**Recenzja pracy doktorskiej**
**mgr inż. Moniki Rosickiej**
**pt. „Permutation graphs and their properties"**

Praca doktorska mgr inż. Moniki Rosickiej składa się z dwóch dość luźno ze sobą związanych części. Pierwsza z nich dotyczy zagadnień dominowania w grafach, a druga pewnego szczególnego rodzaju poetykietowań krawędzi i wierzchołków grafów. Obie części łączy pojęcie grafu permutacyjnego (ang. permutation graph), który pojawia się w każdej z tych części, choć w tej drugiej tylko w bardzo szczególnym przypadku.

Formalnie, praca podzielona jest na Wstęp i cztery rozdziały. We Wstępie autorka omawia zawartość pracy i, nieco chyba zbyt pobieżnie, rysuje tło uzyskanych wyników. W Rozdziale 1 podaje listę definicji podstawowych pojęć używanych w pracy.

Rozdział 2 dotyczy liczby dominowania w tzw. grafach pryzmowych (ang. prism graphs). Mówiąc nieco nieformalnie, są to grafy otrzymane z dwóch rozłącznych kopii dowolnego grafu $G$ przez połączenie wierzchołków jednej kopii z wierzchołkami drugiej kopii dowolnym skojarzeniem o $n$ krawędziach, gdzie $n$ to liczba wierzchołków w grafie $G$. Omawiany rozdział zawiera główny, moim zdaniem, rezultat pracy doktorskiej. Jest nim dowód postawionej w roku 2009 hipotezy Mynhardt i Xu mówiącej, że jedynym grafem $G$ takim, że dowolny graf pryzmowy otrzymany z $G$ ma taką samą liczbę dominowania jak sam graf $G$, jest graf o pustym zbiorze krawędzi. Autorka podaje najpierw dowód tej hipotezy w szczególnym przypadku, gdy w grafie $G$ istnieje wierzchołek, którego sąsiedzi tworzą zbiór niezależny. Ten dowód powstał wcześniej niż kompletny dowód hipotezy Mynhardt i Xu. Jest od niego dużo prostszy i łatwiejszy do prześledzenia. Sam dowód hipotezy Mynhardt i Xu jest o wiele bardziej złożony. Korzysta się w nim z pewnych obserwacji poczynionych już przez samych autorów hipotezy (szczególnie Twierdzenie 6 odgrywa tu dużą rolę). Idea dowodu polega na analizie struktury grafu $G$ (o niepustym zbiorze krawędzi) prowadzącej do skonstruowania takiego grafu pryzmowego dla $G$, który ma liczbę dominowania większą niż sam graf $G$. Konstrukcja ta jest skomplikowana i dość żmudna. Wymaga rozważenia sporej liczby przypadków i dopracowania wielu szczegółów. Autorka wykazała tu dużą pomysłowość i biegłość w prowadzonych rozważaniach, a wymyślenie samej idei dowodu wymagało zapewne nabycia sporej intuicji dotyczącej tego problemu.

Rozdział 2 zawiera jeszcze kilkanaście prostych spostrzeżeń i obserwacji na temat wartości pewnych wariantów liczby dominowania dla grafów pryzmowych. Są one raczej nietrudne do pokazania. Najciekawsze w tej części pracy są, moim zdaniem, znajdujące się w końcowej części rozdziału nietrywialne kontrprzykłady pokazujące, że analogiczne jak dla zwykłej liczby dominowania ograniczenia górne i dolne na spójną liczbę dominowania grafów pryzmowych, nie są prawdziwe.

Niedługi Rozdział 3 zawiera wyniki na temat liczb dominowania w grafach permutacyjnych nad pewnym grafem (ang. permutation graphs over a graph). Takie grafy są uogólnieniem zarówno grafów pryzmowych, jak i iloczynu kartezjańskiego grafów. Choć, moim zdaniem, są dość naturalnym pojęciem, nie były dotąd intensywnie badane mimo, że zostały zdefiniowane już w roku 1995 (nie należy ich mylić z tym co zwykle określa się nazwą grafy permutacyjne). Wyniki zawarte w tym rozdziale są raczej nietrudnymi obserwacjami prostych własności związanych z dominowaniem w tych grafach. Najciekawsze jest Twierdzenie 27, które zawiera niebanalne dolne ograniczenie na liczbę dominowania grafu permutacyjnego. Interesujące jest użycie przez autorkę pojęcia ułamkowego dominowania w rozważaniach w tym rozdziale. W końcowej części Rozdziału 3, autorka zwraca uwagę na związek uzyskanych przez siebie rezultatów ze znaną hipotezą Vizinga mówiącą, że liczba dominowania iloczynu kartezjańskiego dwóch grafów jest nie mniejsza od iloczynu liczb dominowania tych grafów. Z rezultatów uzyskanych w tym rozdziale wynika, że jeśli odpowiednie liczby dominowania tych grafów spełniają pewien warunek, to zachodzi dla nich hipoteza Vizinga. Brak mi tu jednak dyskusji, jakie grafy ten warunek spełniają. W rezultacie czytelnik pracy nie wie, czy wyniki uzyskane w tym rozdziale pozwalają czy nie stwierdzić prawdziwość hipotezy Vizinga w jakimś przypadku, dla którego jej prawdziwość nie była dotąd znana.

