dr hab. Filip Strobin
Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej
ul. Żeromskiego 116, 90-924 Łódź
e-mail: filip.strobin@p.lodz.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej

Ideały zbiorów nigdziegęstych w topologiach na zbiorze liczb naturalnych

pani

mgr Marty Kweli

Rozprawa doktorska p. mgr M. Kweli jest poświęcona pewnym problemom teorii ideałów na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Z jednej strony badane są pewne abstrakcyjne własności takich ideałów (np. przeliczalna MB-reprezentowalność) oraz ich wzajemne zależności, a z drugiej konkretne rodziny, w głównej mierze ideały zbiorów nigdziegęstych w topologiach na $\mathbb{N}$ generowanych przez ciągi arytmetyczne.

Zagadnienia podjęte w pracy są naturalne, interesujące i wpisują się w badania podejmowane w ostatnich dekadach przez wielu matematyków, w tym matematyków gdańskich, łódzkich czy bydgoskich. Oprócz analizy znanych ideałów, autorka zdefiniowała i zbadała w pewnym stopniu bogatą rodzinę ideałów generowanych przez ciągi arytmetyczne, związanych naturalnie z tymi już badanymi m.in. przez Furstenberga, Kircha, Golomba, czy ostatnio dr Paulinę Szyszkowską. Autorka rozwiązała też problem postawiony niedawno przez Uzcáteguiego istnienia nieizomorficznych ideałów o pewnych własnościach. Cała rozprawa jest opatrzona wieloma szczegółowymi komentarzami i odnośnikami do innych wyników w poruszanej materii, co pozwala czytelnikowi na uzyskanie szerszej perspektywy dla uzyskanych rezultatów.

Przejdę teraz do krótkiego omówienia treści pracy.

Praca zawiera wstęp i sześć zasadniczych rozdziałów.

Wstęp jest długi i rozbudowany (prawie sześciostoronicowy). Nakreślone są podstawowe pojęcia i problemy poruszane w rozprawie, wraz z szczegółowym rysem historycznym i odniesieniem do literatury.

W rozdziale pierwszym, Wprowadzeniu, podane są definicje i podstawowe fakty z których Autorka korzysta w dalszej części. Pojawia się definicja ideału oraz podstawowe własności rozważane w kontekście ideałów, takie jak *gęstość*, czy pojęcie *P-ideału*. Zdefiniowane są też pewne konstrukcje ilustrujące te własności i wykorzystywane w dalszej części rozprawy. Przede wszystkim jednak mamy tu przegląd i (znów - rozbudowane) omówienie badanych wcześniej ideałów na zbiorze liczb naturalnych, które są w centrum zainteresowania pracy - ideał gęstościowy $\mathcal{I}_d$, ideał sumowalny $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$, ideał van der Waerdena $\mathcal{W}$, ideał Hindmana $\mathcal{H}$, ideały topologiczne (będące rodzinami zbiorów nigdziegęstych), w tym przede wszystkim ideały topologiczne związane z topologiami na $\mathbb{N}$ których bazy składają się z ciągów arytmetycznych - ideały Furstenberga $\mathcal{I}_F$, Golomba $\mathcal{I}_G$, Kircha $\mathcal{I}_K$, Rizzy $\mathcal{I}_R$ oraz Szyszkowskiej $\mathcal{I}_S$; omówione są też same topologie generujące te rodziny, odpowiednio, $\mathcal{T}_F, \mathcal{T}_G, \mathcal{T}_K, \mathcal{T}_R, \mathcal{T}_S$. W szczególności, zdefiniowane są bazy tych topologii, odpowiednio:

$$\mathcal{B}_F = \{\{an+b\} : b \leqslant a\} \quad \mathcal{B}_G = \{\{an+b\} : b < a,\ (a,b) = 1\} \quad \mathcal{B}_K = \{\{an+b\} : b < a,\ (a,b) = 1,\ a \in \mathbb{SF}\}$$

$$\mathcal{B}_R = \{\{an+a\} : a \in \mathbb{N}\} \quad \mathcal{B}_S = \{\{an+b\} : \Theta(a) \subset \Theta(b)\}$$

gdzie $\{an+b\}$ jest ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie b i różnicy a, (a,b) oznacza najmniejszy wspólny dzielnik a, b, $\mathbb{SF}$ to zbiór liczb naturalnych niepodzielnych przez kwadrat liczby pierwszej zaś $\Theta(a)$ to zbiór dzielników pierwszych liczby a.

