

Adam Józef Rutkowski

Autoreferat

Gdańsk 2019

I. IMIĘ I NAZWISKO

Adam Józef Rutkowski

II. POSIADANE DYPLOMY, STOPNIE NAUKOWE/ ARTYSTYCZNE – Z PODANIEM NAZWY, MIEJSCA I ROKU ICH UZYSKANIA ORAZ TYTUŁU ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

- 9.11.2011 – stopień doktora nauk fizycznych nadany przez radę Wydziału Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń, tytuł rozprawy: “Analiza stanów cyklicznych kwantowych układów złożonych ”, promotor: prof. Dariusz Chruściński.

III. INFORMACJE O DOTYCHCZASOWYM ZATRUDNIENIU W JEDNOSTKACH NAUKOWYCH

- 01.10.2011r – 30.09.2012r, asystent, Instytut Fizyki, Zakład Fizyki Matematycznej, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń;
- 08.10.2012r – 7.10.2015r, staż podoktorski, Krajowe Centrum Informatyki Kwantowej, Sopot;
- 01.10.2015r – 31.01.2016r, adiunkt, Wydział Fizyki i Matematyki Stosowanej, Politechnika Gdańska;
- od 01.02.2016r – adiunkt, Instytut Fizyki Teoretycznej i Astrofizyki, Uniwersytet Gdański.

IV. WSKAZANIE OSIĄGNIĘCIA* WYNIKAJĄCEGO Z ART. 16 UST. 2 USTAWY Z DNIA 14 MARCA 2003 R. O STOPNIACH NAUKOWYCH I TYTULE NAUKOWYM ORAZ O STOPNIACH I TYTULE W ZAKRESIE SZTUKI (DZ. U. 2016 R. POZ. 882 ZE ZM. W DZ. U. Z 2016 R. POZ. 1311.):

A. Tytuł osiągnięcia naukowego

Wykrywanie i analiza wybranych nielokalnych korelacji w kwantowych układach złożonych: sterowanie EPR i splątanie.

B. Publikacje (autor/autorzy, tytuł/tytuły publikacji, rok wydania, nazwa wydawnictwa, recenzenci wydawniczy)

1. M. Markiewicz, A. Kołodziejcki, Z. Puchała, A. Rutkowski, T. Tylec, W. Laskowski, 2018, Unified approach to geometric and positive-map-based non-linear entanglement identifiers, *Physical Review A* **97**, 042339,
2. A. Rutkowski, A. Buraczewski, P. Horodecki, M. Stobińska, 2017, Quantum steering inequality with tolerance for measurement-setting-errors: experimentally feasible signature of unbounded violation, *Physical Review Letters* **118**, 020402,
3. M. Marciniak, A. Rutkowski, 2017, Merging of positive maps: a construction of various classes of positive maps on matrix algebras, *Linear Algebra and its Applications* **529**, 215–257,
4. M. Marciniak, A. Rutkowski, Y. Zhin, M. Horodecki, R. Horodecki, 2015, Unbounded violation of steering inequalities, *Physical Review Letters* **115**, 170401,
5. M. Mozrzyk, A. Rutkowski, M. Studziński, 2015, Using non positive maps to characterize entanglement witnesses, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **48**, 395302,
6. A. Rutkowski, G. Sarbicki, D. Chruściński, 2015, A class of bistochastic positive optimal maps in $M_d(\mathbb{C})$, *Open Systems & Information Dynamics*, Vol. **22**, No. 3, 1550001,

7. A. Rutkowski, P. Horodecki, 2014, Tensor product extension of entanglement witnesses and their connection with measurement device independent entanglement, *Physics Letters A* **378**, 2043-2047.

C. Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania

Osiągnięcie naukowe jest częścią prac zbiorowych. Mój wkład opisany jest w pkt. IB w załączniku Wykaz opublikowanych prac naukowych lub twórczych prac zawodowych oraz informacja o osiągnięciach dydaktycznych, współpracy naukowej i popularyzacji nauki. Wkład współautorów jest przedstawiony na załączonych oświadczeniach. W dalszej części autoreferatu referencje oznaczone pierwszą literą [H], odnoszą się do prac stanowiących cykl publikacji, na którym opiera się niniejszy wniosek habilitacyjny. Referencje oznaczone pierwszymi literami [D] i [P], wskazują na prace wnioskodawcy nie wchodzące w skład jednotematycznego cyklu publikacji. Pozostałe referencje oznaczone liczbami naturalnymi [19], [20], itd. odnoszą się do publikacji innych osób i zostały włączone celem osadzenia autoreferatu we właściwym kontekście.

Celem moich badań, opisanych w pracach zgłoszonych do postępowania habilitacyjnego, była analiza i metody wykrywania korelacji nielokalnych w kwantowych układach złożonych typu sterowanie EPR i splątanie. Narzuca się pytanie, o powody podjęcia takiej tematyki. Wynika to z faktu, że lokalne pomiary na kwantowych układach złożonych (w ramach opisu mechaniki kwantowej) zazwyczaj prowadzą do korelacji, które nie mogą być wytłumaczone na gruncie fizyki klasycznej. Tego typu korelacje nazywamy nielokalnymi [19]. Nielokalność może być traktowana jako pewien rodzaj zasobu, który można wykorzystać do wielu zastosowań praktycznych. Oprócz aspektu praktycznego pozostaje aspekt poznawczy tj. analiza tych korelacji prowadzi do ciekawych zagadnień związanych z matematyką jak np. charakteryzacja liniowych odwzorowań dodatnich. Co więcej, w opinii wnioski z analiz pozwalają nam lepiej zrozumieć otaczający nas świat i zjawiska fizyczne w nim występujące.

1. Nierówności sterowania

Koncepcja *kwantowego sterowania* została pierwszy raz zaproponowana przez Schrödingera w 1935r [30] jako uogólnienie paradoksu EPR dla dowolnych stanów czystych kwantowych układów dwuciałowych i dowolnych pomiarów na jednym z podukładów. Rozważmy dwóch obserwatorów rozseparowanych przestrzennie współdzielących stan splątany. Pierwszy z obserwatorów poprzez pomiar na swoim podukładzie może „wysterować” stan układu, który przynależy do drugiego obserwatora. Podobnie jak w scenariuszu zaproponowanym przez Bella, nieklasycyzacja związana ze zjawiskiem sterowania (korelacje typu sterowania EPR) może być badana za pomocą *nierówności sterowania*.

W ostatnim okresie, *nieograniczone łamanie nierówności Bella* było intensywnie analizowane, głównie przy użyciu zaawansowanych narzędzi fizyki matematycznej [20–22]. Istniejące wyniki to albo losowe konstrukcje mające źródło w istniejącej wiedzy z obszaru przestrzeni operatorowych, albo pochodne dość skomplikowanych protokołów złożoności komunikacyjnej [23, 24].

W artykułach [H4, H6] analizujemy nieograniczone łamanie nierówności sterowania. W pierwszej kolejności przedyskutujemy rezultaty z pracy [H4], w której wykorzystujemy wewnętrzną relację pomiędzy zjawiskiem sterowania a zasadą nieoznaczoności, używając do tego pomiarów oferujących silną nieoznaczoność tj. baz wzajemnie niezależnych (mutually unbiased bases (MUB)) oraz obserwabli Clifforda. Do tej pory nie było jasne czy kwantowe korelacje typu EPR-sterowania są równoważne korelacjom typu Bella w reżimie dużego łamania odpowiednich nierówności. W pracy [H4] pokazujemy dwa główne wyniki związane z tą tematyką:

- używając MUB uzyskujemy większe łamanie nierówności sterowania niż największe łamanie nierówności Bella,
- używając obserwabli Clifforda pokazujemy nieograniczone łamanie nierówności sterowania w przypadku gdy mamy możliwe tylko dwa wyniki pomiaru dla każdego obserwatora, zjawisko które nie jest znane dla nierówności typu Bella.

Pokazujemy również, że nasze nierówności sterowania są niezwykle proste w porównaniu do istniejących nierówności Bella wykazujących duże łamanie [20, 21] jak również do losowych konstrukcji dla nierówności sterowania opierających się na podejściu za pomocą przestrzeni

operatorowych z pracy [25]. Podczas gdy jeden z naszych wyników jest konsekwencją istniejącej zasady ziarnistości (fine-grained uncertainty principle) [26] opisanej w [27], nasz drugi rezultat - nieograniczone łamanie dla obserwabli dychotomicznych oraz przypadek dużego łamania przy użyciu MUB nie może być wydedukowane z żadnych istniejących zasad nieoznaczoności.

W dalszej części będziemy rozważali następujący scenariusz sterowania zaproponowany w pracach [27, 28], który okazuje się być równoważny scenariuszowi z pracy [29]. Przypuśćmy, że mamy dwóch obserwatorów (A i B). Obserwator A może wybierać spośród n różnych ustawień pomiarów numerowanych przez $x = 1, \dots, n$. Każdy z pomiarów może skutkować jednym m wyników, numerowanych przez $a = 1, \dots, m$. Załóżmy, że lokalna przestrzeń Hilberta dla obserwatora B jest wymiaru d . Dostępne dane do analizy w takim scenariuszu to wysterowane stany tj. operatory dodatnie działające na przestrzeni $\mathcal{H}_B : \sigma_x^a \geq 0$. Zgodnie z zasadą niesygnalizowania wymagamy aby zachodził dodatkowy warunek: $\text{Tr}(\sum_a \sigma_x^a) = 1$ dla każdego x . Zbiór takich operatorów oznaczymy przez $\sigma = \{\sigma_x^a : x = 1, \dots, n, a = 1, \dots, m\}$. Zbiór złożony ze wszystkich możliwych zbiorów σ oznaczymy przez \mathcal{Q} . Jest dobrze wiadomym [30, 31], że każdy zbiór σ może być *zrealizowany kwantowo*, tj. może być wygenerowany przez pomiar na jednym podukładzie układu złożonego z dwóch podukładów. Bardziej precyzyjnie dla każdego σ istnieje przestrzeń Hilbert \mathcal{H}_A , taka że

$$\sigma_x^a = \text{Tr}_A((E_x^a \otimes I_B)\rho), \quad (1)$$

dla każdego x i a , gdzie $\rho \in B(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ jest macierzą gęstości układu złożonego gdzie $\{E_x^a\}_{a=1}^m \subset B(\mathcal{H}_A)$ (przez $B(\mathcal{H})$ mamy na myśli algebrę operatorów liniowych, ograniczonych działających na przestrzeni \mathcal{H}) są pomiarami typu POVM (positive-operator valued measure) dla obserwatora A dla każdego x , tj. $E_x^a \geq 0$ dla każdego x, a , oraz $\sum_a E_x^a = I$, dla każdego x .

Jeśli stan układu złożonego jest separowalny, poprzez pomiar na jednym z podukładów możemy jedynie wygenerować zbiory σ , które posiadają jedynie model lokalnych ukrytych stanów zdefiniowany następująco. Zbiór σ posiada model lokalnych ukrytych stanów (*local hidden state (LHS)*), jeżeli istnieje skończony zbiór indeksów Λ , nieujemnych współczynników q_λ , takich że $\sum_\lambda q_\lambda = 1$, macierzy gęstości σ_λ w $B(\mathcal{H}_B)$ dla $\lambda \in \Lambda$, oraz rozkładów prawdopodobieństwa $\{p_\lambda(a|x)\}_a$ dla każdego x i λ (i.e. $p_\lambda(a|x) \geq 0$ gdzie $\sum_a p_\lambda(a|x) = 1$

dla każdego x, λ), taki że

$$\sigma_x^a = \sum_{\lambda \in \Lambda} q_{\lambda} p_{\lambda}(a|x) \sigma_{\lambda}, \quad (2)$$

dla każdego x, a . Przez \mathcal{L} oznaczmy zbiór wszystkich σ posiadających model LHS.

