Praca doktorska pana Adriana Kołodziejskiego składa się z pięciu rozdziałów. Pierwszy jest krótkim wprowadzeniem do dziedziny i definiującym potrzebne pojęcia. Kolejne cztery rozdziały prezentują wyniki badań doktoranta. Każdy z nich dotyczy innego kierunku badań, ale można wyróżnić dwa narzędzia, które są wspólne dla pierwszych trzech z nich. Jest to izomorfizm pomiędzy przestrzenią Hilberta kutritu a symetryczną podprzestrzenią przestrzeni Hilberta dwóch kubitów oraz tensor korelacji. Tematyka piątego rozdziału to ostatnie wyniki badań doktoranta i jest względnie daleka od tematyki pozostałych trzech rozdziałów. Układ pracy jest czytelny. Bibliografia pracy zawiera 100, w mojej opinii trafnie dobranych pozycji, przy czym doktorant jest współautorem czterech z nich.

Rozdział pierwszy - Wprowadzenie charakteryzuje się przemyślanym doborem materiału i jego kolejnością, pod kątem przyszłych rozdziałów. Odnaleźć w nim można jeden poważniejszy błąd merytoryczny - świadek splątania jest optymalny nie wtedy, kiedy jego jądro jest styczne do brzegu zbioru stanów separowalnych, ale kiedy przylega do niego tak bardzo jak to możliwe, czyli zawiera w sobie ścianę zbioru stanów separowalnych najwyższego wymiaru. Tak definiuje to artykuł wprowadzający pojęcie optymalności, który jest zresztą cytowany przez doktoranta jako pozycja [40] w doktoracie. Ten błąd nie wpływa nigdzie na wyniki kolejnych rozdziałów - optymalność świadków nie jest nigdzie badana i w sumie wprowadzenie nie musiało jej przytaczać.

Kolejny błąd ma charakter pomyłki w Lemacie 1 zamiast słów "istnieje metryka" powinniśmy użyć "dla każdej metryki" - dowód lematu przebiega tak samo dla każdej metryki G, a kwantyfikatory szczegółowe (już poprawne) w twierdzeniach 1 i 2 pochodzą z zaprzeczenia Lematu 1.

Kolejne drobne błędy i uwagi edytorskie:

1. Dla ścisłości, powinno się używać pojęcia "stan czysty" dla jednowymiarowych projektorów, a pojęcia "wektor stanu" dla wektorów z przestrzeni Hilberta, które je reprezentują z dokładnością do fazy. Z tego samego powodu lepiej używać pojęcia "przestrzeń Hilberta układu" niż "przestrzeń stanów układu" (strona 34).

2. Definicja 5 liniowości odwzorowania na stronie 21 jest niepotrzebna - liniowość należy do wiedzy ogólnej. Dotyczy to również Definicji 13, 14 i Twierdzenia 6 na stronie 34.

3. W Definicji 6 należy zastąpić termin "nieujemny" terminem "półdodatnio określony".

4. Ponad Twierdzeniem 3, sformułowanie "my skupimy się dalej na odwzorowaniach CPTP" jest niefortunne - w dalszej części pracy autor konstruuje tylko odwzorowania niekompletnie dodatnie. Należałoby tu użyć słów w rodzaju: "my pozostaniemy przy odwzorowaniach CPTP przy opisie dynamiki układów kwantowych...". Jest to uwaga poboczna, kanały kwantowe nie są wykorzystywane w dalszej części pracy.

5. "Z dodatniości wynika hermitowskość" - dodatniość ma sens tylko dla macierzy hermitowskich.

6. Wzór (1.15) jest prawdziwy, ale niczego nie dowodzi. Brakuje uzasadnienia, dlaczego lewa strona równości jest wartością średnią obserwabli Q w stanie ρ.

7. Strona 14: "Zbiór macierzy wymiaru $d \times d$" tworzy przestrzeń liniową nad ciałem K. Ponadto każdą macierz można przedstawić jako kombinację liniową pewnych elementów, nazywanych elementami bazowymi..." - nie "ponadto", ale "zatem". To rezultat bycia elementem przestrzeni liniowej skończonego wymiaru.

8. Strona 14: "Warunek unormowania macierzy gęstości $\hat{\rho}$ nakład na wektor $\vec{\lambda}$ warunek $|\vec{\lambda}| = 1$ ..." - chodzi oczywiście o warunek dodatniości macierzy.

Rozdział drugi wykorzystuje izomorfizm między przestrzenią Hilberta kutritu a symetryczną podprzestrzenią przestrzeni Hilberta dwóch kubitów. Izomorfizm ten pozwala wyrazić elementy macierzowe stanu kutritu przez wektor Blocha i symetryczny tensor korelacji odpowiadającego mu stanu symetrycznego dwóch kubitów oraz podać obserwable dla dwóch kubitów, których wartości średnie dają te elementy macierzowe. Obserwable te są skonstruowane z operatorów spinowych, co prowadzi do procedury doświadczalnej tomografii stanu kutritu. Wzór (2.17) jest niepoprawny - antykomutatory operatorów hermitowskich powinny być hermitowskie. Natomiast wzór (2.18) (ta sama wielkość po przejściu do przestrzeni symetrycznej dwóch qubitów) jest już poprawny.

Następnie autor zauważa, że warunek dodatniości macierzy kubitu sprowadza się do ograniczenia wartości formy kwadratowej Γ na wektorze Blocha, zatem musi on pozostawać wewnątrz pewnej elipsoidy. Forma ta jest równa różnicy identyczności i tensora korelacji, o wyznaczniku unormowanym do jedności. Po wzorze (2.30) brakuje wyjaśnienia, jak dokonać tego dzielenia gdy forma się degeneruje (przynajmniej jedna wartość własna tensora korelacji przyjmuje wartość 1).

Obserwacja ta daje piękną, jednoznaczną charakteryzację stanów kubitu - poprzez elipsoidę o długościach osi głównych nie przekraczających 1 i wektor Blocha wewnątrz niej. Brzeg zbioru stanów odpowiada sytuacjom, gdy wektor Blocha leży na sferze Blocha lub gdy elipsoida degeneruje się do odcinka. W tym drugim przypadku tracimy niestety jednoznaczność - do określenia stanu wyznaczanego przez punkt w zdegenerowanej elipsoidzie musimy znać również brakujące parametry ukryte w kierunkach znikających osi, co zauważa sam autor. Jest to mankament tego opisu mający swoje źródło w dzieleniu przez wyznacznik.

Na koniec rozdziału autor prezentuje wizualizacje działania kanałów unitarnych na "elipsy Blocha". Szczególnie interesujące są dwie ostatnie. Niestety załączony program jest w języku Mathematica, którego interpreter nie jest ogólnie dostępny. Podatnik, który finansował powstanie doktoratu nie może legalnie zapoznać się z tymi wynikami bez ponoszenia dodatkowych kosztów. Lepiej byłoby udostępnić skrypty w języku Octave (kompatybilny z Matlab) lub np. w pythonie z użyciem pakietu SciPy.

Poniżej wypisuję mniej istotne błędy edytorskie i niefortunne sformułowania:

1. Uwaga o nieunitarności powinna być pod wzorem (2.6), żeby nie sprawiać wrażenia, że nieunitarność jest jedną z własności prowadzącą do (2.6).
2. Strona 32, ponad własnością 4: nie "Ponadto" - własność czwarta wynika z poprzednich trzech.
3. We wzorze (2.29) pierwszy wektor powinien być transponowany. Nad wzorem literówka: "zapiać" $\rightarrow$ "zapisać".
4. Strona 39: Wiemy, że elementy macierzowe tensora korelacji są z zakresu ± 1, ale brakuje komentarza, dlaczego te ograniczenie dotyczy również jego wartości własnych.
5. Strona 42: literówka: "elipoidy" $\rightarrow$ "elipsoidy".
6. W języku polskim przyjęła się konwencja: stan rzędu 3, stan rzędu 2 itp. Określenia stan 3-rzędowy, stan 2-rzędowy są kalką z angielskiego i nie brzmią dobrze.
7. Strona 42: "wektor $\vec{a}$ leży na powierzchni trójwymiarowej elipsoidy albo elipsoida redukuje się do odcinka ..." Elipsoida zredukowana do odcinka jest zbiorem brzegowym, więc spójnik alternatywy wyłączającej jest niepoprawny. Powinno być "lub".
8. Na stronie 44, przed wzorem (2.35): "Dwie bazy ... są typu MUB" - MUB nie jest własnością bazy, ale zbiorem baz. Powinno być: "Dwie bazy ... są MU" a następnie: "Zbiór baz będących parami MU nazywamy MUB". Jest problem z używaniem tego skrótu w języku polskim, jednocześnie nie wypracowaliśmy jeszcze dobrego sposobu mówienia o tym po polsku.

Rozdział trzeci analizuje kutritową nierówność typy Bella CGLMP. Autor zauważa, że dla pewnego wyboru obserwabli (nie wspomina że chodzi o ustawienia zapewniające maksymalne jej łamanie) maksymalne jej łamanie nie zachodzi dla stanu maksymalnie splątanego. Autor wyjaśnia ten efekt tłumacząc nierówność dla kutritu na nierówność dla symetrycznego stanu dwóch kubitów za pomocą izorfizmu z poprzedniego rozdziału. Tutaj pojawiają się pewne niejasności

- Wzór (3.6) jest dla mnie niezrozumiały. Powołanie się na wzór (2.20) również.
- W (3.12) wzory na $\tilde{S}_i^2$ są niezgodne z (2.18).

