

Michał Oszmaniec

Autoreferat

Załącznik do wniosku o przeprowadzenie postępowania habilitacyjnego na podstawie jednotematycznego cyklu publikacji pt. „Kwantowa informacja przy ograniczonych zasobach”

Gdańsk 2019

Imię i nazwisko

Michał Oszmaniec

a) Posiadane dyplomy, stopnie naukowe/artystyczne – z podaniem nazwy miejsca i roku ich uzyskania oraz tytuł rozprawy

Stopień doktora nauk fizycznych nadany z wyróżnieniem przez Radę Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego w dniu 19.01.2015 roku

Tytuł rozprawy doktorskiej „Applications of differential geometry and representation theory to description of quantum correlations”

b) Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych/ artystycznych

- Luty 2012 - Marzec 2018: Asystent w Centrum Fizyki Teoretycznej PAN (od lutego 2015 na urlopie bezpłatnym)
- Luty 2015- Maj 2017: Postdoc w grupie kwantowej informacji prof. Antonio Acina w Instytucie Badań Fotonicznych w Barcelonie (ICFO)
- Czerwiec 2017- obecnie: Postdoc na Uniwersytecie Gdańskim finansowany z indywidualnego grantu Homing przyznanego przez Fundację na Rzecz Nauki Polskiej

c) Wskazanie osiągnięcia naukowego

A. Tytuł osiągnięcia naukowego:

Jednotematyczny cykl publikacji pt. „Kwantowa informacja przy ograniczonych zasobach”

B. Autorzy, tytuły publikacji, rok wydania, nazwa wydawnictwa

- I. M. Oszmaniec, R. Augusiak, C. Gogolin, J. Kołodyński, A. Acín, M. Lewenstein, *Random Bosonic States for Robust Quantum Metrology*, Physical Review X 6 (4), 041044 (2016)
- II. S. Altenburg, M. Oszmaniec, S. Wölk, and O. Gühne, *Estimation of gradients in quantum metrology*, Phys. Rev. A 96, 042319 (2017)

- III. M. Oszmaniec, Z. Zimboras, *Universal Extensions of Restricted Classes of Quantum Operations*, Phys. Rev. Lett. 119, 220502 (2017)
- IV. M. Oszmaniec, D. J. Brod, *Classical simulation of photonic linear optics with lost particles*, New J. Phys. 20, 092002 (2018)
- V. M. Oszmaniec, L. Guerini, P. Wittek, A. Acin, *Simulating Positive-Operator-Valued Measures with Projective Measurements*, Phys. Rev. Lett. 119, 190501 (2017)
- VI. M. Oszmaniec and T. Biswas, *Operational relevance of resource theories of quantum measurements*, Quantum 3, 133 (2019)

C. Omówienie celu naukowego/artystycznego ww. pracy/prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania

Osiągnięcie naukowe jest częścią prac zbiorowych. Mój wkład opisany jest w załączniku „Wykaz opublikowanych prac naukowych lub twórczych prac zawodowych oraz informacja o osiągnięciach dydaktycznych, współpracy naukowej i popularyzacji nauki”. Wkład współautorów jest przedstawiony na załączonych oświadczeniach.

W dalszej części będę stosował następujące konwencje odnośnie cytowanych przeze mnie prac:

- referencje oznaczone cyframi rzymskimi, np. [I], odnoszą się do prac stanowiących cykl publikacji, na którym opiera się niniejszy wniosek habilitacyjny,
- referencje oznaczone małymi literami alfabetu, np. [a], wskazują na prace wnioskodawcy nie wchodzące w skład jednotematycznego cyklu publikacji i opublikowane po uzyskaniu doktoratu. Lista tych publikacji została wymieniona w części D autoreferatu (sprawdzić czy numeracja się nie zmieni),
- pozostałe referencje oznaczone liczbami arabskimi, np. [1], odnoszą się do artykułów i innych pozycji, które zostały użyte, aby przedstawić odpowiedni kontekst badań prezentowanych w autoreferacie. Ponadto, takich samych oznaczeń referencji użyłem do oznaczenia prac, które opublikowałem przed uzyskaniem stopnia naukowego doktora (są one opisane w części E).