Filip Strobin

Rozdział drugi poświęcony jest ideałom *MB-przeliczalnie reprezentowanym* (w skrócie - $\mathcal{MBC}$) oraz ideałom rozszerzalnym do $\mathcal{MBC}$. Powiemy, że ideał $\mathcal{I}$ na $\mathbb{N}$ jest $\mathcal{MBC}$, jeżeli istnieje taka przeliczalna nieskończona rodzina $\mathcal{F}$ nieskończonych podzbiorów $\mathbb{N}$, że

$$\mathcal{I} = S^0(\mathcal{F}) := \{A \subset \mathbb{N} : \forall_{U \in \mathcal{F}}\, \exists_{V \in \mathcal{F}}\, V \subset (U \setminus A)\}$$

Samo pojęcie MB-reprezentowalności ideałów było badane w ostatnich latach, choć głównie w kontekście odpowiedniego generowania pary ideał $\mathcal{I}$ i ciało $\mathcal{A}$ - w kontekście samych ideałów się mocno upraszcza (o czym pisze autorka), stąd restrykcja do przeliczalnych rodzin. Autorka czyni prostą obserwację, że ideały $\mathcal{I}_F, \mathcal{I}_G, \mathcal{I}_K, \mathcal{I}_R, \mathcal{I}_S$ są $\mathcal{MBC}$ (Przykład 2.1.5), oraz, konstruując odpowiedni zbiór, że ideały $\mathcal{I}_d, \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}, \mathcal{W}, \mathcal{H}$ takie nie są (Stwierdzenie 2.1.7).

Dalej zbadane są własności ideałów $\mathcal{MBC}$. Pokazane jest, że takie ideały są typu $F_{\sigma\delta}$ (Stwierdzenie 2.2.3) oraz są *przeliczalnie oddzielalne*, przy czym każdy ideał przeliczalnie oddzielalny jest rozszerzalny do ideału $\mathcal{MBC}$ (Twierdzenie 2.3.3). Dodatkowo, są to ideały *reprezentowane topologiczne* niebędące typu F_σ i niebędące P-ideałami, przy dodatkowych naturalnych założeniach że rodzina $\mathcal{F}$ ma *własność bazy* oraz *własność splittingu* (Stwierdzenie 2.3.6). W kontekście ideałów zbiorów nigdziegęstych wywnioskowane jest, że takie rodziny mają wszystkie powyższe własności o ile generująca je topologia ma przeliczalną bazę, jest T_2 i nie ma punktów izolowanych (Wniosek 2.3.7). Pokazane też jest, że ideały

$$\mathrm{NWD} := \{A \subset \mathbb{N} : b[A] \text{ jest nigdziegęsty}\}$$

oraz

$$\mathrm{NULL} := \{A \subset \mathbb{N} : \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(b[A]) \text{ jest miary zero}\}$$

są $\mathcal{MBC}$ (Stwierdzenie 2.3.8 i komentarz po nim oraz Wiosek 2.3.10), zaś ideał

$$\mathcal{J}_c := \{A \subset \mathbb{N} : |\,\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(b[A])| \leqslant \omega\}$$

nim nie jest, gdzie b jest ustaloną bijekcją między $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ a $\mathbb{N}$. Ideały NULL oraz NWD to wersje znanych ideałów reprezentowanych topologicznie NULL($\mathbb{Q}$) oraz NWD($\mathbb{Q}$) - funkcja b przenosi te ideały na $\mathbb{N}$.

