# Streszczenie rozprawy doktorskiej: Permutation graphs

Monika Rosicka

W swojej rozprawie doktorskiej pt. *Permutation graphs* badam własności i zastosowania różnych rodzajów grafów permutacyjnych.

Rozdział 2 poświęcony jest grafom pryzmowym. Dla dowolnego grafu $G$ i permutacji $\pi : V(G) \mapsto V(G)$, grafem pryzmowym nazywamy graf powstały z dwóch kopii grafu $G$ przez dodanie zbioru krawędzi łączących wierzchołki $u \in V$, $v' \in V'$ wtedy i tylko wtedy gdy $\pi(u) = v$.

W podrozdziałach 2.2 i 2.3 zajmuję się liczbą dominowania $\gamma$ grafu pryzmowego $\pi G$, a w szczególności zagadnieniem grafów uniwersalnie ustalonych, tzn. takich, że dla każdej permutacji $\pi$ zachodzi równość $\gamma(G) = \gamma(\pi G)$. W podrozdziale 2.2 przedstawiam dowód, że żaden graf posiadający wierzchołki $C_3$-wolne nie jest uniwersalnie ustalony. W podrozdziale 2.3 wykazuję, że jedynymi grafami uniwersalnie ustalonymi są grafy pozbawione krawędzi.

Podrozdział 2.4 dotyczy innych parametrów związanych z dominowaniem. Predstawiam w nim kilka obserwacji na temat dominowania parami, totalnego, spójnego, wypukłego oraz słabo wypukłego w grafach pryzmowych. Opisuję w szczególności grafy pryzmowo $\gamma_{con}$-ustalone (tzn. takie, dla których liczba dominowania wypukłego $\gamma_{con}(\pi G)$ spełnia warunek $\gamma_{con}(IdG) = \gamma_{con}(G)$) oraz pryzmowo $\gamma_{con}$-podwójne (tzn. takie, że $\gamma_{con}(IdG) = 2\gamma_{con}(G)$). Wykazuję także, że dla dowolnego $k$ istnieją grafy $G, H$ i permutacje $\pi : V(G) \mapsto V(G)$ i $\sigma : V(H) \mapsto V(H)$ takie, że $\gamma(G) - \gamma(\pi G) \geqslant k$ oraz $\gamma(\sigma H) - 2\gamma(H) \geqslant k$.

W rozdziale 3 opisuję grafy permutacyjne $G$ nad $H$ (oznaczane jako $G \bowtie^{\Pi} H$), będące uogólnieniem grafów pryzmowych oraz iloczyny kartezjańskiego grafów. Podaję górne i dolne ograniczenia na liczbę dominowania w grafie $G \bowtie^{\Pi} H$ oraz przedstawiam kilka obserwacji na temat $\gamma$-zbiorów w takich grafach.

W rozdziale 4 badam własności grafów opisanych permutacjami. Przez graf opisany rozumiem graf $G$ z opisaniem $K : E(G) \mapsto S_n$ przypisującym krawędziom grafu permutacje zbioru $[n] = \{0, ..., n-1\}$. Dla danego $(G, K)$ rozważam przypisania $k : V \mapsto [n]$. Sprzecznością w przypisaniu $k$ nazywamy krawędź $uv$ taką, że $\pi_{uv}(k(u)) \neq k(v)$, gdzie $\pi_{uv} = K(uv)$. Badam najmniejszą liczbę sprzeczności oraz ilość możliwych przypisań bez sprzeczności dla danego $(G, K)$. Wykorzystuję w tym celu graf permutacyjny $KG = \overline{K_n} \bowtie^K G$. Rozważam także grafy opisane jako uogólnienie grafów znakowanych. Definiuję też równoważność grafów opisanych.

W podrozdziale 4.7 podaję fizyczną interpretację niektórych wyników zawartych w rozdziale 4. Streszczam w nim niektóre wyniki zaprezentowane w pracy *Linear game non-contextuality and Bell inequalities - a graph-theoretic approach*, w której wykorzystujemy grafy opisane do badania zjawiska kontekstualności.