Struktura głównej części autoreferatu:

Sekcja C. 1 zawiera motywację badań składających się na osiągnięcie naukowe. W Sekcji C. 2 nakreśliłem główne cele badawcze oraz wymieniłem najważniejsze wyniki badań. W kolejnych częściach przedstawiłem bardziej szczegółowo wyniki prac [I-VI]. Prace zostały podzielone względem poddziedzin kwantowej informacji, których dotyczyły, a zatem: kwantowej metrologii (Sekcja C. 3), kwantowych obliczeń (Sekcja C. 4) oraz kwantowych pomiarów (Sekcja C. 5). Na zakończenie, w Sekcji C. 6 przedstawiłem moje przyszłe plany badawcze, będące naturalną kontynuacją i rozszerzeniem prezentowanych tu osiągnięć.

C. 1 Motywacja: rozwój technologii kwantowych

Kwantowa teoria informacji jest aktywnie rozwijającą się dziedziną na pograniczu fizyki, matematyki, informatyki i inżynierii. Bada ona użyteczność mechaniki kwantowej w procesach uzyskiwania, przetwarzania i przesyłania informacji. Podstawowym motorem rozwoju tej dziedziny jest fakt, że istnieje wiele sytuacji, w których metody oferowane przez mechanikę kwantową są znacznie lepsze niż jakiekolwiek strategie klasyczne lub wręcz pozwalają zrealizować zadania, które byłyby niemożliwe do zrealizowania na gruncie teorii klasycznej. Przykładami są kwantowa komunikacja [1] (umożliwiająca bezpieczny transfer informacji gwarantowany przez prawa fizyki kwantowej), kwantowa metrologia [2] (pozwalająca na niezwykle precyzyjne pomiary pewnych wielkości fizycznych), czy wreszcie algorytmy kwantowe [3, 4] (takie jak algorytm Shora pozwalający na efektywną faktoryzację liczb na czynniki pierwsze).

Do niedawna kwantowa informacja była dziedziną będącą stosunkowo daleko od praktycznych zastosowań¹. Była ona rozwijana głównie przez fizyków teoretycznych, matematyków oraz fizyków doświadczalnych. Ci ostatni przeprowadzali pionierskie doświadczenia demonstrujące możliwości manipulacji coraz to bardziej złożonymi układami kwantowymi [5]. W ostatnich latach, głównie dzięki olbrzymiemu postępowi technologicznemu, kwantowa informacja zaczyna zyskiwać znaczenie praktyczne. Oto kilka przykładów ilustrujących tę tezę:

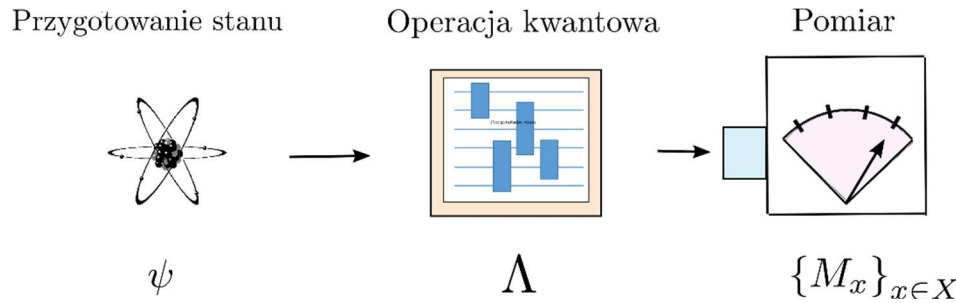
- Rozwój kwantowych sieci komunikacyjnych, zarówno naziemnych, jak i satelitarnych [6];
- Zastosowanie stanów kwantowych do precyzyjnych pomiarów niezbędnych do wykrywania fal grawitacyjnych [2, 7];
- Powstawanie coraz bardziej złożonych prototypów komputerów kwantowych. Są one równolegle rozwijane przez największych gigantów technologicznych (Google, IBM, Intel czy Alibaba) oraz ambitne startupy (D-Wave Systems, IonQ, Rigetti). W tym samym czasie opracowywane są algorytmy kwantowe, które będzie można implementować na komputerach w bliskiej przyszłości, które nie będą używały kwantowej korekcji błędów [8, 9].

Ze względu na ich potencjalnie kolosalne znaczenie oraz konieczność zapewnienia ogromnych nakładów finansowych, mnożą się inicjatywy mające na celu skoordynowanie badań nad rozwojem technologii kwantowych. Warto tutaj wymienić wielomiliardowe programy takie jak europejski *Quantum Flagship*, chiński program rozwoju kwantowych technologii, czy wreszcie program *National Quantum Initiative* w Stanach Zjednoczonych, mający na celu rozwój technologii komputerów kwantowych.

Co istotne, pomimo ogromnego postępu w dziedzinie kwantowej informacji, głównym wyzwaniem na drodze do jej praktycznego zastosowania są *ograniczone zasoby*, które można obecnie wykorzystywać w celu przetwarzania informacji zakodowanej w stanach kwantowych.

¹ Chlubnym wyjątkiem jest tutaj kryptografia kwantowa, która weszła w fazę komercjalizacji ponad 15 lat temu (przykładami są firmy takie jak Migiq Technologies oraz ID Quantique).

Przez ograniczone zasoby rozumiem tutaj ograniczenia (głównie natury praktycznej i eksperymentalnej) na i) możliwe przygotowania stanów kwantowych, ii) możliwości manipulowania nimi, oraz iii) na pomiary kwantowe, które można zaimplementować w danym układzie (patrz *Rysunek 1*).



Rysunek 1. Typowy protokół kwantowy składa się z trzech części: i) przygotowania stanu kwantowego, ii) przeprowadzenia operacji kwantowej (w praktyce, sekwencji prostszych kanałów kwantowych, np. transformacji unitarnych) oraz iii) dokonania pomiaru kwantowego.

Niezwykle istotnymi czynnikami, które ograniczają dostępne zasoby kwantowe są szum oraz dekoherencja [10]. Wynikają one z oddziaływania układów kwantowych z otoczeniem i efektywnie niszczą w nich „kwantowość”. **Głównym celem prac składających się na osiągnięcie naukowe było zbadanie jak różnego typu ograniczenia na kwantowe zasoby wpływają na możliwość wykonywania kwantowo-informatycznych zadań oraz tego, jakimi sposobami można rozszerzyć ograniczone zasoby w taki sposób, aby możliwe było wykonywanie wszelkich procedur dopuszczalnych przez mechanikę kwantową.**

C.2 Główne cele badawcze i streszczenie najważniejszych wyników

Głównym celem badawczym było znalezienie odpowiedzi na następujące pytania, które motywowane są obecnym poziomem rozwoju informacji kwantowej oraz technologii kwantowych.

- i. W jaki sposób dekoherencja, szum oraz inne niedoskonałości obecne w realistycznych układach kwantowych wpływają na efektywność protokołów kwantowych?
- ii. Jak rozszerzyć ograniczone zasoby w taki sposób, aby można było wykorzystać pełne możliwości oferowane przez mechanikę kwantową?
- iii. Czy ograniczone zasoby kwantowe można wykorzystać do efektywnego wykonywania pewnych zadań w kwantowej teorii informacji?

W ramach prac wchodzących w skład osiągnięcia naukowego zbadano w kontekście tych pytań problemy należące do trzech dziedzin kwantowej informacji:

- kwantowej metrologii – prace [I] oraz [II],
- obliczeń kwantowych (ang. *quantum computing*) – prace [III] oraz [IV],
- teorii kwantowego pomiaru – prace [V-VI].

Poniżej podsumowano krótko najważniejsze wyniki i nakreślono związki między poszczególnymi pracami. W dalszych częściach autoreferatu (sekcje C 3, C 4 oraz C 5) przedstawiono te wyniki bardziej szczegółowo, podając kontekst i pojęcia niezbędne do ich pełnego zrozumienia.

Wpływ dekoherencji i niedoskonałości na protokoły kwantowe

- Oszacowano rolę strat fotonów oraz szumu depolaryzującego na użyteczność metrologiczną typowych stanów bozonowych w granicy liczby cząstek dążącej do nieskończoności [I].
- Oszacowano rolę szumu defazującego na dokładność estymacji gradientu pola magnetycznego w układzie przestrzennie rozmieszczonych cząstek oddziałujących z tym polem magnetycznym [II].
- Pokazano, że przy odpowiednio dużych stratach optycznych kwantowe eksperymenty typu boson sampling [11] można efektywnie zasymulować na klasycznym komputerze [IV].
- Określono, przy jakim poziomie szumu depolaryzującego pomiary uogólnione [12] stają się symulowalne przez pomiary rzutowe [V].