W dalszej części badane dokładniej są ideały rozszerzalne do $\mathcal{MBC}$. Zauważone jest, że wcześniejsza obserwacja odnośnie ideałów $\mathcal{I}_d, \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}, \mathcal{W}, \mathcal{H}$ może być wzmocniona - nie są to ideały rozszerzalne do $\mathcal{MBC}$ (Wniosek 2.4.3). Jako Wniosek ze wspomnianego Twierdzenia 2.3.3, otrzymana jest charakteryzacja własności rozszerzalności - możliwość rozszerzenia do $\mathcal{MBC}$ jest równoważna możliwości rozszerzenia do ideału przeliczalnie oddzielalnego (Wniosek 2.4.6). Dalej pokazane jest że rozszerzalność do $\mathcal{MBC}$ pociąga za sobą kolejną własność - tzw. *ω-+-diagonalizowalność* (Stwierdzenie 2.4.9). Podane są przykłady, że uzyskanych implikacji nie można odwrócić: Ideał $\mathcal{J}_c$ jest przeliczalnie oddzielalny ale nie jest $\mathcal{MBC}$ (Przykład 2.4.10), ideał Fin $\oplus \mathcal{I}_d$ jest ideałem rozszerzalnym do $\mathcal{MBC}$ ale nie jest przeliczalnie oddzielalny (Przykład 2.4.12), zaś przekrój ideałów produktowych $(\mathcal{I}_d \otimes \{\emptyset\}) \cap (\{\emptyset\} \otimes \mathcal{I}_d)$ jest ω-+-diagonalizowalny, ale nie jest rozszerzalny do $\mathcal{MBC}$ (Przykład 2.4.15). Zbadane są też inne własności pod kątem rozszerzalności do $\mathcal{MBC}$: ideały które nie są gęste rozszerzają się do $\mathcal{MBC}$ (Twierdzenie 2.4.16) lecz implikacja przeciwna nie zachodzi (Uwaga po Twierdzeniu 2.4.16), oraz gęste P-ideały nie rozszerzają się do $\mathcal{MBC}$ (Wniosek 2.4.18). Rozdział kończy diagram, który porządkuje implikacje z tego rozdziału. Okazuje się, że w kontekście badanych własności, nierozstrzygnięte jest pytanie charakteryzację tych ideałów rozszerzalnych do ideałów $\mathcal{MBC}$, które są gęstymi ideałami ω-+-diagonalizowalnymi, które nie są przeliczalnie oddzielalne i nie są P-ideałami (Problem 2.4.20). Autorka podaje dwa przykłady takich ideałów - jeden jest rozszerzalny do $\mathcal{MBC}$ a drugi nie (Przykład 2.4.19).

W Rozdziale 3 analizowane są zależności między ideałami Furstenberga $\mathcal{I}_F$, Golomba $\mathcal{I}_G$ i Kircha $\mathcal{I}_K$. Podane są przykłady świadczące o tym, że zawieranie zachodzi jedynie między $\mathcal{I}_K$ a $\mathcal{I}_G$, dokładniej

Filip Strobin

$\mathcal{I}_K \subset \mathcal{I}_G$ (Twierdzenie 3.1.4). Oprócz tego:
- zbiór $\{n! : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{I}_F \cap \mathcal{I}_K$ (Przykład 3.1.1)
- zbiór liczb bezkwadratowych $\mathbb{SF}$ oraz zbiór liczb pierwszych $\mathbb{P}$ należą do $\mathcal{I}_F \setminus \mathcal{I}_G$ (Przykłady 3.1.2 oraz 3.1.3)
- zbiór $(\mathcal{I}_G \cap \mathcal{I}_F) \setminus \mathcal{I}_K \neq \emptyset$ (Twierdzenie 3.1.5)
- zbiory $\{n \in \mathbb{N} : p_1|n$ lub ... lub $p_k|n\} \in \mathcal{I}_K \setminus \mathcal{I}_F$, gdzie $p_1, ..., p_k$ to ustalone liczby pierwsze (Wniosek 3.1.8)
- zbiór $\mathcal{I}_G \setminus (\mathcal{I}_K \cup \mathcal{I}_F) \neq \emptyset$ (Stwierdzenie 3.1.9)

Wykorzystując wspomniany wcześniej Wniosek 2.3.7, podana jest łatwa obserwacja że ideały $\mathcal{I}_F, \mathcal{I}_G, \mathcal{I}_K$ są gęstymi, reprezentowanymi topologicznie ideałami $\mathcal{MBC}$ typu $F_{\sigma\delta}$, ale nie F_σ i nie P-ideałami (Wniosek 3.2.1).