Tak jak funkcjonal Bella może być użyty do badania niekompatybilności pomiędzy modelem zmiennych ukrytych (LHV) a teorią kwantową, tak możemy użyć nierówności sterowania do badania różnic między zbiorami \mathcal{L} i \mathcal{Q} . W pierwszej kolejności zdefiniujemy nierówności sterowania w duchu pracy [28]. Niech F będzie pewnym funkcjonalem działającym z \mathcal{Q} w liczby rzeczywiste. Jeśli $S_{LHS}(F)$ jest maksymalną wartością S po wszystkich σ spełniających warunki modelu LHS wtedy $S \leq S_{LHS}(F)$ jest nazywane *nierównością sterowania*. Niech $S_{\mathcal{Q}}(F)$ będzie maksymalną wartością F po dowolnych σ (przypomnijmy że każde takie σ posiada kwantową realizację 1). Jeśli $S_{\mathcal{Q}}(F) > S_{LHS}(F)$ wtedy nierówność sterowania jest nazywana nietrywialną, tj. może być złamana przy użyciu stanu splątanego. W dalszej części będziemy rozważać jedynie funkcjonały liniowe. Wtedy możemy zdefiniować funkcjonal sterowania w następujący sposób: dla danych liczb naturalnych n, m i d , definiujemy funkcjonal sterowania F jako zbiór $\{F_x^a : x = 1, \dots, n, a = 1, \dots, m\}$ macierzy rzeczywistych wymiaru $d \times d$. Dla danego σ definiujemy następującą wielkość:

$$\langle F, \sigma \rangle = \text{Tr} \left(\sum_{x=1}^n \sum_{a=1}^m F_x^a \sigma_x^a \right). \quad (3)$$

Dodatkowo, definiujemy dla danego funkcjonala sterowania dwie wielkości: ograniczenie LHS dla F

$$S_{LHS}(F) = \sup \{ |\langle F, \sigma \rangle| : \sigma \in \mathcal{L} \}, \quad (4)$$

oraz ograniczenie kwantowe dla F

$$S_{\mathcal{Q}}(F) = \sup \{ |\langle F, \sigma \rangle| : \sigma \in \mathcal{Q} \}. \quad (5)$$

Zdefiniujmy wielkość kwantowego łamania dla F jako liczbę

$$V(F) = \frac{S_{\mathcal{Q}}(F)}{S_{LHS}(F)}. \quad (6)$$

Funkcjonal sterowania z dużym łamaniem mówi nam jak bardzo różnią się zbiory \mathcal{L} i \mathcal{Q} między sobą. Oprócz powyższego aspektu teoretycznego, istnieje wiele korzyści płynących

z zastosowania funkcjonału sterowania do praktycznych eksperymentów [32, 33] oraz zastosowań związanych z informatyką kwantową [34].

W pracy [H4] formułujemy i udowadniamy dwa główne rezultaty:

- *Nieograniczone łamanie: Bazy wzajemnie niezależne (MUB)*. Naszym celem jest analiza funkcjonału sterowania skonstruowanego przy użyciu baz wzajemnie niezależnych (MUB) ([32]). Niech $M_1 = \{|\phi_1^a\rangle : a = 1, \dots, d\}$ i $M_2 = \{|\phi_2^a\rangle : a = 1, \dots, d\}$ będą dwiema bazami ortonormalnymi w d -wymiarowej przestrzeni Hilberta. Mówimy, że są wzajemnie niezależne jeżeli $|\langle \phi_1^a | \phi_2^b \rangle| = \frac{1}{\sqrt{d}}$ dla każdego $a, b = 1, \dots, d$. Zbiór $M = \{M_x : x = 1, \dots, n\}$ baz ortonormalnych w \mathbb{C}^d nazywamy zbiorem baz wzajemnie niezależnych (MUB), jeżeli M_x i M_y są bazami wzajemnie niezależnymi dla każdego $x \neq y$. Dla danego M , (MUB) definiujemy funkcjonal sterowania jako $F = \{F_x^a\}$, gdzie

$$F_x^a = |\phi_x^a\rangle\langle\phi_x^a|, \quad x = 1, \dots, n, \quad a = 1, \dots, d. \quad (7)$$

Jeżeli F jest funkcjonalem sterowania zdeteminowanym przez MUB jak wyżej (7), wtedy

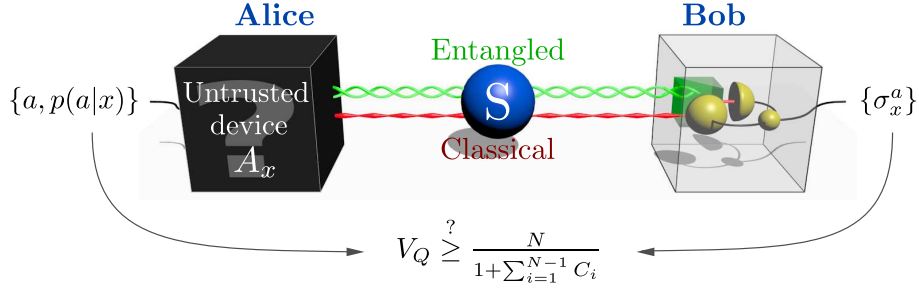
$$V(F) \geq \frac{n\sqrt{d}}{n+1+\sqrt{d}}. \quad (8)$$

- *Nieograniczone łamanie: Obserwable Clifforda*. W tym miejscu skupimy się na przypadku obserwabl dychotomicznych, gdzie możliwe są tylko dwa różne wyniki dla każdego ustawienia pomiaru. Rozważmy operatory $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^{2^n})$, $i = 1, 2, \dots, 2^n$ które mają następujące własności:

1. $A_i^\dagger = A_i$,
2. $A_i A_j + A_j A_i = 2\delta_{ij} \mathbb{1}_{2^n}$,
3. zbiór $\mathcal{A} = \{A_i, i = 1, \dots, 2^n\}$ tworzy bazę dla $\mathcal{B}(\mathbb{C}^{2^n})$.

Algebra generowana przez A_i nazywana jest algebrą Clifforda. Do reprezentacji tej algebry możemy użyć macierzy Pauliego [36]. Wybierzmy n dowolnych operatorów $A_x, x = 1, \dots, n$ ze zbioru \mathcal{A} . Rozważmy następujące projektory $P_x^a : x = 1, \dots, n, a = 1, 2$, gdzie

$$P_x^1 = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + A_x), \quad P_x^2 = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - A_x), \quad x = 1, \dots, n. \quad (9)$$



Rysunek 1: Scenariusz kwantowego sterowania: Obserwator A (Alice) i obserwator B (Bob) współdzielą stan kwantowy ρ , splątany (kolor zielony) lub zawierający tylko klasyczne korelacje (kolor czerwony). Obserwator B chciałby zweryfikować z jakiego rodzaju stanem współdzielonym ma do czynienia. Obserwator A wykonuje N pomiarów na niezwyfikowanych urządzeniach (czarny sześcian) obserwacji A_x i przekazuje wyniki a obserwatorowi B, które otrzymał z prawdopodobieństwem $p(a|x)$. Obserwator B poprzez swoje pomiary σ_x^a może sprawdzić łamanie nierówności sterowania poprzez policzenie ograniczenia (13). C_i mierzy maksymalną komplementarność pomiędzy bazami obserwatora B.

Używając tych projektorów możemy zdefiniować funkcjonal sterowania $F = \{F_x^a = P_x^a - \frac{1}{2} : x = 1, \dots, n, a = 1, 2\}$, t.j.,

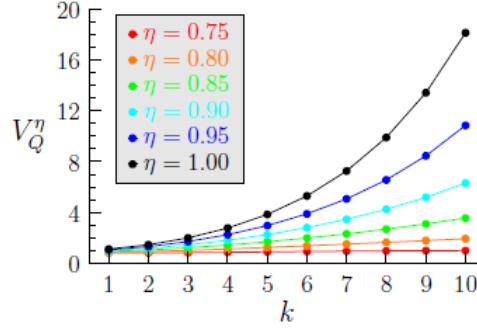
$$F_x^1 = \frac{1}{2}A_x, \quad F_x^2 = -\frac{1}{2}A_x, \quad x = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Jeśli F jest funkcjonalem sterowania zdefiniowanym przez (10), wtedy

$$V(F) \geq \sqrt{\frac{n}{2}}. \quad (11)$$

W [H6] proponujemy w pełni ogólną formułę nierówności sterowania, w której po raz pierwszy uwzględniona jest tolerancja na błędy ustawień pomiarów. Znacząco ułatwia to wykonanie eksperymentalnej obserwacji nieograniczonego łamania nierówności sterowania dla wielocząstkowego dwu częściowego stanu Bella. Nasz główny rezultat z pracy [H6] jest następujący Dla danego scenariusza sterowania zdefiniowanego przez $x \in \{1, \dots, N\}$ ustawień, $a \in \{1, \dots, d\}$ wyników, oraz zbioru N ortonormalnych baz własnych $\{\phi_x^a\}$ definiujących pomiary u obserwatora B, funkcjonal sterowania LHS jest ograniczony z góry przez:

$$S_{LHS} \leq 1 + \sum_{i=1}^{N-1} C_i, \quad (12)$$



Rysunek 2: Kwantowe łamanie nierówności sterowania V_Q^η policzone przy użyciu ϵ -MUB, gdzie $\epsilon = 0.2$, $F = 0.98$ dla różnych wartości efektywności η .

gdzie $C_i = \max_x C_{xN+x-i}$ i $C_{xy} = \max_{a,b} |\langle \phi_x^a | \phi_y^b \rangle|$ for $x, y \in 1, \dots, N$ zdefiniowane są tak jak w relacji nieoznaczoności Maassena-Uffinka. To implikuje następujący rezultat:

$$V_Q \geq \frac{N}{1 + \sum_{i=1}^{N-1} C_i}. \quad (13)$$

W szczególności słabsze organicznie może być wyprowadzone:

$$V_Q \geq \frac{N}{1 + (N-1)C} \quad (14)$$

gdzie $C = \max_i C_i = \max_{x \neq y} C_{xy}$.

Zdefiniujmy „poluzowane” bazy wzajemnie niezależne ϵ -MUB przez następujący warunek $C \leq \sqrt{d^{\epsilon-1}}$ i $0 \leq \epsilon < 1$, gdzie dla $\epsilon = 0$ otrzymujemy zwykle MUB. Każda baza spełniająca warunek z poprzedniej linii nazywana będzie uogólnieniem MUB lub bardziej szczegółowo ϵ -uogólnieniem MUB. Zbadajmy jak wygląda łamanie nierówności (14) dla ϵ -MUB. Nieograniczone łamanie jest możliwe zawsze gdy ilość ustawień $N(d)$ jest rosnącą funkcją d . Wtedy wielkość $V_Q \geq C^{-1}$ i zbiega jak $\sqrt{d^{1-\epsilon}}$ jeśli d dąży do nieskończoności. Dla $\epsilon = 0$ zachowanie $V_Q \geq \sqrt{d}$ reprodukuje rezultat z [H4] ale bez konieczności liniowego skalowania $N(d) = d + 1$. Równoważnie możemy rozważyć zależność w ilości ustawień biorąc $d(N) = N - 1$, wtedy $V_Q \geq \sqrt{N}$ w granicy dużego N . Efekt ten przedstawiony jest na rysunku 2.

Implementacja: Na zakończenie chciałbym przedstawić jak ten abstrakcyjny matematyczny rezultat może być testowany w laboratorium. Rozważmy łączny stan k par dwu kubitów: $|\Psi\rangle = |\psi_{-}\rangle^{\otimes k}$. Wymiar przestrzeni Hilberta wynosi w tym przypadku $d = 2^k$ dodatkowo wiemy, że w tym przypadku istnieje $d + 1$ baz wzajemnie niezależnych z oryginalnym warunkiem $\frac{1}{\sqrt{d}}$. Wybierzmy ilość ustawień jako $N = d^{1-\sigma}$ (N jest liczbą całkowitą),

$0 \leq \sigma < 1$ oraz maksymalne przekrywanie spełniające warunek $C \leq \sqrt{d^{1-\epsilon}}$, $0 < \epsilon < 1$ dla ϵ -MUB. Rozważmy źródło niezależnych par fotonów splątanych w polaryzacji z wiernością dla pojedynczej pary F . Następnie weźmy pod uwagę efektywność detektorów η po stronie obserwatora A (patrz [34]). Wtedy $V_Q^\eta = \frac{(2^{1-\sigma}\eta F)^k}{1+(2^k-1)2^{\frac{(\epsilon-1)k}{2}}}$ daje nieograniczone łamanie jeśli $\epsilon + 2\sigma < 1 + 2\log_2(\eta F)$. Zadziwiającym jest fakt, że dla każdej wierności i efektywności spełniających warunek $\eta F > \frac{1}{\sqrt{2}}$ istnieje ϵ , taki że nieograniczone łamanie jest w rzeczy samej wykładniczą funkcją ilości par splątanych k . Na zakończenie zastosujemy schemat kwantowo-optyczny oparty na schemacie parametrycznego obniżania częstości tj. źródle generującym splątane w polaryzacji stany kwantowej próżni. Splątany stan kwantowej próżni jest to superpozycja $2d$ -spolaryzowanych fotonów stanów Bella $|\psi_d\rangle = \frac{1}{\sqrt{d+1}}(a_H^\dagger b_V^\dagger - a_V^\dagger b_H^\dagger)^d |0\rangle$ z prawdopodobieństwem λ_d , $|\Psi\rangle = \sum_{d=0}^{\infty} \lambda_d |\psi_d\rangle$, gdzie a^\dagger (b^\dagger) jest operatorem kreacji w modzie przestrzennym a (b) a H (V) oznacza horyzontalną (wertykalną) polaryzację. Idealne korelacje obecne w każdym wielocząstkowym singleticie są manifestowane przez równą liczbę fotonów w ortogonalnych polaryzacjach w modzie przestrzennym:

$$|\psi_d\rangle = \frac{1}{\sqrt{d+1}} \sum_{m=0}^d (-1)^m |m_H, (d-m)_V\rangle_a |(d-m)_H, m_V\rangle_b. \quad (15)$$

