie nierównoważnych działań. W [P6, Section 3] rozważyliśmy także działania grup rzędu mniejszego niż 6, ale jest ich zbyt dużo, aby podać pełną klasyfikację. Zamiast tego, dla każdej grupy rzędu co najwyżej 5 wyznaczyliśmy wszystkie typy topologiczne powierzchni z brzegiem, dowolnego rodzaju, na których taka grupa działa. Analogiczny wynik otrzymaliśmy również dla grup, których rząd jest liczbą pierwszą.

Jak pisałem we wstępie, każdej powierzchni Kleina odpowiada funktorialnie pewna rzutowa krzywa algebraiczna rzeczywista, rozumiana zwykle jako krzywa zespolona zdefiniowana przy pomocy równania rzeczywistego. Wobec tej odpowiedniości, wyniki otrzymane w pracach [P6, P11, P14] mogą być interpretowane jako topologiczna klasyfikacja działań odpowiednich grup skończonych na krzywych rzeczywistych.

3.9. Miejsce osobliwe przestrzeni moduli nieorientowalnych powierzchni Kleina. [P10]

Niech F będzie zamkniętą powierzchnią o ujemnej charakterystyce Eulera. Przestrzeń moduli $\mathfrak{M}(F)$ powierzchni Riemanna lub Kleina homeomorficznych z F jest przestrzenią orbit właściwie nieciągłego działania grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}(F)$ na przestrzeni Teichmüllera $\text{Teich}(F)$. Ponieważ $\text{Teich}(F)$ jest rozmaitością, homeomorficzną z kulą w przestrzeni euklidesowej, $\mathfrak{M}(F)$ ma strukturę orbifoldu. Punkty osobliwe $\mathfrak{M}(F)$ odpowiadają powierzchniom Riemanna lub Kleina posiadającym nietrywialne automorfizmy. Zbiór wszystkich punktów osobliwych $\mathfrak{M}(F)$ nazywamy miejscem osobliwym (branch locus) i oznaczamy przez $\mathcal{B}(F)$.

Badanie miejsca osobliwego $\mathcal{B}(S_g)$ przestrzeni moduli powierzchni Riemanna rodzaju $g \geq 2$ jest klasycznym problemem, którego historia sięga lat sześćdziesiątych ubiegłego stulecia. Obszerna literatura poświęcona tej tematyce zawiera serię prac dotyczących spójności $\mathcal{B}(S_g)$. Ostateczny rezultat jest następujący: $\mathcal{B}(S_g)$ jest spójnym podzbiorem $\mathfrak{M}(S_g)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g \in \{3, 4, 7, 13, 17, 19, 59\}$ [5].

W pracy [P10] badamy miejsce osobliwe $\mathcal{B}(N_g)$ przestrzeni moduli nieorientowalnych powierzchni Kleina bez brzegu rodzaju $3 \leq g \leq 5$. Jako główny wynik,

udowodniliśmy, że $\mathcal{B}(N_g)$ jest spójnym podzbiorem $\mathfrak{M}(N_g)$ dla $g = 4$ i $g = 5$. Spójność $\mathcal{B}(N_3)$ była znana wcześniej. Wynika ona z faktu, że wszystkie powierzchnie Kleina rodzaju 3 są hipereliptyczne, a zatem posiadają nietrywialne automorfizmy.

Podobnie jak w [5], nasz dowód spójności $\mathcal{B}(N_g)$ opiera się na dobrze znanej stratyfikacji przestrzeni moduli, opisaną między innymi w [14, 34]. Względem tej stratyfikacji, $\mathcal{B}(N_g)$ rozkłada się na sumę pewnych spójnych podzbiorów $\mathfrak{M}(N_g)$, odpowiadających klasom topologicznej równoważności działań grup skończonych na N_g . W ten sposób badanie spójności $\mathcal{B}(N_g)$ wiąże z tematyką opisaną w paragrafie 3.8. Ten wątek badawczy powinien być kontynuowany, w celu znalezienia wszystkich wartości g , dla których $\mathcal{B}(N_g)$ jest spójnym podzbiorem $\mathfrak{M}(N_g)$.

4. PLANY BADAWCZE

Na zakończenie autoreferatu przedstawię moje plany badawcze w szerszej perspektywie czasowej, koncentrując się na początkowych krokach w każdym z planowanych wątków, co do których mam już dość konkretne przemyślenia i plany. W pierwszym rzędzie rozwijany będzie nadal wątek grupy klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej, w kierunkach częściowo nakreślonych przy omawianiu moich dotychczasowych osiągnięć naukowych. Myślę też o poszerzeniu obszaru badań o naturalne zastosowania, wymagające różnorodnych umiejętności i narzędzi. Wobec tego liczę na udział w realizacji poszczególnych wątków współpracowników, mając wstępną zgodę wielu z nich. W pierwszym rzędzie będzie to współpraca w ramach istniejącej grupy badawczej w moim macierzystym zakładzie Algebry na UG (przede wszystkim G. Gromadzki i M. Stukow). Program jest również tak pomyślany, aby znalazło się w nim miejsce dla przyszłych doktorantów, a jego ostatecznym celem jest stworzenie zespołu badawczego zajmującego się kilkoma szerokimi wątkami badawczymi, u podstaw których leży znajomość grup klas odwzorowań powierzchni.

4.1. Grupa Torelli powierzchni nieorientowalnej. Jedną w najważniejszych podgrup grupy klas odwzorowań powierzchni F jest podgrupa Torelli $\mathcal{I}(F)$ składająca się z klas izotopii homeomorfizmów indukujących identyczność na $H_1(F, \mathbb{Z})$. W przypadku powierzchni orientowalnej podstawowe twierdzenia i narzędzia służące do badania podgrupy Torelli pochodzą od D. Johnsona [47, 48, 49]. O grupie Torelli powierzchni nieorientowalnej wiadomo bardzo niewiele. Pierwszy znaczący wynik dotyczący $\mathcal{I}(N)$ uzyskali dopiero niedawno Hirose i Kobayashi [42] podając pewien zbiór generujący $\mathcal{I}(N)$. Zbiór ten jest jednak nieskończony i jednym z moich celów będzie znalezienie skończonego zbioru generującego $\mathcal{I}(N)$ oraz rozwinięcie teorii analogicznej do teorii Johnsona grupy $\mathcal{I}(S)$. Jednym z pierwszych zadań szczegółowych jest zdefiniowanie „homomorfizmu Johnsona” dla $\mathcal{I}(N)$, jako krok w kierunku obliczenia abelianizacji tej grupy w dalszej perspektywie. Wydaje się że do tego zadania można podejść w duchu pracy [H4], wykorzystując podwójne nakrycie $S_{g-1} \rightarrow N_g$. W związku z tym, że na mocy twierdzenia Gastesi [25], które (notabene) można otrzymać jako wniosek z mojego Lematu 4.1 w [H4], $\mathcal{I}(N_g)$ jest izomorficzna z podgrupą $\mathcal{I}(S_{g-1})$, można obciąć homomorfizm Johnsona określony

na $\mathcal{I}(S_{g-1})$ do homomorfizmu $\mathcal{I}(N_g) \rightarrow \wedge^3 H_1(S_{g-1}, \mathbb{Z})$. Pojawiają się przy tym naturalne pytania o obraz i generatory jądra powyższego homomorfizmu. Podejmiemy też próbę zdefiniowania homomorfizmu Johnsona dla $\mathcal{I}(N)$ bez odwoływania się do powierzchni orientowalnej. Warto tutaj wspomnieć, że Hirose i Sato [41] użyli homomorfizmu Johnsona modulo 2, określonego na grupie $\Gamma_2(N)$ klas odwzorowań poziomu 2 powierzchni nieorientowalnej, do obliczenia abelianizacji tej grupy, gdzie mam również własne doświadczenie z prac [H2, H3]. Na kwiecień 2016 roku zaplanowana jest moja tygodniowa wizyta na uniwersytecie w Tokio, z inicjatywy profesora Nariya Kawazumi, całkowicie finansowana z jego środków na badania. Profesor Kawazumi jest wybitnym ekspertem w tematyce homomorfizmu Johnsona i jestem przekonany, że dyskusja z nim będzie dla mnie inspirująca. Reasumując, S. Hirose i N. Kawazumi są tymi ekspertami, na których współpracę w tym temacie liczę.