W dalszej części Autorka analizuje rozważane ideały pod kątem własności *FinBW* (wprowadzone niedawno przez gdańskich matematyków). Podaje nową (choć opartą o idee znanej już) charakteryzację tej własności (Stwierdzenie 3.3.3) i wykorzystuje ją do udowodnienia, że ideały $\mathcal{I}_F, \mathcal{I}_G, \mathcal{I}_K$ nie mają własności FinBW (Twierdzenie 3.3.4 oraz Wniosek 3.3.5). W konsekwencji, Autorka wnioskuje (przy wykorzystaniu wyników wspomnianych matematyków) jeszcze, że te ideały mają tzw. *własność Riemanna*, tj. nie rozszerzają się do ideałów sumowalnych (Wniosek 3.3.8).

Rozdział czwarty poświęcony jest analizie Ideału Rizzy $\mathcal{I}_R$. Wykorzystując niedawne wyniki P. Szczuki, Autorka dowodzi że ideał Rizzy składa się dokładnie ze zbiorów które nie są gęste w topologii $\mathcal{T}_R$ (Stwierdzenie 4.0.4) oraz charakteryzuje ciągi arytmetyczne należące do $\mathcal{I}_R$ (Stwierdzenie 4.1.1). Podaje też naturalne przykłady zbiorów należących bądź nienależących do ideału $\mathcal{I}_R$ (Wnioski 4.1.2, 4.1.3, 4.1.6, Przykłady 4.1.5, 4.1.7, 4.1.8, 4.1.9 oraz 4.1.10; ten ostatni przykład jest dość zaskakujący - okazuje się że zbiór liczb Fibonacciego nie należy do $\mathcal{I}_R$), jak również argumentuje że zbiory bazowe w topologiach Golomba, Kircha i te z bazy topologii Furstenberga które nie należą do $\mathcal{T}_R$, są elementami $\mathcal{I}_R$ (Wniosek 4.1.4).

W dalszej części rozdziału Autorka analizuje własności ideału $\mathcal{I}_R$. Pokazuje m.in, że ideał Rizzy nie jest gęsty (Twierdzenie 4.2.3) oraz jest ideałem typu F_σ (Stwierdzenie 4.2.5), ma własność FinBW (Wniosek 4.2.7) ale nie jest P-ideałem (Stwierdzenie 4.2.6) i nie ma własności Riemanna (Wniosek 4.2.9). Autorka uczciwie dodaje przy tym, że część własności ideału $\mathcal{I}_R$ daje się wywieść z ogólniejszych teorii (Uwaga po Wniosku 4.2.9).

Kolejnym zagadnieniem poruszonym w kontekście ideału $\mathcal{I}_R$ jest analiza ciała $S(\mathcal{T}_R)$, powiązanego z ideałem $S^0(\mathcal{T}_R)$. Pokazane jest m.in. (Wniosek 4.3.4), że dopełnienie tej rodziny to zbiory "typu Bernsteina".

W Rozdziale 4 udzielona jest też negatywna odpowiedź na niedawne pytanie C. Uzcáteguiego (pytanie 4.4.1), poprzez pokazanie że ideał Rizzy jest przykładem ideału $\mathcal{MBC}$, nieizomorficznego z ideałem NWD($\mathbb{Q}$), lecz generowanego przez przeliczalną przestrzeń topologiczną bez punktów izolowanych (Wniosek 4.4.2). Co więcej, Autorka modyfikuje topologię $\mathcal{T}_R$ otrzymując topologię $\mathcal{T}_{R'}$ o lepszych własnościach oddzielania, dla której $\mathcal{I}_{R'} = \mathcal{I}_R$ (Stwierdzenie 4.4.3, Wniosek 4.4.6), wzmacniając niejako negatywną odpowiedź na rozważane pytanie.