Nierówność CGLMP (jak każdą nierówność typu Bella) można zapisać jako ograniczenie na wartość średnią pewnej globalnej obserwabli, którą buduje się dla dowolnego wyboru obserwabli lokalnych. Dla wyboru zapewniającego maksymalne łamanie, autor znajduje macierz obserwabli po przejściu do symetrycznej podprzestrzeni dwóch qubitów, a następnie zauważa, że jest sumą czterech operatorów nierówności CHSH dla różnych par kubitów i nierówności Mermina dla wszystkich czterech. Nie jest dla mnie jasny wzór (3.21) - Dla generycznego wyboru operatorów lokalnych w CHSH powinien powstać operator o rzędzie Schmidta (minimalna długość rozwinięcia na iloczyny tensorowe) równym 4, nie rozumiem dlaczego tutaj jest on równy 2.

Autor wyznacza numerycznie wektor stanu czystego maksymalnie łamiącego sumę czterech nierówności CHSH i wektor stanu czystego maksymalnie łamiącego nierówność Mermina. Maksymalizuje następnie łamanie nierówności CGMPL na ich kombinacjach liniowych i znajduje stan znany wcześniej. Niezrozumiałym dla mnie jest uzasadnienie wzoru (3.25) - czy wektor własny odpowiadający maksymalnej wartości własnej kombinacji liniowej dwóch macierzy musi być kombinacją liniową takich wektorów dla składników kombinacji?

Ostatni akapit rozdziału jest dla mnie niezrozumiały. Wcześniej pokazywano stany symetryczne dwóch kubitów łamiące nierówność CGLMP przy wyborze macierzy Pauliego jako lokalnych ustawień pomiarowych, a teraz autor twierdzi, że dla żadnego wyboru lokalnych ustawień nierówność nie jest łamana. Problemem mogłoby być co najwyżej uniezależnienie jej od każdego możliwego wyboru lokalnych obserwabli dla wszystkich kubitów. Dla wyboru ograniczonego do takich samych obserwabli w parach kubitów będzie to nierówność typu Bella przez przejście z powrotem do przestrzeni kutritu. Ten akapit powinien być przedyskutowany bardziej dokładnie.

Komentarz: strona 52, wyjaśnienie wzoru 52: Wzór ma taką postać, ponieważ jest to baza ortogonalna, ale nie unormowana. Nieortonormalność mogłaby prowadzić do bardziej skomplikowanego wzoru.

Rozdział czwarty uogólnia Lemat 1 o istnieniu metryki wykrywającej splątanie stanu do ogólnej funkcji (w ogólności nieliniowej) zachowującej hermitowskość. Każda taka funkcja może być *indykatorem splątania* (pojęcie wprowadzone przez autora). Autor w jasny i przemyślany sposób wprowadza izomorfizm Jamiołkowskiego, odwołując się do oryginalnych prac. Brakuje wśród nich jednak pracy Pillisa, który sformułował podobny izomorfizm jako pierwszy. Nie jest to żaden poważny zarzut, bo nie jest to praca szeroko znana. Wykorzystując izomorfizm, autor wskazuje jak skonstruować odwzorowanie dodatnie i świadka splątania wykrywającego stan wykryty przez dany indykator splątania. Następnie autor analizuje kilka przykładów indykatorów splątania.

Pierwszym rozważanym przykładem jest mapa usuwająca z tensora korelacji korelacje niższych rzędów. Przydałby się tutaj komentarz, że jest to rzutowanie na przestrzeń stanów o maksymalnie splątanych śladach częściowych. Na rysunku 4.1 jest pokazane, w jaki sposób mapa ta wykrywa splątanie w dwuparametrowej rodzinie stanów. Następnie, indykator jest zmieniony w indykator nieliniowy, podnoszący ocalałe wyrazy tensora korelacji do trzeciej potęgi. Działa on w danej rodzinie gorzej. Bardzo pouczające byłoby umieszczenie na wykresie brzegów stanów wykrywanych przez inne funkcje postaci x^α.

