OPINIA
o pracy doktorskiej
Adama Gregosiewicza
Metoda obrazów Lorda Kelvina
w teorii półgrup i funkcji kosinusowych.

20 maja,2018.

Praca poświęcona jest dwóm niezależnym problemom.

(A) Analizie asymptotyki modelu Rotenberga (z 1993 roku) rozwoju populacji komórek
(B) Istnienia i jedyności operatorowych funkcji kosinusowych zachowujących pewne funkcjonały.

Ad(A).
Dla $I = (0,1), V = (a,b), a \geq 0$ oraz miary $\nu : V \to R_+$ zdefiniujmy zbiór $\Omega := I \times V$. Rozwój populacji komórek opisuje równanie

$$\partial_t f = -v\partial_x f,$$

gdzie f jest gęstością tej populacji, z zadaną regułą reprodukcyjną zdefiniowaną warunkiem brzegowym

$$vf(0,v,t) = p\int_V wk(w,v)f(1,w,t)dw + qvf(1,v,t),$$

dla ustalonych p, q rzeczywistych i nieujemnych, dla których $p + q > 0$.
Powyższe jądro k opisuje gęstość prawdopodobieństwa charakteryzującą szybkość dojrzewania komórek córek populacji, stąd $\int_V k(w,v)dv = 1$ dla każdego w.
Stosując metodę obrazów Lorda Kelvina Autor podaje nowy dowód istnienia półgrupy Rotenberga $T(t)$ w przestrzeni $L^1(\Omega)$ zadanej wzorem (4.2.29), co w rezultacie daje nowe oszacowania normy tej półgrupy.
Co więcej oszacowania te stosują się do sytuacji populacji wymierających lub posiadających prawie stałą liczbę osobników.
W pracy podano również warunki, przy których wspomniane wyżej oszacowania normy są optymalne.
W ważnym przypadku gdy $p + q = 1, p > 0$, półgrupa $T(t)$ staje się półgrupą Markowa. Autor w tym przypadku dowodzi również, że dla obszernej klasy jąder k istnieje gęstość niezmiennicza f_* dla $T(t)$ tzn. $\lim_{t\to\infty} ||T(t)f - f_*|| = 0$. Ponadto znaleziony jest wzór na f_* w terminach gęstości stacjonarnej ϕ jądra k tzn. $\phi(v) = \int_V k(w,v)\phi(w)dw$ dla prawie wszystkich v.
Z kolei dla $p + q < 1$ korzystając z kluczowej równości $||T(t)||_{L(L^1(\Omega))} =$

$||T^*\chi_\Omega||_{L^\infty(\Omega)}$ oraz kilku oszacowań z góry funkcji $T^*(t)\chi_\Omega(x,v)$ Autor dowodzi, że (dla ν = mierze Lebesgue'a) spełnione są następujące oszacowania normy $T(t)$.(Twierdzenie 4.3.5)

i) Jeśli $a = 0$, to $||T(t)||_{L(L^1(\Omega))} = 1$.

ii) Jeśli $a > 0$, to $||T(t)||_{L(L^1(\Omega))} = 1$, $0 \leq t < a^{-1}$
oraz
$||T(t)||_{L(L^1(\Omega))} = (p+q)^{N(a)}$, $t \geq a^{-1}$,

gdzie $N(a)$ jest największą liczbą całkowitą mniejszą lub równą ta.

Wreszcie za Autorem pracy należy podkreślić, że w przypadku $p+q < 1$ metody stosowane przez Boulanouara w [14] nie mogą być stosowane.

AdB.

Drugą tematyką rozprawy doktorskiej są konstrukcje funkcji kosinusowych $C(t)$ w $C[0,1]$ przy użyciu metody obrazów Lorda Kelvina. Funkcje te spełniają warunki zachowywania pewnych funkcjonałów liniowych i ciągłych na $C[0,1]$. Jak pokazuje prosty kontrprzykład 5.1.6, nie dla każdego funkcjonału na $C[0,1]$ taka funkcja kosinusowa istnieje. Pierwszymi przykładami zastosowania metody obrazów Kelvina w teorii półgrup operatorowych były publikacje [7] i [8] Promotora. Jak objaśnia to Autor rozprawy, najtrudniejszym krokiem przy stosowaniu tej metody jest znalezienie odpowiedniego rozszerzenia $f \in C[0,1]$ do funkcji $\tilde{f}$ na prostej i spełniającej dodatkowe warunki (patrz niżej). O ile w przypadku opisu konstrukcji półgrupy Rotenberga rozszerzenie takie było stosunkowo proste, to w kontekscie znalezienia funkcji kosinuosowych zachowujących funkcjonały $F_0(f) = \int_0^1 f(s)ds$ i $F_j(f) = \int_0^1 s^j f(s)ds, j > 0$ jest o wiele trudniejsze. W pierwszym kroku Autor szuka rozszerzenia $f \in C[0,1]$ do funkcji $\tilde{f}$ i kanonicznej funkcji kosinusowej $C(t)$ w $C(R)$ (danej wzorem (5.3.5)), które spełniają następujące warunki:
(E1) $\tilde{f} \in C(R)$,
(E2) $F_0 C(t)\tilde{f} = F_0 f$, dla dowolnego $t \in R$,
(E3) $F_j C(t)\tilde{f} = F_j f$, dla dowolnego $t \in R$.

Konstrukcja takiego rozszerzenia jest szczegółowo podana w dość żmudnych lematach 5.3.5 i 5.3.8. Następnie w Lemacie (5.3.11) łatwo dowodzi się, że zbiór rozszerzeń jest niezmienniczy dla kanonicznej funkcji kosinusowej oraz w Lemacie (5.3.12) regularność $\tilde{f}$ tzn. $\tilde{f} \in C^2(R)$. Na uznanie zasługuje również użycie w niektórych dowodach Rozdziału 5 normy Bieleckiego (wpływ szkoły prof. Kisyńskiego?), co pozwoliło Autorowi na zgrabne ujęcie pewnych nierówności tego Rozdziału.

Praca jest napisana bardzo zrozumiale (co nie jest oczywiste w czasach wąskich specjalności), widać że Pan Gregosiewicz starał się pomóc czytelnikom w zrozumieniu metod i wyników rozprawy.

Uważam,że rozprawa zawiera oryginalne wyniki i spełnia ustawowe wymagania stawiane pracom doktorskim.
Jako niespecjaliście z teorii półgrup i funkcji kosinusowych trudno mi jest przewidzieć znaczenie w przyszłości otrzymanych przez Autora wyników, ale rozprawę proponuję uznać za wyróżniającą.

Jan Janas