Ostatnia część Rozdziału 4 to porównanie ideału Rizzy z ideałem Furstenberga $\mathcal{I}_F$ oraz ideałem Szyszkowskiej $\mathcal{I}_S$. Autorka odpowiada twierdząco na dwa pytania Promotora i P. Szyszkowskiej (którzy większość tych zależności wyjaśnili już we wcześniejszym artykule) pokazując, że $(\mathcal{I}_R \cap \mathcal{I}_F) \setminus \mathcal{I}_S \neq \emptyset$ (Twierdzenie 4.5.3) oraz $\mathcal{I}_F \setminus (\mathcal{I}_R \cup \mathcal{I}_S) \neq \emptyset$ (Wniosek 4.5.4). Zbadane są też podstawowe własności ideału $\mathcal{I}_S$, rozważane już wcześniej w kontekście pozostałych ideałów.

Rozdział 5 jest poświęcony pewnemu uogólnieniu rodziny ideałów $\mathcal{T}_m$, $m \in \mathbb{N}$, rozważanych w ostatnim czasie przez P. Szyszkowską. Dla ciągu (α_n) liczb całkowitych nieujemnych dla którego zbiór $\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n > 0\}$ jest nieskończony, niech $\mathcal{T}_{(\alpha_n)}$ będzie topologią na $\mathbb{N}$ generowaną przez bazę

$$\mathcal{B}_{(\alpha_n)} = \{\{an + b\} : (a, b) = 1,\ b < a,\ \forall_{i \in \mathbb{N}}\ l_{p_i}(a) \leqslant \alpha_i\}$$

Filip Strobin

gdzie $p_1, p_2, \ldots$ jest rosnącą numeracją liczb pierwszych, zaś $l_p(a)$ to najwyższa potęga liczby p w rozkładzie a. Przyjmując za (α_n) ciag stały o wyrazie m otrzymujemy topologię $\mathcal{T}_m$ rozważaną przez P. Szyszkowską, zaś ciag stały o wyrazie 1 to topologia Kircha.
Główny wynik Rozdziału 5 to bardzo elegancka charakteryzacja zawierania między ideałami generowanymi przez ciągi (α_n). Okazuje się (Twierdzenie 5.2.1), że $\mathcal{I}_{(\alpha_n)} \subset \mathcal{I}_{(\beta_n)}$ wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha_n \leqslant \beta_n$ dla odpowiednio dużych n. Jako wniosek, Autorka pokazuje jak wygenerować continuum wiele parami nieporównywalnych ideałów postaci $\mathcal{I}_{(\alpha_n)}$ (Twierdzenie 5.4.1). Pokazane jest też wszystkie ideały $\mathcal{I}_{(\alpha_n)}$ zawierają ideał Rizzy oraz są zawarte w ideal Golomba $\mathcal{I}_G$, przy czym nawet istnieje zbiór $X \in \mathcal{I}_G$ nienależący do żadnego ideału $\mathcal{I}_{(\alpha_n)}$ (Twierdzenia 5.2.3 oraz 5.2.4).
Oprócz tego autorka analizuje własności ideałów $\mathcal{I}_{(\alpha)}$ pod tymi samymi względami co pozostałe ideały (Wniosek 5.3.1).

Niestety, Rozdział 5 zawiera sporo merytorycznych usterek, w szczególności nie jest jasne czy teza Twierdzenia 5.2.1 jest prawdziwa bez pewnych dodatkowych założeń o ciągach (α_n). Więcej o tych problemach napiszę w dalszej części recenzji.

Rozdział 6 rozszerza wcześniejsze porównania ideałów generowanych przez ciągi arytmetyczne o ideały $\mathcal{I}_d, \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}, \mathcal{H}$ oraz $\mathcal{W}$ - na stronie 78 pojawia się obszerna tabela z której wynika, czy dla danej pary ideałów zachodzi zawieranie czy nie. Część zawierań lub konstrukcji przykładów świadczących o ich braku wynika z wcześniejszych obserwacji, część jest znanych z literatury, a część jest dowodzonych bezpośrednio (z tych ostatnich mamy np. Przykłady 6.17, 6.18, 6.19 czy Twierdzenie 6.27).