Każdy mod przestrzenny w $|\psi_d\rangle$ zawiera ustaloną liczbę cząstek d . Rzutowanie na stany Focka stanowią naturalne ramy dla pomiaru liczby fotonów w podukładzie B. Dla prostoty ograniczmy się do szczególnego $|\psi_d\rangle$. W celu wykazania nieograniczonego łamania (14) dla (15) zastosujemy strategię podobną jak strategia używana w pracy [37]: Zbadamy korelacje stosując przyrosty w obrotach w modach przestrzennych. Z uwagi na symetrię rotacyjną $|\psi_d\rangle$, wystarczy rozważyć przyrosty w rotacji pomiędzy a i b , oznaczonych dalej przez θ_x . Każdy mod reprezentuje $(d+1)$ -wymiarową przestrzeń Hilberta rozpiętą przez bazę wybraną ze zbioru N baz ponumerowanych przez $x = 1, \dots, N$, wygenerowanych przez odpowiednią rotację w polaryzacji:

$$|\phi^m(\theta_x)\rangle := |(d-m)_{H+\theta_x}, m_{V+\theta_x}\rangle. \quad (16)$$

Bazy $\{\phi_x^m\}$ korespondują do baz dyskutowanych w twierdzeniu (12) i reprezentują one ϵ -MUBy. Wobec tego mamy : *Dla N baz pomiarowych dla podukładu B $\{|\phi_x^m\rangle\} := \{|\phi^m(\theta_x)\rangle := |(d-m)_{H+\theta_x}, m_{V+\theta_x}\rangle\}$ gdzie $m = 0, \dots, d$ i $x = 1, \dots, N$, zdefiniowany przez pewien kąt $0 \leq \theta_x < \frac{\pi}{2}$, maksymalne przekrycie $C = \max_{x,y,a,b} |\langle \phi_x^a | \phi_y^b \rangle|$ jest równe maksy-*

malnemu przekryciu pomiędzy $\{|\phi^m(0)\rangle\}$ i $\{|\phi^m(\theta)\rangle\}$ wraz z $\theta = \min_{x,y} |\theta_x - \theta_y|$:

$$\begin{aligned} C(\theta, d) &= \max_{m,n} |\langle \phi^n(0) | \phi^m(\theta) \rangle| = \\ &= \sqrt{\binom{d}{q_{\theta,d}}} (\cos \theta)^d (\tan \theta)^{q_{\theta,d}} \end{aligned} \quad (17)$$

gdzie $q_{\theta,d} := \lfloor d \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \rfloor + 1$ i $\lfloor \dots \rfloor$ oznacza funkcję podłogi (floor function). $C(\theta, d)$ zbiega do zera tak jak $1/\sqrt[4]{d}$.

Zakładając eksperymentalną niedokładność w jej najprostszej postaci, przyjmujemy efektywność η taką samą dla wszystkich detektorów. Dla wielocząstkowego stanu Bella (15) i zmodyfikowanej wartości kwantowej funkcjonału sterowania równej $\eta^d S_Q$ warunek (14) jest następujący $V_Q^\eta \geq \frac{\eta^d N(d)}{1 + (N(d) - 1)C(\theta, d)}$.

2. Świadek splątania

Wykrywanie splątania jest jednym z fundamentalnych problemów kwantowej teorii informacji [38]. Niezwykle trudnym jest zweryfikowanie czy stan kwantowy układu złożonego reprezentowany przez macierz gęstości jest separowalny czy splątany. Istnieje szereg kryteriów, które pozwalają wykryć splątanie (patrz np. [39]). Najbardziej znane to kryterium częściowej transpozycji: jeżeli stan ρ jest separowalny wtedy jego częściowa transpozycja $\rho^\Gamma = (\mathbb{I} \otimes T)\rho$ jest operatorem dodatnim [40] (stan ρ dla którego $\rho^\Gamma = (\mathbb{I} \otimes T)\rho \geq 0$ nazywamy stanem PPT). Jedno z najbardziej ogólnych podejść w detekcji splątania jest scharakteryzowane przez świadka splątania (EW) [40, 41]. Stan układu kwantowego jest splątany wtedy i tylko wtedy gdy jest wykrywany przez jakiegoś świadka splątania EW [40]. Świadek splątania, który wykrywa maksymalny zbiór stanów splątanych nazywany jest optymalnym [42]. Niestety nie istnieje charakteryzacja nierozkładalnych i optymalnych świadków splątania (patrz definicje nierozkładalności i optymalności świadka splątania w dalszej części tekstu). Świadcowie optymalni są szczególnie ważni w teorii wykrywania splątania ponieważ wystarczają do całkowitej charakteryzacji stanów splątanych układów składających się z dwóch podukładów. W pracy [H1] podajemy rozszerzenie świadka splątania EW dla stanów kwantowych z przestrzeni $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$, które zachowuje kluczowe własności tj. nierozkładalność i własność napinania (definicje w tekście poniżej). Pokazujemy również jak nasza koncepcja

rozszerzenia połączona jest z ideą „measurement device independent entanglement witnesses” (MDIEW) [43, 44]. Te ostatnie są świadkami, które są odporne na niedoskonałości układu pomiarowego. Pokażemy, że nasze rozszerzenia dostarczają alternatywnego sposobu wyjaśnienia natury MDIEW.

Na wstępie przypomnijmy podstawowe fakty i pojęcia związane ze świadkiem splątania. Niech \mathcal{H} będzie przestrzenią Hilberta, przypomnijmy, że stan kwantowy z przestrzeni może być reprezentowany przez macierz gęstości $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Oznaczmy przez

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) = \{\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \rho \geq 0, \text{Tr}\rho = 1\},$$

zbiór wszystkich stanów działających na przestrzeni Hilberta \mathcal{H} . Niech \mathcal{H} i \mathcal{K} będą przestrzeniami skończenie wymiarowymi, stan układu złożonego z dwóch podukładów $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ nazywamy separowalnym jeżeli może być zapisany w postaci $\rho = \sum_{i=1}^k p_i \rho_i \otimes \sigma_i$, gdzie ρ_i i σ_i są stanami na \mathcal{H} i \mathcal{K} , odpowiednio a p_i są liczbami dodatnimi $\sum_{i=1}^k p_i = 1$. W przeciwnym wypadku mówimy, że ρ jest nie separowalny lub splątany. Zauważamy, że każdy świadek splątania wykrywa jakiś stan [42], w szczególności wykrywa projektor na podprzestrzeń generowaną przez wektor własny odpowiadający ujemnej wartości własnej świadka splątania (patrz definicja poniżej). Operator Hermitowski $\mathcal{W}_{AB} \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_A} \otimes \mathbb{C}^{d_B})$ zdefiniowany na iloczynie tensorowym $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ nazywamy świadkiem splątania EW wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\text{Tr}(\mathcal{W}_{AB}\sigma_{AB}) \geq 0, \tag{18}$$

dla wszystkich stanów separowalnych $\sigma_{AB} \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_A} \otimes \mathbb{C}^{d_B})$ oraz istnieje stan splątany $\rho_{AB} \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_A} \otimes \mathbb{C}^{d_B})$, taki że

$$\text{Tr}(\mathcal{W}_{AB}\rho_{AB}) < 0, \tag{19}$$

(możemy powiedzieć że ρ_{AB} jest wykrywane przez \mathcal{W}_{AB}). Wiemy, że dla danego operatora \mathcal{W}_{AB} jest niezwykle ciężko zweryfikować czy jest on świadkiem czy nie. Przypomnijmy, że świadek splątania \mathcal{W}_{AB} jest rozkładalny jeżeli jest w postaci $\mathcal{W}_{AB} = Q_1 + Q_2^\Gamma$, gdzie $Q_1, Q_2 \geq 0$ i Q^Γ częściową transpozycję Q . Z definicji rozkładalny świadek splątania nie może wykryć stanów PPT. Dla danego \mathcal{W}_{AB} możemy zdefiniować zbiór stanów splątanych wykrywanych przez \mathcal{W}_{AB}

$$D_{\mathcal{W}_{AB}} = \{\rho_{AB} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{AB}) \mid \text{Tr}(\rho_{AB}\mathcal{W}_{AB}) < 0\}.$$

Przypuśćmy teraz, że mamy dwóch świadków splątania \mathcal{W}_1 i \mathcal{W}_2 działających na \mathcal{H}_{AB} . Mówimy że \mathcal{W}_1 jest lepszy niż \mathcal{W}_2 jeśli $D_{\mathcal{W}_1} \supseteq D_{\mathcal{W}_2}$. \mathcal{W} nazywamy optymalnym jeżeli nie istnieje żaden świadek który byłby lepszy niż \mathcal{W} . Świadców optymalni są wystarczający do wykrycia wszystkich stanów splątanych. Autorzy w pracy [42] sformułowali następujący warunek wystarczający optymalności. Dla danego świadka splątania $\mathcal{W}_{AB} \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_A} \otimes \mathbb{C}^{d_B})$ zdefiniujemy zbiór

$$P_{\mathcal{W}} = \{|\phi_A \otimes \psi_B\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \mid \text{Tr}(\mathcal{W}_{AB} |\phi_A \otimes \psi_B\rangle\langle\phi_A \otimes \psi_B|) = 0\}.$$

Mówimy, że \mathcal{W}_{AB} posiada własność napinania jeżeli $\text{span}(P_{\mathcal{W}}) = \mathcal{H}_{AB}$. Świadek splątania posiadający własność napinania jest optymalny [42]. Zauważmy, jednak że własność napinania nie jest warunkiem koniecznym optymalności świadka splątania EW jako że świadek Choi [45, 46], jest świadkiem optymalnym bez własności rozpinania.

Rozważmy nierozkładalnego świadka \mathcal{W}_{AB} i zdefiniujemy zbiór

$$D_{\mathcal{W}_{AB}}^{POT} = \{\rho_{AB} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_{AB}) \mid \text{Tr}(\rho_{AB}\mathcal{W}_{AB}) < 0, \rho_{AB}^{\Gamma} \geq 0\},$$

tj. zbiór stanów PPT splątanych wykrywanych przez \mathcal{W}_{AB} . Mówimy, że \mathcal{W}_1 nd-lepszy od \mathcal{W}_2 jeżeli $D_{\mathcal{W}_1}^{PPT} \supseteq D_{\mathcal{W}_2}^{PPT}$. \mathcal{W} nazywamy nd-optymalnym jeżeli nie istnieje świadek splątania, który byłby od niego nd-lepszy \mathcal{W} . Widzimy, że nd-optymalność jest silniejsza niż optymalność. Świadek splątania jest nd-optymalny wtedy i tylko wtedy gdy \mathcal{W}_{AB} i $\mathcal{W}_{AB}^{\Gamma}$ są optymalne [42]. Zostało pokazane, że nd-optymalni świadkowie splątania *optymalnie* wykrywają stany PPT splątane.

W pracy [H1] formułujemy i udowadniamy szereg twierdzeń związanych z naszą konstrukcją rozszerzonego świadka splątania. *Jeśli $\mathcal{W}_{AB} \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_A} \otimes \mathbb{C}^{d_B})$ jest świadkiem splątania, to również $\mathcal{W}_{A'ABB'} \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_{A'}} \otimes \mathbb{C}^{d_A} \otimes \mathbb{C}^{d_B} \otimes \mathbb{C}^{d_{B'}}) \simeq \mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_{A'}d_A} \otimes \mathbb{C}^{d_B d_{B'}})$ jest świadkiem splątania dla dowolnego $d_{A'}, d_{B'} = 1, \dots, d \leq \infty$, gdzie*

$$\mathcal{W}_{A'ABB'} = P_{A'} \otimes \mathcal{W}_{AB} \otimes P_{B'}, \tag{20}$$

oraz $P_{A'} \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_{A'}})$, $P_{B'} \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^{d_{B'}})$ są dodatnimi operatorami. Następnie pokazujemy, że jeżeli \mathcal{W}_{AB} jest nierozkładalnym świadkiem splątania, to również $\mathcal{W}_{A'ABB'}$ jest nierozkładalnym

świadkiem splątania. Jeśli $\mathcal{W}_{AB} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ (odpowiednio $\mathcal{W}_{AB}^\Gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$) jest świadkiem splątania posiadającym własność napinania, to także $\mathcal{W}_{A'ABB'} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{A'A} \otimes \mathcal{H}_{BB'})$ (odpowiednio $\mathcal{W}_{A'ABB'}^\Gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{A'A} \otimes \mathcal{H}_{BB'})$) posiada własność napinania. Dodatkowo pokazaliśmy, że dodanie klasycznych korelacji powoduje ulepszenie wykrywania splątania przez świadka splątania. Własność tą nazwaliśmy nietrywialnym rozszerzeniem: istnieją stany $\rho_{A'ABB'} \in S(\mathbb{C}^{d_{A'}d_A} \otimes \mathbb{C}^{d_{B'}d_B})$, które są wykrywane przez $\mathcal{W}_{A'ABB'}$, ale stany zredukowane $S(\mathbb{C}^{d_A} \otimes \mathbb{C}^{d_B}) \ni \rho_{AB} = \text{Tr}_{A'B'}(\rho_{A'ABB'})$ nie są wykrywane przez \mathcal{W}_{AB} .