Kolejnym przykładem jest rodzina stanów diagonalnych w bazie magicznej (nadzbiór poprzedniej rodziny). Wzór (4.56) opisuje brzeg zbioru stanów wykrywanych. Szkoda, że autor poprzestał na wygenerowanym komputerowo wykresie i nie przeanalizował wzoru (4.56) analitycznie - brzeg jest sumą odcinków sfer o promieniu 1/2, a sam zbiór nie jest wypukły, mimo użycia liniowego indykatora splątania! Przyczyną takiego stanu rzeczy jest nieliniowość funkcji maksimum, jest to zatem sytuacja typowa dla tego kryterium.

Ostatnim rozważanym przykładem jest potraktowanie niezerowych elementów macierzowych $\mathcal{G}(\rho)$ funkcją signum. W ostatnim podrozdziale tego rozdziału autor komentuje zastosowanie kryterium do splątania wielocząstkowego.

Poniżej przedstawiam pomniejsze błędy:

1. Po wzorem (4.4) literówka: "odpowidniość" $\rightarrow$ "odpowiedniość".

2. Ze wzoru (4.44) wynika wzór (4.45), ale w drugą stronę tak być nie musi - jeżeli operator nie jest półdodatnio określony, może osiągać ujemną wartość średnią niekoniecznie na stanie ρ_+, zatem mamy wynikanie, ale nie równoważność.

3. Strona 69: "Jeżeli mapa $\mathcal{G}$ nie jest liniowa, to oczywiście operator $\mathcal{G}[\hat{\rho}]$ nie może być w ogólności przedstawiony jako funkcja współczynników tensora korelacji..." - tensor korelacji wiąże z macierzą gęstości bijekcja, zatem jak najbardziej może. Prawdopobnie autorowi chodziło, że nie faktoryzuje się jako kombinacja liniowa funkcji poszczególnych wyrazów tensora korelacji.

4. Kształt na rysunku 4.1 to deltoid, nie romb.

Ostatni rozdział rozprawy jest słabo związany z poprzednimi i prezentuje wyniki najnowszych badań autora. Pyta on w nim, kiedy wyniki pomiarów składowych spinu i kwadratu spinu można objaśnić na podstawie modelu zmiennych ukrytych. W bardzo ładnym rozumowaniu pokazuje on które wartości kwadratu spinu, całkowite i połówkowe, nie mogą być kwadratem długości wektora o całkowitych (lub połówkowych) współrzędnych.

Jest to przykład łamania założenia o istnieniu modelu zmiennych ukrytych bez dwóch podukładów rozseparowanych przestrzennie, jak w twierdzeniu Kochena-Speckera. Spodziewałbym się tutaj nierówności typu Kliczko, dla jednego układu, a nie typu Bella. Nie będziemy w stanie rozróżniać, czy za ich łamanie odpowiada brak modelu zmiennych ukrytych dla wartości spinów poszczególnych cząstek, czy nieklasyczne korelacje pomiędzy nimi. Kolejną wątpliwością jest nazywanie nierówności (5.13) czy (5.14) nierównościami Bella. Nierówność Bella powinna mieć własność *device independent* czyli zachodzić dla dowolnych wyborów obserwabli. Być może należałoby ich operatory nazywać dla ostrożności *świadkami nieklasyczności*. Czy we wzorze (5.34) powinniśmy rozważać dowolne pary rozkładów prawdopodobieństwa, czy takie same, biorąc pod uwagę że efekty nieklasyczne powinny zachodzić dla jednej cząstki?

Wyniki ostatniego rozdziały zostały zebrane w publikacji, która na razie jest w archiwum, ale jeszcze nie została zrecenzowana. Są to nowatorskie i oryginalne badania, a w takim przypadku mnogość pytań i wątpliwości jest naturalna.

Komentarz do dowodu twierdzenia 23: W dowodzie twierdzenia 22 nie znajduję dlaczego $q^2 = 1 \mod 8$. Rozwiązując równania $4^a q^2 + q = 7 \mod 8$ można to otrzymać bezpośrednio.

Wyniki wcześniejszych badań zostały opublikowane w trzech artykułach w renomowanym czasopiśmie Phys. Rev. A, a najnowsza praca jest w archiwum. Artykuły odpowiadają rozdziałom w pracy. Podobnie jak redaktorzy czasopisma, uznaję tę wyniki za ciekawe i wnoszące wiele do naszej wiedzy o dziedzinie i dostarczające nowych narzędzi do wizualizacji stanów i wykrywania splątania. Przewiduję, że z publikacją najnowszych wyników również nie będzie problemów, pomimo wielu wątpliwości, ze względu na ich odwagę i nowatorstwo.

Mimo kilku nieuniknionych błędów autor umiejętnie opisuje i wyjaśnia wyniki swoich badań w doktoracie. Uważam, że praca spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane pracom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie jej autora do dalszych etapów postępowania doktorskiego.

Gniewomir
Sarbicki