Jak widać z powyższego opisu, rozprawa zawiera wiele wyników dotyczących ideałów na zbiorze liczb naturalnych, skoncentrowanych jednak wokół kilku własności (głównie $\mathcal{MBC}$)) oraz wybranych konkretnych ideałów (głównie ideałów generowanych przez ciągi arytmetyczne) i ich wzajemnych zależności.

Jak już napisałem wcześniej, wyniki są interesujące i naturalnie wpisują się pewien nurt badań ostatnich lat. Wspomniałem też, że Autorka dokładnie umieszcza wyniki w tym szerszym kontekście, opisując i komentując podane pojęcia czy przytaczane fakty. Co więcej, w części dowodów wykorzystuje inne wyniki, zarówno te bardziej klasyczne (np. twierdzenie Mazura o charakteryzacji ideałów F_σ) jak i nowsze, powstałe w ostatnich latach, też w środowisku matematyków gdańskich, łódzkich czy bydgoskich. Cześć dowodów z kolei wymagała bardziej żmudnych rachunków i kombinatorycznych analiz (tu zwraca uwagę na pomysłowe Twierdzenia 2.3.9 czy 2.3.11, oraz, mimo usterek, rozumowania z Rozdziału 5). Co więcej, przykłady ilustrujące pewne zależności są albo proste (zbiór liczb pierwszych, zbiór silni itp.) albo bardziej subtelnie konstruowane jeśli, jak sądzę, nie dało się prościej. Widać więc pewną biegłość i wyczucie p. Marty Kweli w poruszanych zagadnieniach (leżących, co warte podkreślenia, często na styku różnych dziedzin matematyki).

Z drugiej strony mam trochę krytycznych uwag do pracy, nie tylko związanych z Rozdziałem 5.

Czasem odnosiłem wrażenie że niektóre fragmenty są zredagowane aż nazbyt szczegółowo, przez co czytelnik raz że może się nieco pogubić, a dwa że odnieść wrażenie że dany wynik jest głębszy niż jest w istocie. Np. Przykład 2.4.12 daje nam ideał rozszerzalny do $\mathcal{MBC}$ który nie jest przeliczalnie oddzielalny, po czym następuje uwaga że ten ideał daje nam też przykład ideału rozszerzalnego do $\mathcal{MBC}$ który nie jest $\mathcal{MBC}$. Jest to oczywiste z wcześniejszego twierdzenia mówiącego o tym że ideały $\mathcal{MBC}$ są przeliczalnie oddzielalne, ale podawanie tego osobno sugeruje że mamy tu jakąś nową informację. Albo formułowanie wniosku, że ideały o których wcześniej wiedzieliśmy że są $\mathcal{MBC}$, są też rozszerzalne do $\mathcal{MBC}$. Tego typu miejsc znalazłem jeszcze kilka. Rozumiem że Autorka chciała jak najpełniej przekazać obraz badań, ale, jak już napisałem, czasem czułem że nieco zbyt sumiennie do tego podchodzi.

Trochę zamieszania wprowadza też odgórne założenie że ideał ma z założenia zawierać ideał Fin. Nie ma tego założenia w definicji ideału, więc każdorazowo Autorka się musi tłumaczyć że zawęża badania

Filip Strobin

do przypadku gdy dana rodzina będąca ideałem zawiera jednak Fin (choć, przyznaję, robi to szczegółowo analizując warunki związane z tym dodatkowym założeniem). Z drugiej strony wykorzystuje w paru miejscach ideał $\{\emptyset\}$...

Mam też zastrzeżenia co do niektórych sformułowań treści matematycznych - najbardziej rzuciła mi się w oczy treść Stwierdzenia 4.0.4 - trochę zajęło mi zauważenie, że warunek po prawej stronie to dokładnie brak gęstości zbioru A. Zresztą takie zgrabne wysłowienie tej treści (w nieco inny sposób) znajdziemy potem, ale jako wniosek (Stwierdzenie 4.3.1), i to dowodzony!

Tytuł Rozdziału 5 jest też w mojej opinii nienajlepszy - istnienie tego antyłańcucha jest konsekwencją istnienia znacznie bogatszej rodziny ideałów i zależności między nimi wyrażonej w Twierdzeniu 5.2.1.

Mam też krytyczną uwagę dotyczącą autorstwa poszczególnych rezultatów (lub, bardziej precyzyjnie - stopnia autorstwa). Część wyników pochodzi z prac współautorskich, i brakowało mi podkreślenia czy dany wynik był uzyskany samodzielnie czy "podczas wspólnych dyskusji", a jeśli tak, to od kogo pochodziły główne idee, itp. Zakładam jednak że wyniki zamieszczone w rozprawie pochodzą od Autorki w odpowiednim stopniu.

Przejdę teraz do omówienie istotnych problemów z Rozdziałem 5.

Na stronie 60 (jeszcze w Rozdziale 4) pojawia się stwierdzenie, że jeżeli dwie bazy $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ są współpoczątkowe, to generują tą sama topologię. To nie jest prawdą i już sam przykład z rozprawy o tym świadczy - topologia $\mathcal{T}_{R'}$ jest T_1 a topologia $\mathcal{T}_R$ nie jest T_1, zaś ich bazy są współpoczątkowe. Chodzi tu o coś innego - nie tyle topologie są takie same co ideały zbiorów nigdziegęstych w tych topologiach (i o tym mówią Stwierdzenia 4.4.5 i Wniosek 4.4.6). W tym kontekście nie jest np. pewne czy baza $\mathcal{B}'_S$ ze Stwierdzenia 4.5.9 jest faktycznie bazą topologii $\mathcal{T}_S$, choć na pewno ideały zbiorów nigdziegęstych są takie same.

Z tego też powodu Stwierdzenie 5.1.4 o równoważności baz $\mathcal{B}'_{(\alpha_n)}$ i $\mathcal{B}''_{(\alpha_n)}$ z bazą topologii $\mathcal{T}_{(\alpha_n)}$ nie jest prawdziwe (można zauważyć, że topologia generowana przez $\mathcal{B}''_{(\alpha_n)}$ nie jest T_2 o ile $\alpha_1 > 0$), jednak współpoczątkowość baz jest na szczęście zachowana (mimo luki w jej dowodzie, na szczęście usuwalnej).

Najpoważniejsze zastrzeżenia mam do dowodu głównego wyniku, Twierdzenia 5.2.1. Problem pojawia się wtedy gdy dobieramy a' tak by $\Theta(a) = \Theta(a')$ i $\{a'n + b'\}$ ma należeć do bazy innej topologii niż $\{an + b\}$. Daje się podać przykłady gdy ta konstrukcja nie jest możliwa. Oprócz tego w dowodzie implikacji " $\Leftarrow$ ", oprócz sporego bałaganu w konstrukcji indukcyjnej, pojawia się nieprawdziwe szacowanie.

Swoje uwagi i wątpliwości przekazałem Autorce. Otrzymałem przekonujące wyjaśnienie, że większość problemów znika przy dodatkowym założeniu, że ograniczmy się do ciągów o wyrazach dodatnich. Do tego Autorka dosłała drobne korekty w innych miejscach oraz skorygowany dowód implikacji " $\Leftarrow$ ".

Na szczęście ograniczenie się do ciągów o wyrazach dodatnich nie zmniejsza bardzo znacząco wartości wyniku (w szczególności, dowód Twierdzenia 5.4.1 o istnieniu antyłańcucha można łatwo naprawić), a skorygowany dowód wspomnianej implikacji wygląda już dużo lepiej niż oryginalny.

Powyżej podałem sporo uwag krytycznych, z nich najpoważniejsza to ta związana z Rozdziałem 5 - pozostałe to raczej standardowe usterki i nie wpływają na odbiór pracy. Odbiór który, biorąc pod uwagę mocne strony rozprawy (o których pisałem wcześniej) oraz wyjaśnienia przesłane przez Autorkę, jest pozytywny. Dlatego też uważam, że praca spełnia formalne i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim i postuluję o dopuszczenie panią mgr Martę Kwelę do dalszych etapów postępowania doktorskiego.

Filip Strobin