Zilustrujmy powyższe twierdzenie podając konstrukcję takiego stanu i odpowiedniego świadka splątania. Rozważmy świadka Choi [45], który jest w postaci:

$$\mathcal{W}_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \cdot & -1 & \cdot & \dots & -1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \dots & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \dots & \cdot & 1 & \cdot & \dots & -1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \hline \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ -1 & \dots & \cdot & -1 & \cdot & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Kropki w powyższej macierzy oznaczają zera a kreski pionowe i poziome pozwalają łatwiej dostrzec strukturę blokową macierzy. Rozszerzmy naszego świadka do następującej postaci (dla wygody przyjmijmy $d_{A'} = 1$, $d_{B'} = 2$) $\mathcal{W}_{ABB'} = \mathcal{W}_{AB} \otimes P_{B'}$, gdzie $P_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Rozważmy następnie stan $\rho_{ABB'} \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^2) \simeq \mathcal{B}(\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^6)$ w postaci:

$$\rho_{ABB'} = \frac{1}{(a_{11} + a_{22} + b_{11} + b_{22})} \sum_{i,j=1}^3 |i\rangle\langle j| \otimes \rho_{ij} \geq 0, \quad (22)$$

gdzie:

$$\rho_{ii} = (\mathcal{S}^{i-1} \otimes \mathbb{I}_2) X (\mathcal{S}^{i-1} \otimes \mathbb{I}_2)^\dagger, \quad (23)$$

oraz \mathcal{S} jest operatorem przesunięcia tj. $\mathcal{S}|k\rangle = |k+1\rangle$, i

$$X = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdots & b_{11} & b_{12} \\ \cdot & \cdot & \cdots & b_{21} & b_{22} \end{array} \right), \quad (24)$$

oraz

$$\rho_{ij} = |i\rangle\langle j| \otimes \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad i \neq j. \quad (25)$$

Stan $\rho_{ABB'}$ jest dodatnio określony wtedy i tylko wtedy gdy $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \geq 0$ i $b = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \geq 0$. Policzmy następujące wielkości

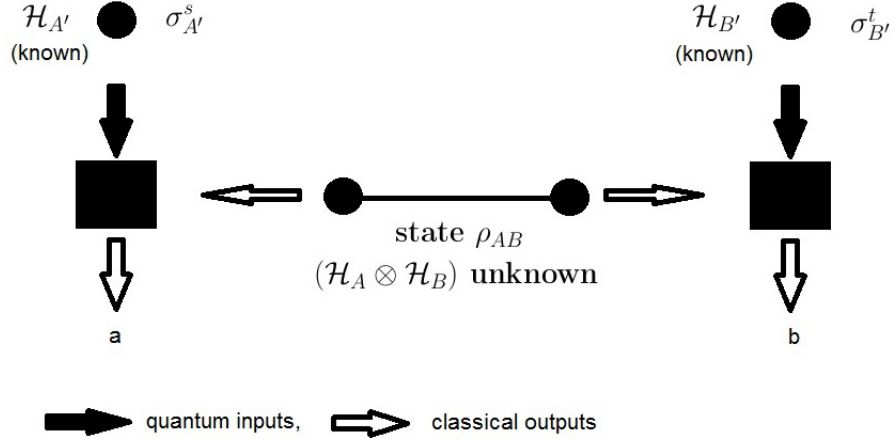
$$\text{Tr}(\mathcal{W}_{ABB'}\rho_{ABB'}) = \frac{3}{(\text{Tr}(a+b))} \text{Tr}(P_{B'}(b-a)) \quad (26)$$

i

$$\text{Tr}(\mathcal{W}_{AB}\rho_{AB}) = \frac{3}{(\text{Tr}(a+b))} \text{Tr}(b-a), \quad (27)$$

gdzie $\rho_{AB} = \text{Tr}_{B'}(\rho_{ABB'}) \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3)$. Wybierzmy dla przykładu $P_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a_{21} = a_{12}$ ($b_{21} = b_{12}$), $b_{11} = a_{11}$ i $b_{22} = a_{22}$. Dla tego szczególnego wyboru stanu otrzymujemy $\text{Tr}(\mathcal{W}_{ABB'}\rho_{ABB'}) = 3\text{Tr}(P_{B'}(b-a)) = 3(b_{12} - a_{12}) < 0$ jeśli $b_{12} \neq a_{12}$ i $\text{Tr}(\mathcal{W}_{AB}\rho_{AB}) = 3\text{Tr}(b-a) = 0$.

Obecnie chcemy wykazać, że istnieje naturalne połączenie rozszerzonego świadka splątania EW w postaci $\mathcal{W}_{A'ABB'} = P_{A'} \otimes \mathcal{W}_{AB} \otimes P_{B'}$, for $P_{A'}, P_{B'} \geq 0$ z niezależnym od pomiarów świadkiem splątania (MDIEW). Idea świadka splątania MDIEW została zaproponowana w pracy [43]. Obserwatorzy kontrolują lokalne stany wejściowe jednakże mogą nie mieć kontroli nad sprzężeniem z przychodzącymi stanami cząstek ρ_{AB} . Nawet fizyczne stopnie swobody tego ostatniego mogą być całkowicie odmienne od oczekiwań obserwatorów. Niemniej jednak, fałszywy raport o splątaniu ρ nie ma miejsca, co stanowi istotę koncepcji MDIEW.



Rysunek 3: Opis schematu na rysunku znajduje się w tekście

Przypomnijmy koncepcję MDIEW, może ona być reprezentowana przez pewien operator lub w szerszym sensie przez kwantową operację pozwalającą nam wykryć splątanie w stanie kwantowym ρ_{AB} w przypadku gdy wymiar przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ nie jest znany. Aby to uzyskać niezbędnym elementem jest kontrola lokalnych stopni swobody aparatury lub układów. Na rysunku 3 mamy konfigurację gdzie lokalne kontrolowane obiekty to przygotowane stany $\sigma_{A'}^s$, $\sigma_{B'}^t$, ich przestrzenie Hilberta są znane dla obserwatora A i obserwatora B, także w sensie lokalnych POVM (reprezentowanych na rysunku 3 przez czarne kwadraty), które łączą lokalne części układu w stanie ρ_{AB} dokładnie ze stopniami swobody odpowiadającymi znanym przestrzeniom Hilberta $\mathcal{H}_{A'}$ i $\mathcal{H}_{B'}$. Jest to kontrola, która pozwala nam wykrywać splątanie w stanie ρ_{AB} w sposób niezależny od urządzenia, nawet jeśli przestrzeń Hilbert nie jest znana obserwatorom.

Podsumowując w pracy [H1] zaproponowaliśmy następujące rezultaty:

- *Nowe (nietrywialne) rozszerzenie świadka splątania dla stanów z przestrzeni $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2}$;*
- *Nasza konstrukcja zachowuje własność nierozkładalności i rozpinania (optymalności i nd-optymalności);*
- *Pokazaliśmy w jaki sposób koncepcja rozszerzonego świadka splątania może być połączona z MDIEW.*

W pracy [H3] zaproponowaliśmy nową metodę konstrukcji świadka splątania. Pokazaliśmy, że do konstrukcji takiego świadka możemy użyć odwzorowania, które nie jest dodatnie na

całej swojej dziedzinie. W naszym podejściu kluczową rolę odgrywają odwzorowania, które są surjekcjami pomiędzy zbiorami projektorów \mathcal{P}_k^d rzędu k dla $k \leq d$ i zbiorem projektorów \mathcal{P}_1^d rzędu jeden działających na przestrzeni d wymiarowej. Argumentujemy, że nasza metoda może być użyta do pokazania czy dana obserwabla jest świadkiem splątania. Pokażemy, że odwzorowanie odwrotne do odwzorowania redukcji spełnia nasze wymagania i możemy go użyć do konstrukcji nowych świadków splątania. Główne twierdzenie jakie proponujemy w [H3] jest następujące: *Niech $W \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d)$, $W = W^\dagger$, $W \not\geq 0$ i W takie, że $\widetilde{W} = (\mathbf{1} \otimes \Lambda)W \geq 0$ dla pewnego liniowego odwzorowania $\Lambda : \mathcal{B}(\mathbb{C}^d) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$. Załóżmy, że odwzorowanie $\Lambda^\dagger : \mathcal{B}(\mathbb{C}^d) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$ nie jest dodatnie na całej dziedzinie a jedynie surjektywnie odwzorowuje zbiór projektorów \mathcal{P}_k^d rzędu k na zbiór projektorów \mathcal{P}_1^d rzędu 1, wtedy:*

$$\forall |\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathbb{C}^d : \|\psi\| = \|\phi\| = 1 \quad 0 \leq \text{Tr}(W |\psi\rangle\langle\psi| \otimes |\phi\rangle\langle\phi|) \quad (28)$$

więc operator W jest świadkiem splątania. Naturalnie pojawia się pytanie: czy potrafimy podać przykład takiego odwzorowania, które spełnia powyższe warunki? Rozważmy odwzorowanie liniowe:

$$R^{-1} : \mathcal{B}(\mathbb{C}^d) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C}^d), \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d) \quad R^{-1}(A) = \frac{\mathbf{1}}{d-1} \text{Tr}(A) \mathbf{1} - A, \quad (29)$$

odwzorowanie liniowe R^{-1} działa w przestrzeni liniowej $\mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$, która jest przestrzenią Hilberta w odniesieniu do standardowego iloczynu skalarnego Hilberta-Schmidta. Odwzorowanie redukcji [47] jest zdefiniowane następująco:

$$R : \mathcal{B}(\mathbb{C}^d) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C}^d), \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d) \quad R(A) = \text{Tr}(A) \mathbf{1} - A. \quad (30)$$

Odwzorowanie odwrotne do odwzorowania redukcji R^{-1} spełnia wszystkie wymagania twierdzenia (28) więc może zostać użyte do konstrukcji świadka splątania. W tym miejscu przedstawię konstrukcję nowej klasy świadków splątania, które mogą być traktowane jako uogólnienie świadka splątania Choi [45]. Rozważmy następującą konstrukcję, w której startujemy z dodano określonego operatora $0 \leq \widetilde{W} \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d)$ wyrażonego w bazie standardowej $\mathcal{B}(\mathbb{C}^d) \ni e_{ij} = |i\rangle\langle j|$ dla $i, j = 1, \dots, d$:

$$\widetilde{W} = \sum_{i,j=1}^d e_{ij} \otimes \widetilde{W}_{ij}. \quad (31)$$

Niech $S \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$ będzie operatorem przesunięcia:

$$S|i\rangle := |i+1\rangle \quad \text{mod } d,$$

wtedy operatory \widetilde{W}_{ij} w równaniu (31) są postaci:

$$\widetilde{W}_{ii} = S^{i-1} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_d \end{pmatrix} S^{(i-1)\dagger}, \quad a_i \geq 0 \quad \text{for } i = 1, \dots, d, \quad (32)$$

oraz pozadiagonalne elementy tj. dla $i \neq j$

$$\widetilde{W}_{ij} = S^{i-1} \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} S^{(j-1)\dagger}, \quad i, j = 1, \dots, d. \quad (33)$$

korzystając z postaci naszego operatora \widetilde{W} w równaniu (31) wraz z postaciami operatorów \widetilde{W}_{ij} danych formułami (32) i (33) jesteśmy w stanie napisać warunki dodatniości dla operatora \widetilde{W} w terminach parametrów a_i i x . Operator $\widetilde{W} \geq 0$ wtedy i tylko wtedy gdy podmacierz A jest dodatnia

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & x & \cdots & x \\ x & a_1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \geq 0, \quad (34)$$

tj. gdy $x \in [\frac{-a_1}{d-1}, a_1]$. Używając powyższych informacji jesteśmy w stanie skonstruować odpowiedniego świadka splątania. Mianowicie, użyjmy odwzorowania odwrotnego do odwzorowania redukcji (30) wiemy, że to odwzorowanie nie jest dodatnie w ogólności. Operator W weźmy w postaci $W = (\mathbf{1} \otimes R) \widetilde{W}$, wtedy następujące warunki muszą być spełnione:

$$\begin{cases} x \in \left[\frac{-a_1}{d-1}, a_1 \right] \\ x \in \left[-y_1, \frac{y_1}{d-1} \right] \\ y_k \geq 0 \end{cases} \quad \text{dla } k = 1, \dots, d, \quad (35)$$

gdzie $y_k = \frac{1}{d-1} \sum_{i=1}^d a_i - a_k$, dla $k = 1, \dots, d$. Łatwo zobaczyć, że dla wymiaru $d = 3$ i parametrów $a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = 1$ odtwarzamy świadka splątania typu Choi (patrz równanie (21)).