4.2. Generatory torsyjne. Wiadomo, że grupa klas odwzorowań zamkniętej powierzchni jest generowana przez elementy skończonego rzędu. Ważną własność takich elementów stanowi to, że mogą być one reprezentowane przez konforemne automorfizmy powierzchni Riemanna, dla odpowiednio dobranej struktury analitycznej, co pozwala przy ich analizie stosować metody geometrii hiperbolicznej i kombinatorycznej teorii grup, dzięki twierdzeniu Riemanna o uniformizacji. Jest to niezwykle silna metoda, która pozwoliła swego czasu C. Maclachlanowi wykazać jednorodność przestrzeni moduli krzywych algebraicznych zespolonych [64], a mi w moim magisterium [P1] uzyskać analogiczny wynik dla czysto urojonych krzywych algebraicznych rzeczywistych (są to krzywe zespolone posiadające równania rzeczywiste ale nie posiadające punktów \mathbb{R} -wymiernych). W dziedzinie tej mam także sporo innych doświadczeń z czasów mojego doktoratu. W pracy [P3] wykazałem, że dla $g \geq 3$ grupa $\mathcal{M}(N_g)$ jest ona generowana przez cztery involucje, a także przez trzy elementy, z których dwa mają nieskończony rząd. Otwartym pytaniem jest, czy jest ona generowana przez dwa elementy lub przez trzy involucje. Inne pytanie, na które chciałbym odpowiedzieć jest następujące. Czy $\mathcal{M}(N_g)$ jest generowana przez elementy maksymalnego skończonego rzędu? Jeśli tak, to jaka jest najmniejsza liczba takich generatorów? Powyższe pytanie jest motywowane twierdzeniem Korkmaza [55], który udowodnił, że grupa $\mathcal{M}(S_g)$ jest generowana przez dwa elementy maksymalnego skończonego rzędu $4g + 2$. Wątek ten wprawdzie nie jest dla mnie osobiście wysoko priorytetowy, ale sądzę, że rozwinięcie tego tematu stanowić może dobry materiał dla przyszłego doktoranta przeze mnie prowadzonego.

4.3. Kompleksy symplecjalne związane z powierzchniami nieorientowanymi. Na mocy słynnego twierdzenia Ivanova [44] grupa automorfizmów kompleksu krzywych $\mathcal{C}(S)$ na powierzchni orientowalnej S jest izomorficzna z rozszerzoną grupą klas odwzorowań $\mathcal{M}^\circ(S)$. Twierdzenie to zostało uogólnione na rozmaite inne kompleksy symplecjalne związane z powierzchnią orientowalną, a ostatnio również na przypadek powierzchni nieorientowalnej [2]. Ostatni wynik stanowi

motywację do badania automorfizmów i geometrycznych własności różnych kompleksów, które można stowarzyszyć z powierzchnią nieorientowalną. Mam na myśli przede wszystkim rozmaite naturalne podkompleksy kompleksu krzywych, takie jak, na przykład, kompleks krzywych rozdzielających, krzywych jednostronnych o nieorientowalnym uzupełnieniu, krzywych reprezentujących ustaloną klasę homologii. To znowu, moim zdaniem, może być dobry materiał na przyszły doktorat przeze mnie kierowany.

4.4. Rozmaitości trójwymiarowe - działania grup skończonych na kulach z rączkami. Podjęcie tematyki rozmaitości trójwymiarowych jest dla mnie naturalnym krokiem, biorąc pod uwagę rolę, jaką w tej teorii pełnią powierzchnie i ich grupy klas odwzorowań (wystarczy tu wspomnieć rozkłady Heegaarda, czy też rozkłady książkowe 3-rozmaitości). W pierwszej kolejności zamierzam się skoncentrować na kulach z rączkami (handlebodies), przy czym będę rozważał również nieorientowalne 3-rozmaitości powstające przez doklejenie do kuli skręconych rączek (nonorientable handlebodies). Jednym z długoterminowych celów w tej tematyce jest wypracowanie nowych metod konstruowania i klasyfikacji działań grup skończonych na kulach z rączkami. Jest to klasyczna tematyka o bogatej literaturze, jeśli chodzi o przypadek orientowalny. Zamierzam spróbować w niej swoich sił, uwzględniając przypadek rozmaitości nieorientowalnych, bazując na doświadczeniu nabytym podczas badania działań grup skończonych na powierzchniach (paragraf 3.8) i kontynuując owocną współpracę z G. Gromadzkim. Przy realizacji tego projektu liczę również na współpracę M. Stukowa, który jest ekspertem w dziedzinie grup klas odwzorowań podobnie jak ja, a także R. Hidalgo z Chile, który jest znawcą grup Schottky.