Ostatni rozdział pracy poświęcony jest szczególnym poetykietowaniom grafów, w których każdej krawędzi przyporządkowujemy permutację zbioru liczb $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. W przypadku, gdy graf jest nieskierowany, interesują nas poetykietowania wierzchołków liczbami ze zbioru $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ (zwane zgodnymi) takie, że dla każdej krawędzi obrazem etykiety jednego końca krawędzi w permutacji, która jest etykietą tej krawędzi, jest etykieta drugiego jej końca. W przypadku nie istnienia zgodnego poetykietowania wierzchołków interesują nas takie poetykietowania, gdy powyższy warunek nie zachodzi dla jak najmniejszej liczby krawędzi. Ten, mogący się na pierwszy rzut oka wydawać sztucznym, problem jest w przypadku $n = 2$ znany i szeroko badany od dawna pod nazwą zbalansowania grafów oznakowanych (ang. signed graphs balancing). Posiada też liczne zastosowania, m. in. w socjologii. Już w 1953 roku Harary znalazł warunek konieczny i wystarczający istnienia zgodnego poetykietowania wierzchołków grafu dla zadanego poetykietowania krawędzi grafu permutacjami zbioru $\{0, 1\}$. Dla autorki rozprawy, motywacją podjęcia tej tematyki były jej zastosowania w fizyce kwantowej. W omawianym rozdziale autorka systematycznie zbadała własności rozważanych poetykietowań krawędzi grafu. Bardzo dobrym pomysłem było wykorzystanie do prowadzonych rozumowań szczególnego rodzaju grafu permutacyjnego, co pozwoliło podać bardzo zgrabne dowody twierdzeń dotyczących istnienia i liczby zgodnych poetykietowań wierzchołków. Omawiany rozdział zawiera szereg drobnych spostrzeżeń i twierdzeń. Autorka definiuje m. in. relację równoważności pomiędzy poetykietowanymi grafami, bada zachowanie się parametrów opisujących poetykietowania wierzchołków przy pewnych operacjach wykonywanych na grafach z poetykietowanymi krawędziami, a także dowodzi własności rozważanych parametrów, jeśli zawęzimy się tylko do etykiet krawędzi z pewnych szczególnych zbiorów permutacji. Uzyskanie tych drobnych wyników nie prowadzi niestety do pokazania jakiegoś bardziej spektakularnego rezultatu. Wybór takich, a nie innych wątków badawczych był, jak się wydaje, motywowany wspomnianymi zastosowaniami w fizyce kwantowej, choć nie do końca wynika to z treści rozprawy doktorskiej. W końcowej części omawianego rozdziału autorka opisuje sposób wykorzystania uzyskanych wcześniej wyników w jednym tylko twierdzeniu. Nie jest dla mnie jasne, czy inne spostrzeżenia z tego rozdziału tez znajdują podobne zastosowania. Ta nieco krytyczna uwaga nie zmienia mojej zdecydowanie pozytywnej oceny tej części pracy. Uważam badanie rozważanych przez autorkę grafów z poetykietowanymi krawędziami za bardzo ciekawy i wart kontynuowania kierunek badawczy.

Praca jest napisana dość zwięźle, ale starannie i z dbałością o ścisłość rozumowań. Znalazłem niewiele drobnych, raczej nieistotnych, pomyłek i literówek. W szczególności w definicji identyfikowania wierzchołków w poetykietowanych grafach (str. 44-45) nie jest dla mnie jasne jaka jest definicja etykiety krawędzi $uv$ w przypadku, gdy w oryginalnym grafie $u$ jest wspólnym sąsiadem wierzchołków $v_1$ i $v_2$. W niektórych miejscach warto byłoby podać więcej przykładów (np. przy definicjach poetykietowań dobrych, złych i brzydkich na str. 37).

Podsumowując, moja ogólna ocena pracy doktorskiej mgr inż. Moniki Rosickiej jest bardzo dobra. Autorka udowodniła postawioną przez Mynhardt i Xu hipotezę o liczbie dominowania w grafach pryzmowych. Ponadto uzyskała szereg wyników dotyczących własności grafów z krawędziami poetykietowanymi przez permutacje, które mają ciekawe implikacje w fizyce kwantowej.

Uważam więc, że praca doktorska mgr inż. Moniki Rosickiej zdecydowanie spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim i uzasadnia nadanie jej stopnia naukowego doktora nauk matematycznych.

13 grudnia 2016 r.

Lonc

prof. dr hab. Zbigniew Lonc
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska