

Streszczenie

W niniejszej rozprawie doktorskiej zajmujemy się kilkoma klasami ideałów i badamy ich własności. Będziemy szczególnie zainteresowani własnościami powiązаныmi ze zbieżnością ideałową i strukturą ideałów. Drugim naczelnym zagadnieniem tej rozprawy jest analizowanie funkcji gęstości, których można użyć do zdefiniowania ideałów.

Rozważamy zbieżność ideałową podczas badań nad własnościami typu BW (wprowadzonych przez Filipowa, Mrożka, Reclawa i Szucę w [4]) dla kilku ideałów powiązanych ze znanymi twierdzeniami kombinatorycznymi Hindmana i van der Waerdena. Rozwijamy wyniki uzyskane przez Kojmana (por. [10], [11]) poprzez pokazanie, że kilka z tych własności jest równoważnych dla badanych ideałów i wykorzystujemy ten rezultat jako punkt wyjścia do badań nad jednorodnością ideałów. Następnie przedstawiamy kilka przykładów ideałów jednorodnych (pojęcie analogiczne do jednorodnych filtrów wprowadzonych przez Fremlina w [5]) i pokazujemy związki między ideałami jednorodnymi i K-jednorodnymi, co daje nam odpowiedzi na pytania zadane przez Hrušáka w [8] i Meza-Alcántarę w [13]. Ponadto, wykorzystujemy jednorodność ideałów do rozwiązania kilku problemów o funkcjach \mathcal{I} -niezmienniczych postawionych przez Balcerzaka, Głęba i Swacynę w [2].

W rozprawie omawiamy znane klasy ideałów zdefiniowanych przy pomocy gęstości, jak ideały gęstościowe wprowadzone przez Faraha w [3] oraz ideały Erdősa-Ulama zdefiniowane w [9] przez Justa i Krawczyka, a także rozważamy kilka nowych klas ideałów zdefiniowanych przez inne gęstości, takie jak ważona gęstość jednostajna wprowadzona przez Giuliano Antonini i Grekosa w [7] oraz prosta gęstość przedstawiona w [1] przez Balcerzaka, Dasa, Filipczak i Swacynę. Wykazujemy kilka własności tych klas ideałów, badamy ich strukturę topologiczną i porównujemy je z wcześniej znanymi klasami ideałów.

Badania nad ideałami zdefiniowanymi przez gęstości prowadzą do rozważań nad samymi gęstościami. Porównujemy różne ważne gęstości jednostajne z klasyczną gęstością jednostajną i przedstawiamy charakteryzację, kiedy mają one własność Darboux, co rozwiązuje problem Mačaja, Sleziaaka i Tomy z [12]. Ponadto, znajdujemy rozwiązania do kilku problemów dotyczących gęstości postawionych przez Giuliano, Grekosa i Mišíka w [6]. Na przykład, pokazujemy, kiedy ciągi stosunków, wprowadzone przez Straucha i Tótha w [14], mają jednorodną dystrybucję.

Bibliografia

- [1] Marek Balcerzak, Pratulananda Das, Małgorzata Filipczak, Jarosław Swaczyna, *Generalized kinds of density and the associated ideals*, Acta Math. Hungar. **147** (2015), no. 1, 97–115.
- [2] Marek Balcerzak, Szymon Głąb, Jarosław Swaczyna, *Ideal invariant injections*, J. Math. Anal. Appl. **445** (2017), no. 1, 423–442.
- [3] Ilijas Farah, *Analytic quotients: theory of liftings for quotients over analytic ideals on the integers*, Mem. Amer. Math. Soc. **148** (2000), no. 702, xvi+177.
- [4] Rafał Filipów, Nikodem Mrożek, Ireneusz Reclaw, Piotr Szuca, *Ideal convergence of bounded sequences*, J. Symbolic Logic **72** (2007), no. 2, 501–512.
- [5] David Fremlin, *Filters of countable type*, (2007), dostępne pod adresem <http://www.essex.ac.uk/maths/people/fremlin/preprints.htm>, ostatnia wizyta na stronie w listopadzie 2017.
- [6] Rita Giuliano, Georges Grekos, Ladislav Mišík, *Open problems on densities II*, Diophantine analysis and related fields 2010, AIP Conf. Proc., vol. 1264, Amer. Inst. Phys., Melville, NY, 2010, pp. 114–128.
- [7] Rita Giuliano Antonini, Georges Grekos, *Weighted uniform densities*, J. Théor. Nombres Bordeaux **19** (2007), no. 1, 191–204.
- [8] Michael Hrušák, *Katětov order on Borel ideals*, Archive for Math. Logic **56** (2017), no. 7, 831–847.
- [9] Winfried Just, Adam Krawczyk, *On certain Boolean algebras $\mathcal{P}(\omega)/I$* , Trans. Amer. Math. Soc. **285** (1984), no. 1, 411–429.
- [10] Menachem Kojman, *Hindman spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 6, 1597–1602 (electronic).
- [11] ———, *van der Waerden spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 3, 631–635 (electronic).
- [12] Martin Mačaj, Martin Sleziak, Vladimír Toma, *On weighted uniform density*, Unif. Distrib. Theory **3** (2008), no. 2, 101–127.

- [13] David Meza-Alcántara, *Ideals and filters on countable sets*, Ph.D. thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2009.
- [14] Oto Strauch, János T. Tóth, *Distribution functions of ratio sequences*, Publ. Math. Debrecen **58** (2001), no. 4, 751–778.