3. Odwzorowania dodatnie

Przypomnijmy, że odwzorowanie $\Lambda : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K})$ jest dodatnie jeżeli odwzorowuje elementy dodatnie ze stożka $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ w stożek elementów dodatnich $\mathcal{B}(\mathcal{K})$. Odwzorowania dodatnie pełnią niezwykle ważną rolę w matematyce jak również fizyce teoretycznej [48–51] dla przykładu w kwantowej teorii informacji są niezwykle ważnym narzędziem, które pozwala wykryć splątanie: *Rozważmy stan kwantowy żyjący na przestrzeni $\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}$ reprezentowany przez macierz gęstości ρ . Stan ρ jest separowalny wtedy i tylko wtedy gdy $(\mathbb{1} \otimes \Lambda) \rho \geq 0$ dla każdego dodatniego odwzorowania liniowego $\Lambda : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K})$.* W pierwszej kolejności wprowadźmy niezbędne definicje dotyczące odwzorowań dodatnich. Dla dowolnego dodatniego odwzorowania liniowego Λ definiujemy odwzorowanie rozszerzone $(\mathbb{1}_k \otimes \Lambda) : M_k(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow M_k(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K})$ (odpowiednio $(T \otimes \Lambda) : M_k(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow M_k(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K})$) ($M_k(\mathbb{C})$ oznacza algebrę macierzy wymiaru $k \times k$ nad ciałem \mathbb{C}). Powiemy, że odwzorowanie Λ jest k -dodatnie (odpowiednio k -kododatnie) jeżeli odwzorowanie rozszerzone jest dodatnie. Mówimy, że Λ jest odwzorowaniem kompletnie dodatnim (odpowiednio kompletnie kododatnim) jeżeli odwzorowanie rozszerzone jest dodatnie dla każdego $k = 1, 2, \dots$. Wprowadźmy teraz pojęcie optymalności dla odwzorowań dodatnich jako analogu optymalności dla świadków splątania: odwzorowanie dodatnie $\Lambda : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K})$ jest optymalne jeśli dla każdego odwzorowania kompletnie dodatniego $\Lambda_{CP} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K})$ nowe odwzorowanie $\phi = \Lambda - \Lambda_{CP}$ nie jest dłużej dodatnie. Oznacza to, że takie odwzorowanie optymalnie wykrywa splątanie. Pośród odwzorowań optymalnych istnieje podzbiór odwzorowań ekstremalnych. Zauważmy, że każde odwzorowanie dodatnie generuje promień $[\phi] = \{\lambda\phi : \lambda > 0\}$. Odwzorowanie dodatnie $\phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K})$ jest ekstremalne wtedy gdy dla każdego odwzoro-

wania dodatniego $\Lambda : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K})$ które nie należy do promienia $[\phi,]$ nowe odwzorowanie $\phi - \Lambda$ nie jest już dodatnie. Potrzebujemy jeszcze jednego pojęcia, mianowicie: promień ekstremalny $[\phi]$ jest eksponowany jeśli istnieje hiperpłaszczyzna taka, że $H \cap P^+ = [\phi]$, gdzie P^+ jest stożkiem wypukłym odwzorowań dodatnich z $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K})$. Odwzorowanie ϕ jest eksponowane wtedy i tylko wtedy gdy generuje eksponowany promień $[\phi]$. Najmniejszy zbiór odwzorowań dodatnich który optymalnie wykrywa splątanie w stanach kwantowych układów złożonych to zbiór odwzorowań eksponowanych.

W pracy [52] autorzy rozważali następujące liniowe odwzorowanie $\Lambda_3 : M_3(\mathbb{C}) \rightarrow M_3(\mathbb{C})$ (M_d jest macierzą wymiaru $d \times d$ nad ciałem \mathbb{C}) zdefiniowane jak poniżej

$$\Lambda_3 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}a_{13} \\ 0 & \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) & \frac{1}{\sqrt{2}}a_{32} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}a_{31} & \frac{1}{\sqrt{2}}a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (36)$$

W tej samej pracy pokazano, że Λ_3 jest nierozkładalnym, bistochastycznym, ekstremalnym (nawet eksponowanym) odwzorowaniem liniowym. W pracy [H2] zanalizowaliśmy następujące uogólnienie Λ_3 na przypadek d wymiarowy tj. $\Lambda_d : M_d \rightarrow M_d$:

$$\Lambda_d(A) = \frac{1}{d-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{d-1} a_{ii} & \cdots & 0 & 0 & \sqrt{d-1}a_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \sum_{i=1}^{d-1} a_{ii} & 0 & \sqrt{d-1}a_{d-2,d} \\ 0 & \cdots & 0 & \sum_{i=1}^{d-1} a_{ii} & \sqrt{d-1}a_{d,d-1} \\ \sqrt{d-1}a_{d1} & \cdots & \sqrt{d-1}a_{d,d-2} & \sqrt{d-1}a_{d-1,d} & (d-1)a_{dd} \end{pmatrix}, \quad (37)$$

gdzie $A = [a_{ij}] \in M_d$.

Proponujemy szereg rezultatów dla tak uogólnionego odwzorowania [H2], mianowicie : Λ_d jest odwzorowaniem liniowym. Nietrudno jest pokazać, że Λ_d zachowuje ślad i zachowuje element neutralny więc definiuje odwzorowanie dodatnie bistochastyczne. Zajmijmy się teraz nierozkładalnością tak zdefiniowanego odwzorowania Λ_d . Aby udowodnić, że jest ono nierozkładalne skonstruujemy stan PPT ρ taki, że $\text{Tr}(W_d \rho) < 0$, gdzie $W_d = (\mathbb{1} \otimes \Lambda_d)P_d^+$ oznacza świadka splątania odpowiadającego mu odwzorowania Λ_d ([41], [51]). Zdefiniujmy następujący stan

$$\rho = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \sqrt{d-2}e_{11} + e_{dd} & 0 & \cdots & 0 & -e_{1d} \\ \hline 0 & \sqrt{d-2}e_{22} + e_{dd} & \cdots & 0 & -e_{2d} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & \sqrt{d-2}e_{d-1,d-1} + e_{dd} & -e_{d-1,d}^T \\ \hline -e_{d1} & -e_{d2} & \cdots & -e_{d,d-1}^T & \mathbb{I} - (1 - \sqrt{d-2}) e_{dd} \end{array} \right), \quad (38)$$

gdzie $e_{ij} = |i\rangle\langle j|$. Zauważmy, że $\rho \geq 0$ wtedy i tylko wtedy gdy następująca podmacierz wymiaru $d-1 \times d-1$ jest dodatnia

$$\left(\begin{array}{ccccc} \sqrt{d-2} & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{d-2} & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{d-2} & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & \sqrt{d-2} \end{array} \right) \geq 0, \quad (39)$$

nie trudno jest znaleźć wartości własne tej macierzy: $\{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \sqrt{d-2}, \lambda_3 = 2\sqrt{d-2}\}$, gdzie λ_1, λ_3 są pojedyncze a λ_2 ma krotność $d-3$. Rozważmy teraz częściową transpozycję tego stanu

$$\rho^\Gamma = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \sqrt{d-2}e_{11} + e_{dd} & 0 & \cdots & 0 & -e_{d1} \\ \hline 0 & \sqrt{d-2}e_{22} + e_{dd} & \cdots & 0 & -e_{d2} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & \sqrt{d-2}e_{d-1,d-1} + e_{dd} & -e_{d,d-1}^T \\ \hline -e_{1d} & -e_{2d} & \cdots & -e_{d-1,d}^T & \mathbb{I} - (1 - \sqrt{d-2}) e_{dd} \end{array} \right). \quad (40)$$

Dodatniość ρ^Γ wynika z dodatniości następujących podmacierzy 2×2

$$\left(\begin{array}{cc} \sqrt{d-2} & -1 \\ -1 & \sqrt{d-2} \end{array} \right) \quad \text{oraz} \quad \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \right), \quad (41)$$

które są dodatnie. Policzmy teraz ślad ,

$$\text{Tr}(W_d \rho) = 2(d-1) \left(\sqrt{d-2} - \sqrt{d-1} \right) < 0, \quad (42)$$

co w ostateczności pokazuje, że Λ_d jest odwzorowaniem nierozkładalnym dodatkowo skonstruowaliśmy stan PPT (38), który jest splątany. Nasz ostatni wynik z pracy mówi, że

odwzorowanie Λ_d jest optymalne więc optymalnie wykrywa splątanie w stanach kwantowych. W następnej pracy [H5] wprowadzamy następną konstrukcję odwzorowania liniowego, która może być traktowana jako dalsze uogólnienie odwzorowań z prac (36) i (37). Niech $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ będą przestrzeniami Hilberta. Przypuśćmy, że mamy dane dwa odwzorowania dodatnie $\phi_1 : \mathcal{B}(\mathcal{K}_1) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ i $\phi_2 : \mathcal{B}(\mathcal{K}_2) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$. Niech $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2 \oplus \mathcal{K}_3$ i $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3$, gdzie \mathcal{K}_3 i \mathcal{H}_3 są przestrzeniami jednowymiarowymi. Ustalmy wektory $\epsilon \in \mathcal{K}_3$ i $e \in \mathcal{H}_3$, więc $\mathcal{K}_3 = \epsilon\mathbb{C}$ i $\mathcal{H}_3 = e\mathbb{C}$. Naszym celem jest podanie konstrukcji nowego odwzorowania $\phi : \mathcal{B}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ przy użyciu danych odwzorowań ϕ_1 i ϕ_2 . W naszej konstrukcji potrzebujemy dodatkowych elementów: operatorów liniowych $B_i : \mathcal{K}_i \rightarrow \mathcal{H}_i$ i $C_i : \mathcal{K}_i \rightarrow \mathcal{H}_i$, oraz liniowych funkcyjałów $\omega_i : \mathcal{B}(\mathcal{K}_i) \rightarrow \mathbb{C}, i = 1, 2$. Ostatecznie dla $i = 1, 2$ niech P_i będzie ortogonalnym rzutem w \mathcal{H}_i na obraz $\phi_i(\mathbb{I}_{\mathcal{K}_i})$. Przez sklejanie (merging) ϕ_1 i ϕ_2 z użyciem operatorów B_i i C_i oraz funkcyjałów ω_i , mamy na myśli odwzorowanie $\phi : \mathcal{B}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ zadane w następujący sposób:

$$\phi(X) = \begin{pmatrix} \phi_1(X_{11}) + \omega_2(X_{22})P_1 & 0 & B_1X_{13} + C_1X_{31}^T \\ 0 & \phi_1(X_{11}) + \omega_2(X_{22})P_1 & B_2X_{23} + C_2X_{32}^T \\ X_{31}B_1^* + X_{13}^TC_1^* & X_{32}B_2^* + X_{23}^TC_2^* & X_{33} \end{pmatrix}, \quad (43)$$

gdzie $X = (X_{ij})_{i,j=1,2,3} \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ oraz $X_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_j, \mathcal{K}_i)$ są blokami operatora X . Podobnie, blokowa struktura $\phi(X)$ jest odbiciem rozkładu przestrzeni $\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^3 \mathcal{H}_i$, tj. każdy blok $\phi(X)$ jest elementem z odpowiedniej podprzestrzeni $\mathcal{B}(\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_i) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Nietrudno zauważyć, że tak zdefiniowane odwzorowanie jest liniowe. Przedyskutujmy teraz jakie własności ma takie sklejanie. Po pierwsze naszym celem jest podanie warunków wystarczających i koniecznych aby operacja sklejanie była odwzorowaniem dodatnim. Podamy taką charakteryzację w terminach odpowiednich składników występujących przy operacji sklejanie. Zdefiniujmy dla każdego $i = 1, 2$, oraz każdego $\eta_i \in \mathcal{K}_i, y_i \in \mathcal{H}_i$ następujące parametry: $\mu_i(\eta_i, y_i) = \sqrt{\langle y_i | \phi_i(\eta_i \eta_i^*) y_i \rangle}$, $\epsilon_i(\eta_i, y_i) = |\langle y_i | B_i \eta_i \rangle| + |\langle y_i | C_i \bar{\eta}_i \rangle|$, $\delta_i(\eta_i, y_i) = \sqrt{\mu_i(\eta_i, y_i)^2 - \epsilon_i(\eta_i, y_i)^2}$, $\sigma_i(\eta_i, y_{3-i}) = \sqrt{\omega_i(\eta_i, y_i)} \|P_{3-i} y_{3-i}\|$. Jesteśmy gotowi do podania pierwszego wyniku: Operacja sklejanie ϕ odwzorowań dodatnich ϕ_1 i ϕ_2 jest dodatnia wtedy i tylko wtedy gdy zachodzą następujące warunki:

- ω_i są funkcyjałami dodatnimi dla $i = 1, 2$;
- $\epsilon_i(\eta_i, y_i) \leq \mu_i(\eta_i, y_i)$ dla $i = 1, 2, \eta_i \in \mathcal{K}_i, y_i \in \mathcal{H}_i$;

- dla każdego $\eta_1 \in \mathcal{K}_1, y_1 \in \mathcal{H}_2, \eta_2 \in \mathcal{K}_2, y_2 \in \mathcal{H}_2$: $\delta_1(\eta_1, y_1) \delta_2(\eta_2, y_2) + \sigma_1(\eta_1, y_2) \sigma_2(\eta_2, y_1) \geq \epsilon_1(\eta_1, y_1) \epsilon_2(\eta_2, y_2)$.