Naszym celem jest wypracowanie algebraicznego kryterium pozwalającego rozstrzygać dwie rzeczy. Po pierwsze, czy działanie grupy skończonej G na zamkniętej powierzchni F , zadane przez gładki epimorfizm (tak jak to opisałem w paragrafie 3.8) rozszerza się do działania na kuli z rączkami, której brzegiem jest F ? Po drugie, kiedy dwa różne rozszerzenia tego samego działania są topologicznie sprzężone? Naszym pierwszym zadaniem, które traktujemy jako rodzaj poligonu doświadczalnego, będzie klasyfikacja działań grup skończonych na orientowalnych kulach z rączkami niskiego rodzaju (2, 3, 4), z dokładnością do topologicznego sprzężenia. Punktem wyjścia jest klasyfikacja z dokładnością do izomorfizmu, grup skończonych działających na takich kulach z rączkami znaleziona w [71], a także wyniki dotyczące topologicznej klasyfikacji działań grup skończonych na powierzchniach orientowalnych rodzaju 2, 3 i 4 autorstwa Broughtona [15], Kimury [51] i Bogopolskiego [10], który wyraził zainteresowanie udziałem w realizacji tego zadania. Udział O. Bogopolskiego, który jest wybitnym specjalistą w dziedzinie kombinatorycznej teorii grup, jest ważny w kontekście naszych planów rozszerzenia na przypadek nieorientowalny klasycznej metody konstrukcji działań na kulach z rączkami grupy podstawowej grafu grup, podanej przez D. McCullougha, A. Millera i B. Zimmermanna w [71].

4.5. Grupa klas odwzorowań kuli z nieorientowalnymi rączkami. Kolejnym celem natury globalnej jest zbadanie algebraicznych własności grupy klas odwzorowań kuli z nieorientowalnymi rączkami, której brzegiem jest nieorientowalna powierzchnia parzystego rodzaju. Przykładowe cele szczegółowe to wyznaczenie skończonego układu generatorów tej grupy, a następnie skończonej prezentacji, używając metod podobnych do tych, które doprowadziły do analogicznych rezultatów dla orientowalnych rozmaitości [80, 85], wykorzystując doświadczenie nabyte podczas mojej pracy nad prezentacją grupy klas odwzorowań powierzchni. Również w ramach tego wątku planuję i liczę na owocną współpracę z S. Hirose, zapoczątkowaną podczas jego wizyty w Gdańsku w czerwcu 2015. Temat jest, w zasadzie, zupełnie nowy i sędzę, że i tu jest miejsce na udział przyszłego doktora.

LITERATURA

- [1] N. L. Alling, N. Greenleaf, *Foundations of the theory of Klein surfaces*, Lect. Notes in Math. 219, Springer-Verlag 1971.
- [2] F. Atalan, M. Korkmaz, The number of pseudo-Anosov elements in the mapping class group of a four-holed sphere, *Turkish J. Math.* 34 (2010), 585–592.
- [3] F. Atalan, M. Korkmaz, Automorphisms of complexes of curves on nonorientable surfaces, *Group. Geom. Dynam.* 8 (1) (2014), 39–68.
- [4] C. Bagiński, M. Carvacho, G. Gromadzki, R. Hidalgo, On periodic self-homeomorphisms of closed orientable surfaces determined by their orders, *Collect. Math.*, online first 2015.
- [5] G. Bartolini, A. F. Costa, M. Izquierdo, On the connectivity of branch loci of moduli spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 38 (2013), no. 1, 245–258.
- [6] S. Benvenuti, Finite presentations for the mapping class group via the ordered complex of curves, *Adv. Geom.* 1 (2001), 291–321.
- [7] M. Bestvina, K. Fujiwara, Quasi-homomorphisms on mapping class groups, *Glas. Mat. Ser. III* 42 (2007), 213–236.
- [8] J. A. Berrick, V. Gebhardt, L. Paris, Finite index subgroups of mapping class groups, *Proc. London Math. Soc.* 108 (2014), 575–599.
- [9] J. S. Birman, D. R. J. Chillingworth, On the homeotopy group of a non-orientable surface, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 71 (1972), 437–448.
- [10] O. V. Bogopolski, Classifying the actions of finite groups on orientable surfaces of genus 4, *Siberian Adv. Math.* 7 (1997), no. 4, 9–38.
- [11] C.-F. Bödigheimer, U. Tillmann, Embeddings of braid into mapping class groups and their homology, in: *Configuration Spaces: Geometry, Combinatorics and Topology 2012*, Sco. Norm. Sup. Pisa, 173–191.
- [12] B. H. Bowditch, Intersection numbers and the hyperbolicity of the curve complex, *J. Reine Angew. Math.* 598 (2006), 105–129.
- [13] T. E. Brendle, B. Farb, Every mapping class group is generated by 6 involutions, *J. Algebra* 278 (2004), 187–198.
- [14] S. A. Broughton, The equisymmetric stratification of the moduli space and the Krull dimension of mapping class groups, *Topology Appl.* 37 (1990), 101–113.
- [15] S. A. Broughton, Classifying finite group actions on surfaces of low genus, *J. Pure Appl. Algebra* 69 (1991), 233–270.
- [16] K. S. Brown, Presentations for groups acting on simply-connected complexes, *J. Pure Appl. Algebra* 32 (1984), 1–10.

- [17] E. Bujalance, Cyclic groups of automorphisms of compact nonorientable Klein surfaces without boundary, *Pacific J. Math.* 109 (1983), 279–289.
- [18] E. Bujalance, J.J. Etayo, J. M. Gamboa, G. Gromadzki, *Automorphisms Groups of Compact Bordered Klein Surfaces. A combinatorial approach*, Lect. Notes in Math. 1439, Springer-Verlag 1990.
- [19] D. R. J. Chillingworth, A finite set of generators for the homeotopy group of a non-orientable surface, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 65 (1969), 409–430.
- [20] H. Endo, D. Kotschick, Bounded cohomology and non-uniform perfection of mapping class groups, *Invent. Math.* 144 (2001), 169–175.
- [21] J.J. Etayo Gordejuela, Nonorientable automorphisms of Riemann surfaces, *Arch. Math. (Basel)* 45 (4) (1985), 374–384.
- [22] B. Farb, Some problems on mapping class group and moduli space. In *Problems on Mapping Class Group and Related Topics*, ed. by B. Farb, Proc. Symp. Pure and Applied Math., Vol. 74 (2006), 11–55.
- [23] J. Franks, M. Handel, Triviality of some representations of $MCG(S)$ in $GL(n, \mathbb{C})$, $Diff(S^2)$ and $Homeo(T^2)$, *Proc. Amer. Math. Soc.* 141 (2013), 2951–2962.
- [24] S. Gadgil, D. Pancholi, Homeomorphisms and the homology of non-orientable surfaces, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* 115 (2005), 251–257.
- [25] P. A. Gastesi, A note on Torelli spaces of compact non-orientable Klein surfaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 24 (1999) 23–30.
- [26] S. Gervais, A finite presentation of the mapping class group of a punctured surface, *Topology* 40 (2001), 703–725.
- [27] F. J. González-Acuña, J. M. Márquez-Bobadilla, On the homeotopy group of the non orientable surface of genus three, *Rev. Colombiana Mat.* 40 (2006), 75–79.
- [28] E. K. Grossman, On the residual finiteness of certain mapping class groups, *J. London Math. Soc.* 9 (1974/75), 160–164.
- [29] R. M. Hain, Torelli groups and geometry of moduli spaces of curves, in: Current topics in complex algebraic geometry, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 28, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, 97–143.
- [30] J. L. Harer, The second homology group of the mapping class group of an orientable surface, *Invent. Math.* 72 (1982), 221–239.
- [31] J. L. Harer, Stability of the homology of the mapping class groups of orientable surfaces, *Ann. Math.* 121 (2) (1985), 215–249.
- [32] J. L. Harer, The virtual cohomology dimension of the mapping class group of an orientable surface, *Invent. Math.* 84 (1986), 157–176.
- [33] W. J. Harvey, Cyclic group of automorphisms of compact Reimann surface, *Quart. J. Math. Oxford*, Ser. (2) 17 (1966), 86–97.
- [34] W. J. Harvey, On branch loci in Teichmüller space, *Trans. Amer. Math. Soc.* 153 (1971) 387–399.
- [35] W. J. Harvey, Boundary structure of the modular group, in: Riemann surfaces and related topics: Proc. 1978 Stony Brook Conf., Ann. Math. Stud. 97, Princeton University Press (1981), 245–251.
- [36] W. Harvey, M. Korkmaz, Homomorphisms from mapping class groups, *Bull. London Math. Soc.* 37 (2005), 275–284.
- [37] A. Hatcher, W. Thurston, A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface, *Topology* 19 (1980), 221–237.
- [38] S. Hirose, A complex of curves and a presentation for the mapping class group of a surface, *Osaka J. Math.* 39 (2002), 797–820.
- [39] S. Hirose, On periodic maps over surfaces with large periods, *Tohoku Math. J.* 62 (1) (2010), 45–53.