Następny rezultat jest następujący: Niech ϕ będzie operacją sklejaną dwóch odwzorowań dodatnich ϕ_1 i ϕ_2 . Załóżmy, że ϕ jest odwzorowaniem dodatnim, jeśli dodatkowo ϕ jest 2-dodatnie (odpowiednio 2-kododatnie), wtedy $C_i = 0$ (odpowiednio $B_i = 0$) dla $i = 1, 2$, oraz

$$\delta_1(\eta_1, y_1) \delta_2(\eta_2, y_2) \geq \epsilon_1(\eta_1, y_1) \epsilon_2(\eta_2, y_2). \quad (44)$$

Rozważmy sytuację, gdy $B_1 : \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ i $C_2 : \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ zdefiniowane są w następujący sposób:

$$B_1 \eta_1 = \lambda_1^{-1/2} \phi_1(\eta_1 \zeta_1^*) x_1, \quad C_2 \eta_2 = \lambda_2^{-1/2} \phi_2(\zeta_2 \bar{\eta}_2^*) x_2, \quad \zeta_i, \eta_i \in \mathcal{K}_i, \text{ i } x_i \in \mathcal{H}_i. \quad (45)$$

Niech $C_1 : \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ i $B_2 : \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ będą zerowymi operatorami oraz niech funkcjonały ω_i na $\mathcal{B}(\mathcal{K}_i)$ będą zdefiniowane następująco:

$$\omega_1(X_1) = \text{Tr}(B_1 X_1 B_1^*), \quad \omega_2(X_2) = \text{Tr}(C_2 X_2^T C_2^*), \quad X_i \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_i), \quad i = 1, 2. \quad (46)$$

Kanonicznym sklejanym nazwiemy odwzorowanie zdefiniowane przy pomocy odwzorowań dodatnich ϕ_1 i ϕ_2 oraz składników B_i, C_i oraz ω_i zdefiniowanych jak wyżej. Następujący rezultat zachodzi: Jeśli ϕ_1 jest 2-dodatnim odwzorowaniem i ϕ_2 jest 2-kododatnim odwzorowaniem wtedy kanoniczne sklejanie ϕ dwóch odwzorowań dodatnich ϕ_1, ϕ_2 jest odwzorowaniem dodatnim nierozkładalnym.

Teraz będziemy rozważać specjalne klasy operacji sklejaną w celu wykazania, że istnieje operacja sklejaną, która jest odwzorowaniem eksponowanym. Niech będą dane operatory liniowe $A_1 : \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ i $A_2 : \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$. Niech $\phi_1 : \mathcal{B}(\mathcal{K}_1) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ oraz $\phi_2 : \mathcal{B}(\mathcal{K}_2) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ będą odwzorowaniami zdefiniowanymi następująco:

$$\phi_1(X) = A_1 X A_1^*, \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_1), \quad \phi_2(X) = A_2 X^T A_2^*, \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_2), \quad (47)$$

wtedy: Dla każdego skończone wymiarowych przestrzeni Hilberta $\mathcal{K}_1, \mathcal{H}_1$ i $\mathcal{K}_2, \mathcal{H}_2$ oraz dla każdej pary niezerowych operatorów $A_1 : \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ i $A_2 : \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ kanoniczne sklejanie ϕ odwzorowań ϕ_1 i ϕ_2 danych przez (47) jest dodatnim odwzorowaniem eksponowanym.

Zaprezentujemy teraz główny rezultat uzyskany w pracy [H5]: *Niech $\mathcal{K}_1, \mathcal{H}_1$ i $\mathcal{K}_2, \mathcal{H}_2$ będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami Hilberta, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2 \oplus \mathbb{C}$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathbb{C}$ i niech będą dane niezerowe operatory $A_1 : \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ oraz $A_2 : \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$. Dla każdych $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ i liczby $\nu > 0$, odwzorowanie $\phi : \mathcal{B}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dane przez*

$$\phi(X) = \begin{pmatrix} A_1 X_{11} A_1^* + \nu \text{Tr}(A_2 X_{22}^T A_2^*) P_1 & 0 & e^{i\theta_1} A_1 X_{13} \\ 0 & A_2 X_{22} A_2^* + \nu^{-1} \text{Tr}(A_1 X_{11}^T A_1^*) P_2 & e^{i\theta_2} A_2 X_{32}^T \\ e^{-i\theta_1} X_{31} A_1^* & e^{-i\theta_2} X_{23}^T A_2^* & X_{33} \end{pmatrix}, \quad (48)$$

dla $X = (X_{ij}) \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, jest dodatnim odwzorowaniem eksponowanym.

Podamy teraz przykłady odwzorowań, które są dodatnimi odwzorowaniami optymalnymi. Rozważmy następujące odwzorowanie: *Niech $\mathcal{K}_1 = \mathcal{H}_1, \mathcal{K}_2 = \mathcal{H}_2$ będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami Hilberta, rozważmy odwzorowania $\phi_i : \mathcal{B}(\mathcal{K}_i) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K}_i)$, $i = 1, 2$, gdzie*

$$\phi_1(X_1) = X_1, \quad \phi_2(X_2) = X_2^T, \quad X_i \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_i) \quad i = 1, 2. \quad (49)$$

Niech będą również dane operatory $B_i, C_i : \mathcal{K}_i \rightarrow \mathcal{K}_i$ i funkcjonały ω_i na $\mathcal{B}(\mathcal{K}_i)$ zdefiniowane jak poniżej:

$$B_1 \eta_1 = \eta_1, \quad C_1 \eta_1 = 0 \quad \eta_1 \in \mathcal{K}_1, \quad B_2 \eta_2 = 0, \quad C_2 \eta_2 = \eta_2 \quad \eta_2 \in \mathcal{K}_2, \quad (50)$$

$$\omega_i(X) = \text{Tr}(X), \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_i), \quad i = 1, 2.$$

Sklejanie odwzorowań ϕ_1, ϕ_2 przy użyciu składników opisanych powyżej jest odwzorowaniem w postaci:

$$\phi_{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2}(X) = \begin{pmatrix} X_{11} + \text{Tr}(X_{22}) \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{K}_1)}, & 0 & X_{13} \\ 0 & X_{22}^T + \text{Tr}(X_{11}) \mathbb{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{K}_2)}, & X_{32}^T \\ X_{31} & X_{23}^T & X_{33} \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Tak zdefiniowane odwzorowanie $\phi_{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2}$ jest dodatnim nierozkładalnym odwzorowaniem optymalnym.

Na zakończenie, przedyskutujmy bardziej szczegółowo sytuację gdy wszystkie przestrzenie \mathcal{K}_i i \mathcal{H}_i są jednowymiarowe. W tym przypadku $\mathcal{K} = \bigoplus_{i=1}^3 \mathcal{K}_i = \mathbb{C}^3$ i $\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^3 \mathcal{H}_i = \mathbb{C}^3$, $\mathcal{B}(\mathcal{K}) = \mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathbb{M}_3(\mathbb{C})$. Ogólna postać odwzorowania sklejana (43) w tym przypadku jest zdefiniowana następująco:

$$\phi \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 x_{11} + \omega_2 x_{22} & 0 & b_1 x_{13} + c_1 x_{31} \\ 0 & f_2 x_{22} + \omega_1 x_{11} & b_2 x_{23} + c_2 x_{32} \\ \bar{b}_1 x_{31} + \bar{c}_1 x_{13} & \bar{b}_2 x_{32} + \bar{c}_2 x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Zdefiniujmy następujące parametry:

$$\mu_i = f_i^{1/2}, \sigma_i = \omega_i^{1/2}, \epsilon_i = |b_i| + |c_i|, \delta_i = (\mu_i^2 - \epsilon_i^2)^{1/2}.$$

Przedstawmy rezultaty jakie udało nam się pokazać dla tak zdefiniowanego odwzorowania, mianowicie: *Odwzorowanie $\phi : \mathbb{M}_3(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{M}_3(\mathbb{C})$ dane w postaci (52) jest dodatnie wtedy i tylko wtedy gdy:*

$$\sigma_1 \sigma_2 + \delta_1 \delta_2 \geq \epsilon_1 \epsilon_2. \quad (53)$$

Następny rezultat mówi nam : *Niech ϕ będzie odwzorowaniem danym przez (52), wtedy następujące warunki są równoważne:*

- ϕ jest kompletnie dodatnim odwzorowaniem (odpowiednio kompletnie kododatnim);
- ϕ jest 2-dwudodatnie (odpowiednio 2- kododatnie);
- $c_1 = c_2 = 0$ (odpowiednio $b_1 = b_2 = 0$) oraz $\delta_1 \delta_2 \geq \epsilon_1 \epsilon_2$.

Wprowadźmy następującą notację: $\vec{b} = (|b_1|, |b_2|)^T$ i $\vec{c} = (|c_1|, |c_2|)^T$ będą wektorami leżącymi w pierwszej ćwiartce \mathbb{R}^2 . Niech $s_i = \max\{|b_i|, |c_i|\}$ dla $i = 1, 2$, i $s = \max\{\|\vec{b}\|, \|\vec{c}\|\}$. Ostatecznie, niech $\delta = (\delta_1^2 + \delta_2^2)^{1/2}$ oraz $\epsilon = (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{1/2}$. Zakładamy tutaj, że ϕ jest odwzorowaniem dodatnim więc spełnia (53), wtedy:

- Jeśli wektory \vec{b}, \vec{c} są liniowo zależne, to ϕ jest odwzorowaniem rozkładalnym;

- Niech $\vec{b} \neq 0$, $i \vec{c} \neq 0$. Jeśli $s(\epsilon^2 + \delta^2)^{1/2} < \|\vec{b}_i\|^2 + \|\vec{c}_i\|^2$ wtedy ϕ jest odwzorowaniem nierozkładalnym.

Na zakończenie powiedzmy coś o eksponowalności i ekstremalności odwzorowania ϕ , mianowicie mamy: Niech ϕ będzie odwzorowaniem w postaci (52). Następujące warunki są równoważne:

- ϕ jest odwzorowaniem eksponowanym;
- ϕ jest odwzorowaniem ekstremalnym;
- każdy z następujących warunków zachodzi
 - $\vec{b} \neq 0$, and $\vec{c} \neq 0$;
 - $\delta_1 = \delta_2 = 0$;
 - $\sigma_1\sigma_2 = \epsilon_1\epsilon_2$;
 - $\langle \vec{b} | \vec{c} \rangle = 0$.