- [40] S. Hirose, On diffeomorphisms over non-orientable surfaces standardly embedded in the 4-sphere, *Algebr. Geom. Topol.* 12 (2012), 109–130.
- [41] S. Hirose, M. Sato, A minimal generating set of the level 2 mapping class group of a non-orientable surface, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* 157 (2014), 345–355.
- [42] S. Hirose, R. Kobayashi, A normally generating set for the Torelli group of a non-orientable closed surface, preprint 2014, [arXiv:1412.2222](#).
- [43] N. V. Ivanov, Complexes of curves and Teichmüller modular groups, *Uspekhi Mat. Nauk* 42, No. 3 (1987), 49–91; English transl.: *Russ. Math. Surv.* 42, No. 3 (1987) 55–107.
- [44] N. V. Ivanov, *Automorphisms of Teichmüller modular groups*, Lect. Notes in Math. 1346 (Springer, Berlin, 1988) 199–270.
- [45] N. V. Ivanov, *Subgroups of Teichmüller modular groups*, Translations of Mathematical Monographs 115, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [46] N. Ivanov, Automorphisms of complexes of curves and of Teichmüller spaces, *Int. Math. Res. Notices* 14 (1997), 651–666.
- [47] D. Johnson, The structure of the Torelli group I: A finite set of generators for \mathcal{T} , *Ann. of Math.* 118 (1983) 423–442.
- [48] D. Johnson, The structure of the Torelli group II: A characterisation of the group generated by twists on bounding curves, *Topology* 24 (1985) 113–126.
- [49] D. Johnson, The structure of the Torelli group III: The abelianization of \mathcal{T} , *Topology* 24 (1985) 127–144.
- [50] Kassabov M., Generating mapping class groups by involutions, preprint 2003, [arXiv:math.GT/0311455](#).
- [51] H. Kimura, Classification of automorphism groups, up to topological equivalence, of compact Riemann surfaces of genus 4, *J. Algebra* 264 (2003), no. 1, 26–54.
- [52] M. Korkmaz, First homology group of mapping class group of nonorientable surfaces, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 123 (1998), 487–499.
- [53] M. Korkmaz, Mapping class groups of nonorientable surfaces, *Geom. Dedicata* 89 (2002), 109–133.
- [54] M. Korkmaz, Stable commutator length of a Dehn twist, *Michigan Math. J.* 52 (2004), 23–31.
- [55] M. Korkmaz, Generating the surface mapping class group by two elements, *Trans. Amer. Math. Soc.* 357 (2005), 3299–3310.
- [56] M. Korkmaz, Problems on homomorphisms of mapping class groups, in: *Problems on Mapping Class Groups and Related Topics*, B. Farb Ed., Proc. Symp. Pure Math. 74 (2006), 85–94.
- [57] M. Korkmaz, Low-dimensional linear representations of mapping class groups, preprint 2011, [arXiv:1104.4816](#)
- [58] M. Korkmaz, The symplectic representation of the mapping class group is unique, preprint 2011, [arXiv:1108.3241](#)
- [59] M. Korkmaz, B. Ozbagci, Minimal number of singular fibers in a Lefschetz fibration, *Proc. Amer. Math. Soc.* 129 (2001), 1545–1549.
- [60] C. Labruère, L. Paris. Presentations for the punctured mapping class groups in terms of Artin groups, *Algebr. Geom. Topol.* 1 (2001), 73–114.
- [61] W. B. R. Lickorish, Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 59 (1963), 307–317.
- [62] W. B. R. Lickorish, On the homeomorphisms of a non-orientable surface, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 61 (1965), 61–64.
- [63] A. M. Macbeath, The classification of non-euclidean plane crystallographic groups, *Canad. J. Math.* 19, (1967), 1192–1205.
- [64] C. Maclachlan, Modulus space is simply-connected. *Proc. Amer. Math. Soc.* 29 (1) (1971), 85–86.

- [65] I. Madsen, A. Weiss, The stable moduli space of Riemann surfaces: Mumford's conjecture, *Ann. Math.* 165 (2007) 843-941.
- [66] H. A. Masur, Y. N. Minsky, Geometry of the complex of curves I: Hyperbolicity, *Invent. Math.* 138 (1) (1999) 103-149.
- [67] H. A. Masur, S. Schleimer, The geometry of the disk complex, *J. Amer. Math. Soc.* 26 (2013), 1-62.
- [68] M. Matsumoto, A presentation of mapping class groups in terms of Artin groups and geometric monodromy of singularities, *Math. Ann.* 316 (2000), 401-418.
- [69] J. D. McCarthy, U. Pinkall, Representing homology automorphisms of nonorientable surfaces, Max Planck Inst. preprint MPI/SFB 85-11, revised version written in 2004. Available at <http://www.math.msu.edu/~mccarthy>.
- [70] J. McCool, Some finitely presented subgroups of the automorphism group of a free group, *J. Algebra* 35 (1975), 205-213.
- [71] D. McCullough, A. Miller, B. Zimmermann, Group actions on handlebodies, *Proc. London Math. Soc.* 59 (1989), 373-416.
- [72] G. Omori, An infinite presentation for the mapping class group of a non-orientable surface, preprint 2016, arXiv:1601.01416.
- [73] J. Powell, Two theorems on the mapping class group of a surface, *Proc. Amer. Math. Soc.* 68 (1978), 347-350.
- [74] A. Putman, The Picard group of the moduli space of curves with level structures, *Duke Math. J.* 161 (2012), 623-674.
- [75] M. Sato, The abelianization of the level d mapping class group, *J. Topol.* 3 (2010), 847-882.
- [76] M. Stukow, The twist subgroup of the mapping class group a nonorientable surface, *Osaka J. Math.* 46 (2009), 717-738.
- [77] M. Stukow, Generating mapping class groups of nonorientable surfaces with boundary, *Adv. Geom.* 10 (2010), 249-273.
- [78] M. Stukow, A finite presentation for the mapping class group of a nonorientable surface with Dehn twists and one crosscap slide as generators, *J. Pure Appl. Algebra* 218 (2014), 2226-2239.
- [79] M. Stukow, The first homology group of the mapping class group of a nonorientable surface with twisted coefficients, *Topology Appl.* 178 (2014), 417-437
- [80] S. Suzuki, On homeomorphisms of a 3-dimensional handlebody, *Can. J. Math.* 29 (1977), 111-124.
- [81] M. Takasawa, Enumeration of Mapping Classes for the Torus, *Geom. Dedicata* 85 (2001), 11-19.
- [82] N. Wahl, Homological stability for the mapping class groups of non-orientable surfaces, *Invent. Math.* 171 (2008), 389-424.
- [83] B. Wajnryb, A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface, *Israel J. Math.* 45 (1983), 157-174.
- [84] B. Wajnryb, Mapping class group of a surface is generated by two elements, *Topology* 35 (1996), 377-383.
- [85] B. Wajnryb, Mapping class group of a handlebody, *Fund. Math.* 158 (1998), 195-228
- [86] B. Wajnryb, An elementary approach to the mapping class group of a surface, *Geom. Topol.* 3 (1999), 405-466.
- [87] B. Wajnryb, Relations in the mapping class group, in: *Problems on Mapping Class Groups and Related Topics*, B. Farb Ed., Proc. Symp. Pure Math. 74 (2006), 115-120.
- [88] S. Wang, Maximum orders of periodic maps on closed surfaces, *Topology Appl.* 41 (1991), 755-262.
- [89] A. Wiman, Über die hyperelliptischen Curven und diejenigen vom Geschlechte $p = 3$, welche eindeutigen Transformationen in sich zulassen, Bihang Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar, Stockholm, 1895-1896.

B. Sieprecht's