4. Odwzorowania dodatnie vs. inne identyfikatory splątania

W tej części w oparciu o pracę [H7] przedstawiamy analizę, czy istnieje związek między dwoma najpopularniejszymi typami identyfikatorów splątania tj.: pierwszym opartym na odwzorowaniach dodatnich którego nie można użyć bezpośrednio w laboratorium, a drugim geometrycznym identyfikatorze splątania bazującym na odwzorowaniach zachowujących Hermitowskość. Wykażemy, że istnieje głęboka zależność między tymi dwoma rodzajami kryteriów splątania. Następnie wprowadzimy ogólne ramy w postaci nieliniowych identyfikatorów splątania (funkcjonałów nieliniowych), które pozwolą nam konstruować nowe eksperymentalnie przyjazne kryteria splątania [H7]. Przypomnijmy, że aby scharakteryzować splątanie stanów kwantowych, możemy do tego użyć odwzorowań dodatnich, które nie są kompletnie dodatnie, tj.:

$$\rho \text{ jest splątany} \iff \exists_{\Lambda} (\mathbb{1} \otimes \Lambda) \rho \not\geq 0. \quad (54)$$

Jak wspomnieliśmy wyżej istnieje drugi rodzaj identyfikatora splątania oparty na specyficznym odwzorowaniu G (patrz [53–57] opisujące kryteria geometryczne) zachowującym Hermitowskość, który w najprostszej postaci dla układów kwantowych składających się z dwóch podukładów może być przedstawiony jako [58]:

$$\rho \text{ is entangled} \iff \exists_{G|\text{Tr}(\rho G(\rho)) \geq 0} \forall_{\rho_1, \rho_2} \text{Tr}(\rho G(\rho_1 \otimes \rho_2)) < \text{Tr}(\rho G(\rho)). \quad (55)$$

Powyższy warunek może być traktowany jako najbardziej ogólne zastosowanie twierdzenia Hahn-Banacha o oddzielaniu. Kryteria geometryczne należą do szerszej klasy nieliniowych identyfikatorów splątania (często nazywanych nieliniowymi świadkami splątania) [59–61]. Naszym celem jest pokazanie, że każdy identyfikator splątania w postaci (55) może być przetłumaczony na odpowiednie kryterium oparte o odwzorowanie dodatnie (54). Aby uzyskać ten wynik przedstawimy bardziej ogólne podejście do detekcji splątania bazującej na funkcjonalach nieliniowych, które same w sobie nie mają interpretacji geometrycznej. Pokażemy, że każdy identyfikator splątania bazujący na funkcjonalach nieliniowych może być przetłumaczony efektywnie na kryterium splątania opartym na odwzorowaniu dodatnim. Załóżmy, że będziemy rozważać tylko układy kwantowe złożone z dwóch podukładów o lokalnych wymiarach ich przestrzeni Hilberta d_A oraz d_B , odpowiednio. Nasze rozważania rozpoczniemy od danego odwzorowania \mathcal{G} (możliwe, że nieliniowego) działającego na przestrzeni macierzy o wymiarze $d_A \times d_B$. Jedynym założeniem jest aby to odwzorowanie zachowywało Hermitowskość. Zdefiniujmy nieliniowe 2- formy (2-argumentowy funkcjonal):

$$\tilde{\omega}_{\mathcal{G}}(\sigma, \rho) = \text{Tr}(\sigma \mathcal{G}(\rho)), \quad (56)$$

który działa na stany z przestrzeni $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Zdefiniujmy teraz nowy funkcjonal:

$$\tilde{\omega}_0(\rho) = \max_{\sigma_{sep}} \tilde{\omega}_{\mathcal{G}}(\sigma_{sep}, \rho), \quad (57)$$

który intuicyjnie daje maksymalne przekrycie pomiędzy danym stanem ρ a zbiorem stanów separowalnych. Równanie (57) możemy przepisać do postaci (gdzie optymalizacja jest brana po wszystkich stanach produktowych):

$$\max_{\sigma_{sep}} \tilde{\omega}_{\mathcal{G}}(\sigma_{sep}, \rho) = \max_{\sigma_{prod}} \tilde{\omega}_{\mathcal{G}}(\sigma_{prod}, \rho). \quad (58)$$

Zdefiniujmy teraz nowy funkcjonal:

$$\omega_{\mathcal{G}}(\rho) = \tilde{\omega}_0(\rho) - \tilde{\omega}_{\mathcal{G}}(\rho, \rho), \quad (59)$$

jest to ogólna postać identyfikatora splątania. Pierwszy z rezultatów w pracy [H7] jest następujący: *Dla każdego odwzorowania \mathcal{G} zachowującego Hermitowskość, funkcjonal $\omega_{\mathcal{G}}(\rho)$ jest identyfikatorem splątania tj.:*

$$\omega_{\mathcal{G}}(\rho) < 0 \Rightarrow \rho \text{ is entangled.} \quad (60)$$

Zauważmy, że ten warunek jest czysto algebraiczny i nie jest nam potrzebna żadna interpretacja geometryczna. Zauważmy, że ten funkcjonal jest nieliniowy nawet jeżeli odwzorowanie \mathcal{G} jest liniowe, jako że maksymalizacja w (59) jest operacją wysoce nieliniową. W całkowitej analogii do zwykłych świadków splątania, każdemu identyfikatorowi splątania postaci (60) odpowiada odwzorowanie dodatnie, które może wykryć co najmniej te same stany kwantowe jak oryginalny identyfikator splątania. Jediną różnicą jest to, że odwzorowanie jawnie zależy od stanu, na który identyfikator splątania działał. Przepiszmy warunek (59) do „świadkowej” postaci:

$$\omega_{\mathcal{G}}(\rho) = \tilde{\omega}_0(\rho) - \text{Tr}(\rho \mathcal{G}(\rho)) = \text{Tr}(\rho [\tilde{\omega}_0(\rho) \mathbb{1} - \mathcal{G}(\rho)]), \quad (61)$$

zdefiniujmy operator $W_{\mathcal{G}}(\rho) = \tilde{\omega}_0(\rho) \mathbb{1} - \mathcal{G}(\rho)$. Warunek (60) jest w postaci: $\text{Tr}(\rho W_{\mathcal{G}}(\rho)) < 0$. Na operator $W_{\mathcal{G}}(\rho)$ można patrzeć jak na nieliniowy, zależny od stanu świadek splątania. Niech $\{\sigma_i^A\}$ i $\{\sigma_i^B\}$ będą dwoma ortonormalnymi bazami z warunkiem normalizacji $\text{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij}$, oznaczmy przez $\omega_{ij}^{\mathcal{G}, \rho}$ elementy macierzowe $W_{\mathcal{G}}(\rho)$ w zadanych bazach. Używając standardowej relacji pomiędzy świadkiem splątania a odpowiadającym mu odwzorowaniu liniowemu otrzymujemy następujący wynik [H7]: *Dla każdej $\{\sigma_i^A\}$ i $\{\sigma_i^B\}$ możemy zdefiniować odwzorowanie liniowe $\Lambda_{\mathcal{G}, \rho}$ w następujący sposób:*

$$\Lambda_{\mathcal{G}, \rho}(\lambda) = \sum_{i,j} \frac{1}{4} \omega_{ij}^{\mathcal{G}, \rho} \text{Tr}(\sigma_i \lambda) \sigma_j, \quad (62)$$

oraz następująca tożsamość zachodzi: $W_{\mathcal{G}}(\rho) = (\mathbb{1} \otimes \Lambda_{\mathcal{G}, \rho}) \left(\frac{1}{2} \sum_m \sigma_m^A \otimes \sigma_m^A \right)$. Przedstawimy teraz główny rezultat z pracy [H7], mianowicie: *Jeśli jakiś identyfikator splątania $\omega_{\mathcal{G}}(\rho)$ wykrywa splątanie w stanie kwantowym ρ dla pewnego odwzorowania \mathcal{G} , wtedy odwzorowanie*

dotądnie $T \circ \Lambda_{\mathcal{G},\rho}^d(\lambda)$ także wykrywa splątanie w stanie ρ :

$$(\mathbb{1} \otimes T \circ \Lambda_{\mathcal{G},\rho}^d)(\rho) \not\geq 0. \quad (63)$$

Gdzie $\Lambda_{\mathcal{G},\rho}^d$ jest odwzorowaniem dualnym do $\Lambda_{\mathcal{G},\rho}$. Co więcej, mając dane dwie bazy $\{\sigma_i^A\}$ i $\{\sigma_i^B\}$ odwzorowanie $\Lambda_{\mathcal{G},\rho}^d(\lambda)$ może być wyrażone następująco:

$$\Lambda_{\mathcal{G},\rho}^d(\lambda) = \sum_{i,j} \frac{1}{4} \omega_{ij}^{\mathcal{G},\rho} \text{Tr}(\sigma_i^B \lambda) \sigma_j^A. \quad (64)$$

Należą się dwa komentarze wyjaśnienia. Pierwszy mówi, że odwzorowanie $T \circ \Lambda_{\mathcal{G},\rho}^d$ może wykrywać w ogólności szerszą klasę stanów niż funkcjonał $\omega_{\mathcal{G}}$, pokazujemy to w pracy [H7] przez podanie konkretnego przykładu. Pomimo, że odwzorowanie $T \circ \Lambda_{\mathcal{G},\rho}^d$ jest liniowe, warunek splątania (63) jest nieliniowy, jako że dla ustalonego \mathcal{G} odwzorowanie $\Lambda_{\mathcal{G},\rho}^d$ jest dopasowane do stanu na który działa.

D. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych

1. Nierówności typu CHSH

Pojęcie łamania lokalnego realizmu, zostało po raz pierwszy zaproponowane w pracy A. Einsteina, B. Podolskiego i N. Rosen [62]. W swojej ścisłej formie zostało to zagadnienie przedstawione w pracy J. S. Bell [63], gdzie została zaproponowana nierówność (obecnie nazywana nierównością Bella), miała wbudowane w swoją postać korelacje pochodzące od dwóch obserwabli. Bell wykazał, że istnieje ograniczenie dotyczące wszelkich możliwych korelacji uzyskanych z lokalnych modeli zmiennych ukrytych (LHS), które mogą być naruszone przez kwantowe pomiary na stanach splątanych. Później została zaproponowana inna nierówność typu Bella, która okazała się podatna na weryfikację eksperymentalną [64]. (J. F. Clausera, M. A. Horne'a, A. Shimony'ego, R. A. Holta (nierówność CHSH)). Od tego czasu nierówności Bella odegrały fundamentalną rolę w teorii kwantów i znalazły zastosowanie w kwantowej informatyce, w tym w szczególności w kryptografii, przetwarzaniu informacji, generowaniu losowości i wielu innych zastosowaniach (patrz [35]).

W pracy [P2] skupiamy się głównie na badaniu maksymalnego łamania nierówności CHSH [64]. Tsirelson w pracy [66] pokazał, że istnieje ograniczenie $2\sqrt{2}$ dla nierówności CHSH i

udowodnił, że to ograniczenie może być zrealizowane przez obserwable Pauliego. Oprócz powyższego qubitowego przypadku możliwe jest znalezienie dychotomicznych obserwabli w wyższym wymiarze [69], jak również w przypadku zmiennej ciągłej (nieskończony wymiar) [67], gdzie ograniczenie Tsirelsona jest osiągnięte. W pracy [68] autorzy studiowali przypadek łamania CHSH nierówności przez losowe obserwable. W przypadku układu dwóch kubitów jeżeli dwóch obserwatorów współdzieli stan splątany zostało pokazane, że pomiary losowe prowadzą do łamania nierówności z prawdopodobieństwem ≈ 0.283 . Jednak że dla dwóch kubitów prawdopodobieństwo maksymalnego łamania wynosi zero. W pracy [P2] pokazujemy, że prawdopodobieństwo prawie maksymalnego łamania można osiągnąć zwiększając wymiar przestrzeni, w tym celu konstruujemy losowe wysoko wymiarowe obserwable. Pokazujemy, że istnieje również inny typ obserwabli dający ograniczenie Tsirelsona dla nierówności CHSH, tego typu obserwable nazwaliśmy obserwabliami wolnymi. Terminologia ta pochodzi z działu matematyki nazywanego wolną probablistyką. Kluczową własnością dla tych obserwabli jest to, że istnieją one jedynie w nieskończonym wymiarze więc ich weryfikacja eksperymentalna jest niemożliwa. W tej samej pracy [P2] studiujemy również relacje nieoznaczoności typu „fine-grained” dla wolnych i losowych obserwabli zaproponowanych w pracy [7]. Dla pary wolnych (losowych) obserwabli pokazujemy, że stopień ich nieoznaczoności wynosi 0. Z drugiej strony dla ciągu wolnych (losowych) obserwabli A_1, \dots, A_n gdy $n > 4$, relacja nieoznaczoności typu „fine-grained” jest ograniczona z góry przez $\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{n}}$, co jest wynikiem takim samym jaki uzyskamy dla antykomutujących obserwabli.

2. *Pomiary bez zaburzeń stanu*

Koherencję kwantową można wykorzystać do wnioskowania o obecności detektora bez jego aktywacji. W artykule [P4] zwracamy uwagę, że zgodnie z mechaniką kwantową, takie pomiary niezaburzające badanego stanu (interaction-free measurements) nie mogą być doskonałe, tj. w pojedynczej rundzie eksperymentu istnieje dodatnie prawdopodobieństwo aktywacji detektora. Formalizujemy zakres, w jakim takie pomiary są zabronione poprzez ustalenie zależności pomiędzy prawdopodobieństwem aktywacji a prawdopodobieństwem niejednoznacznego pomiaru niezaburzającego stanu mierzonego. Nasz opis pomiarów niezaburzających jest niezależny od teorii i pozwala na wyprowadzenie podobnych relacji w modelach które uogólniają mechanikę kwantową. Wprowadzamy formalizm oparty o kostki

gęstości (density cube), który rozszerza model kwantowy, umożliwiając koherencje między więcej niż dwiema ścieżkami. W tym formalizmie konstruujemy przykłady pomiarów dla których możliwe jest uzyskanie idealnych pomiarów niezaburzających. Takie pomiary prowadzą do paradoksów tj. możemy za pomocą interferencji wykryć obiekt w danej lokalizacji bez prawdziwej detekcji w tej lokalizacji. Dlatego proponujemy, że brak doskonałego pomiaru niezaburzającego jest naturalnym postulatem, który powinien być zawarty w każdej „rozsądnej” teorii fizycznej.

3. Zastosowanie stanów kwantowych w kryptografii

Jednym z głównych celów kwantowej teorii informacji jest uzyskanie klasycznego klucza szyfrującego przy użyciu stanów kwantowych, który zabezpieczałby przed niechcianym podsłuchem naszego przekazu. Zadanie to może być osiągnięte poprzez użycie stanów maksymalnie splątanych lub szerszej klasy stanów tj. stanów prywatnych. W ogólności stan prywatny składa się z dwóch podukładów, pierwszego który nazywamy kluczem (AB) i drugiego który nazywamy tarczą ($A'B'$). Poprzez lokalny pomiar von Neumanna na części klucza możemy otrzymać klucz szyfrujący, przy czym układ tarczy chroni układ klucza przed podsłuchem. Mówiąc precyzyjnie, każdy stan prywatny który posiada co najmniej m bitów klucza jest w postaci:

$$\gamma_{ABA'B'} = \frac{1}{d} \sum_{ij} |ii\rangle \langle jj|_{AB} \otimes U_i \sigma_{A'B'} U_i^*, \quad (65)$$

gdzie $\sigma_{A'B'}$ jest dowolnym stanem na przestrzeni $A'B'$ oraz U_i są transformacjami unitarnymi. Stany prywatne, które posiadają własność taką, że cały klucz szyfrujący jest dostępny poprzez pomiar na części klucza w bazie standardowej tj. taki, że $K_D = \log(d)$, gdzie d jest lokalnym wymiarem przestrzeni Hilberta odpowiadającej A i B , nazywane są stanami nieredukowalnymi. Stany ściśle nieredukowalne to takie stany prywatne dla których bloki diagonalne w reprezentacji macierzowej $\sigma_i = U_i \sigma U_i^*$ w równaniu (65) są separowalne dla $i \in \{0, \dots, d-1\}$. Inne stany prywatne nazywamy stanami redukowalnymi.

W pracy [P1] podajemy konstrukcję stanów kwantowych w wymiarze d , które posiadają co najmniej 1 bit idealnego klucza szyfrującego (stany prywatne). Pokazujemy, że nasza konstrukcja wysyca prawie wszystkie przykłady znane z literatury w przypadku gdy $d = 2$.

Analizujemy własności tej klasy stanów skupiając się głównie na odległości od stanów separowalnych. Pokazujemy, że przy ustalonym wymiarze podukładu klucza d_k , odległość ta rośnie wraz z wymiarem układu tarczy d_s . Natomiast w pracy [P3] pokazujemy nowy protokół destylacji klucza szyfrującego. Podajemy również charakteryzację stanów nieredukowalnych.

4. Symetrie stanów kwantowych- wykrywanie splątania w stanach kwantowych układów wielociałowych

W pracy [P7] analizujemy pojęcie D -symetryczności dla układów złożonych z wielu podukładów. Dla układów składających się z N kubitów pojęcie to pokrywa się ze zwykłą symetrią permutacyjną. W przypadku N kubitów ($d \geq 3$) D -symetria jest silniejsza od symetrii permutacyjnej. Dla wszystkich wektorów D -symetrycznych w przestrzeni $(\mathbb{C}^d)^{\otimes N}$ definiujemy bazę złożoną z wektorów $\{|R_{N,d;k}\rangle : 0 \leq k \leq N(d-1)\}$ tj. analog stanów Dicke. Głównym naszym celem w tej pracy była dyskusja problemu separowalności stanów D -symetrycznych, które są diagonalne w bazie wektorów $\{|R_{N,d;k}\rangle\}$. Pokazujemy, że dla N parzystego i dowolnego $d \geq 2$ własność PPT jest warunkiem koniecznym i wystarczającym separowalności dla stanów diagonalnych D -niezmienniczych. W ten sposób uogólniamy wyniki osiągnięte w pracy [70, 71]. Naszym celem było użycie klasycznych metod matematycznych związanych z problemem momentów [72].

5. Konstrukcja nierozkładalnych świadków splątania oraz splątanych stanów PPT

W pracach [D1, D2, D3, D4] przed uzyskaniem stopnia doktora, w głównej mierze skupiałem się na charakteryzacji stanów PPT splątanych przy użyciu nierozkładalnych świadków splątania.

[H1] A. Rutkowski, P. Horodecki, Physics Letters A. **378**, 2043-2047, (2014)

[H2] A. Rutkowski, G. Sarbicki, D. Chruściński, Open Systems & Information Dynamics, Vol. 22, No. 3, 1550001, 2015

- [H3] M. Mozrzyk, A. Rutkowski, Michał Studziński, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **48**, 395302, (2015)
- [H4] M. Marciniak, A. Rutkowski, Y. Zhin, M. Horodecki, R. Horodecki, Physical Review Letters **115**, 170401, (2015)
- [H5] M. Marciniak, A. Rutkowski, 2017, Linear Algebra and its Applications **529**, 215–257, (2017)
- [H6] A. Rutkowski, A. Buraczewski, P. Horodecki, M. Stobińska, Physical Review Letters **118**, 020402, (2017)
- [H7] M. Markiewicz, A. Kolodziejcki, Z. Puchala, A. Rutkowski, T. Tylec, W. Laskowski, Physical Review A **97**, 042339, (2018)
- [D1] D. Chruściński i A. Rutkowski , Eur. Phys. J. D **62**, 273-277, (2011)
- [D2] D. Chruściński and A. Rutkowski, Phys. Lett. A **375**, 2793-2796, (2011)
- [D3] J. Jurkowski, A. Rutkowski i D. Chruściński , Open Sys. Information Dyn. **17**, 347-359, (2010)
- [D4] D. Chruściński, J. Jurkowski i A. Rutkowski , Open Sys. Information Dyn. **16**, 235-242, (2009)
- [P1] A. Rutkowski, M. Studziński, P. Ćwikliński, M. Horodecki, Phys. Rev. A **91**, 012335, (2015)
- [P2] Z. Yin, W. Harrow, M. Horodecki, M. Marciniak, A. Rutkowski, Phys. Rev. A **95**, 032101, (2017)
- [P3] K. Horodecki, P. Ćwikliński, A. Rutkowski and M. Studziński, New Journal of Physics **20**, 083021, (2018)
- [P4] Z. Zhuo, S. Mondal, M. Markiewicz, A. Rutkowski, B. Dakić, W. Laskowski, T. Paterek , Phys. Rev. A **98**, 022108, (2018)
- [P5] Dariusz Chruscinski, Marcin Marciniak, and Adam Rutkowski, Acta Mathematica Vietnamica Volume: **43** Issue: 4, 661-674, (2018)
- [P6] M. Mozrzyk, A. Rutkowski and M. Studziński , arXiv:1505.06422 , (2015)
- [P7] A. Rutkowski, M. Banacki and M. Marciniak, accepted in Physical Review A, 22.01.2019, arXiv:1810.05522, (2018)
- [19] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani, and S. Wehner Rev. Mod. Phys. **86**, Rev. Mod. Phys. 86, 839, (2014)
- [20] M. Junge, C. Palazuelos, D. Perez-Garcia, I. Villanueva, M. M. Wolf, Comm. Math. Phys **300**, 715-739, (2010)
- [21] M. Junge and C. Palazuelos, Comm. Math. Phys., **306**, 695-746, (2011)
- [22] M. Junge, C. Palazuelos, D. Perez-Garcia, I. Villanueva, M.M. Wolf, Phys. Rev. Lett. **104**,

170405, (2010)

- [23] H. Buhrman, O. Regev, G. Scarpa and R. Wolf, *Theory of Computation* **8**, 27, 623-645, (2012)
- [24] J. Briet, T. Vidick, *Communications in Mathematical Physics*, **321**, 1, 181-207, (2013)
- [25] Z. Yin, M. Marciniak, and M. Horodecki, *J. Phys. A: Math. Theor* **48**, 135303, (2015)
- [26] J. Oppenheim and S. Wehner, *Science* **330**, 1072, (2010)
- [27] A. E. Rastegin, *Quantum Inf Process* **14**, 783, (2015)
- [28] M. F. Pusey, *Phys. Rev. A* **88**, 032313, (2013)
- [29] H. M. Wiseman, S. J. Jones, and A. C. Doherty, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 140402, (2007)
- [30] E. Schrödinger, *Proc. Camb. Phil. Soc* **32**, 446, (1936)
- [31] L. P. Hughston, R. Jozsa and W. K. Wootters, *Phys. Lett. A* **183**, 14-18, (1993)
- [32] W. K. Wootters and B. D. Fields, *Ann. Phys.* **191**, 363 (1989).
- [33] D. J. Saunders, S. J. Jones, H. M. Wiseman and G. J. Pryde, *Nature. Phys* **6**, 845, (2010)
- [34] D. H. Smith. et al, *Nature. Comm* **3**, 625, (2012)
- [35] C. Branciard, E. G. Cavalcanti, S. P. Walborn, V. Scarani, and H. M. Wiseman, *Phys. Rev. A* **85**, 010301(R), (2012)
- [36] P. Jordan and E. Wigner, *Zeitschrift für Physik* **47**, 631, (1928)
- [37] K. Rosolek, M. Stobińska, M. Wieśniak, and M. Żukowski, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 100402, (2015)
- [38] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000
- [39] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki and K. Horodecki, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 865 (2009)
- [40] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, *Phys. Lett. A* **223**, 1 (1996)
- [41] B. Terhal, *Phys. Lett. A* **271**, 319 (2000); *Linear Algebr. Appl.* **323**, 61 (2000)
- [42] M. Lewenstein, B. Kraus, J. I. Cirac, and P. Horodecki, *Phys. Rev. A* **62**, 052310 (2000)
- [43] C. Branciard, D. Rosset, Y-Ch. Liang, and N. Gisin, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 060405 (2013)
- [44] F. Buscemi, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 200401, (2012)
- [45] M.-D. Choi, *Linear Algebra Appl.* **12**, 95, (1975)
- [46] M.-D. Choi and T.-T. Lam, *Math. Ann.* **231**, 1, (1977)
- [47] M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki, *Phys. Rev. A* **59**, 4206, (1999)
- [48] V. Paulsen, *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*, Cambridge: Cambridge University Press (2003)

- [49] R. Bhatia, Positive Definite Matrices, Princeton, NJ: Princeton University Press (2006)
- [50] E. Stormer, Positive Linear Maps of Operator Algebras, Berlin: Springer (2013)
- [51] D. Chruściński and G. Sarbicki, J. Phys. A: Math. Theor. **47**, 483001 (2014)
- [52] M. Miller and R. Olkiewicz, Open Syst. Inf. Dyn. **22**, 1550011, (2015)
- [53] W. Laskowski, M. Markiewicz, T. Paterek, and M. Zukowski, Phys. Rev. A **84**, 062305, (2011)
- [54] W. Laskowski, D. Richart, C. Schwemmer, T. Paterek, and H. Weinfurter, Phys. Rev. Lett. **108**, 240501, (2012)
- [55] M. Markiewicz, W. Laskowski, T. Paterek, and M. Zukowski, Phys. Rev. A **87**, 034301, (2013)
- [56] W. Laskowski, M. Markiewicz, T. Paterek, and R. Weinar, Phys. Rev. A **88**, 022304, (2013)
- [57] W. Laskowski, M. Markiewicz, D. Rosseau, T. Byrnes, K. Kostrzewa, and A. Kołodziejcki, Phys. Rev. A **92**, 022339, (2015)
- [58] P. Badziąg, C. Brukner, W. Laskowski, T. Paterek, and M. Zukowski, Phys. Rev. Lett. **100**, 140403 (2008)
- [59] O. Gühne and N. Lutkenhaus, Journal of Physics: Conference Series **67**, 012004, (2007)
- [60] T. Moroder, O. Gühne, and N. Lutkenhaus, Phys. Rev. A **78**, 032326, (2008)
- [61] J. M. Arrazola, O. Gittsovich, and N. Lutkenhaus, Phys. Rev. A **85**, 062327, (2012)
- [62] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777, (1935)
- [63] J. S. Bell, Physics, **1**, 195, (1964)
- [64] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony and R. A. Holt, Phys. Rev. Lett. **23**, 880, (1969)
- [65] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani, S. Wehner, Rev. Mod. Phys. **86**, 419, (2014)
- [66] B. S. Tsirelson, Lett. Math. Phys. **4**, 93 (1980).
- [67] Z. B. Chen, J. W. Pan, G. Hou, and Y. D. Zhang, Phys. Rev. Lett. **88**, 040406, (2002)
- [68] Y. C. Liang, N. Harrigan, S. D. Bartlett, and T. Rudolph, Phys. Rev. Lett. **104**, 050401, (2010)
- [69] N. Gisin and A. Peres, Phys. Lett. A **162**, 15-17, (1992)
- [70] N. Yu, Phys. Rev. A **94**, 060101(R), (2016)
- [71] E. Wolfe and S. F. Yelin, Phys. Rev. Lett. **112**, 140402, (2014)
- [72] M. G. Krein and A. A. Nudelman, The Markov moment problem and extremal problems (Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1977)

Adam Rutkowski