Rozszerzenia do uniwersalności

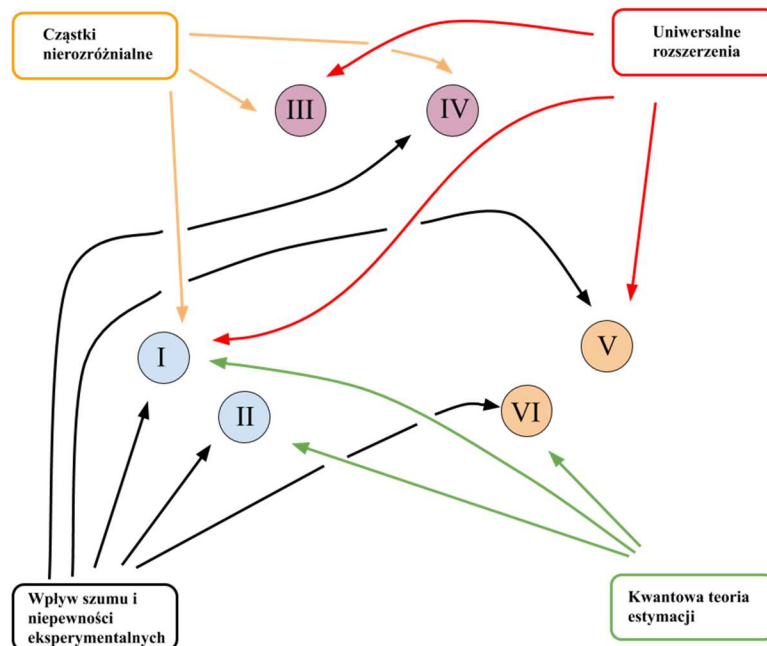
- Uzyskano systematyczne rozwiązanie problemu rozszerzenia do uniwersalności bozonowej i fermionowej optyki liniowej, dla dowolnej ilości modów i cząstek [III].
- W szczególności wykazano, że oddziaływanie typu cross-Kerr w układzie N bozonów w dwóch modach pozwala rozszerzyć pasywną bozonową optykę liniową do uniwersalności. Był to wynik, który był potrzebny dla pewnych rozważań w pracy [I], gdzie pojawiła się potrzeba generowania stanów pseudolosowych za pomocą losowej sekwencji uniwersalnych bramek na przestrzeni bozonowej [I].
- Wykazano, że dowolny pomiar uogólniony na d-wymiarowym układzie kwantowym można zrealizować za pomocą kombinacji wypukłej i odpowiedniego klasycznego post-processingu pomiarów rzutowych na wyjściowym układzie kwantowym powiększonym o d-wymiarową ancillę [V]. Wynik ten stanowi uogólnienie klasycznego twierdzenia Naimarka dla pomiarów kwantowych [12].

Efektywność protokołów kwantowych przy ograniczonych zasobach

- Pokazano, że typowe stany czyste z podprzestrzeni bozonowej (symetrycznej) wykazują tak zwane skalowanie Heisenberga dla standardowego schematu interferometrycznego [2]. Oznacza to, że stany użyteczne w metrologii nie muszą być przygotowywane w specjalny sposób (mogą być generowane na przykład w sposób pseudolosowy) i. w pewnym sensie, prawie każdy stan bozonowy będzie użyteczny dla metrologii [I].

- Pokazano, że łatwo dostępny ustalony pomiar kwantowy (pomiar spinu w kierunku y) w standardowym schemacie interferometrycznym (w którym faza „nakręca się” w kierunku z) wykorzystującym typowe stany symetryczne pozwala osiągnąć skalowanie Heisenberga [I]. W ogólności pomiar kwantowy powinien być dostosowany do konkretnego stanu używanego w danym schemacie interferometrycznym.
- Pokazano, że stosunkowo łatwo dostępny ustalony pomiar kwantowy (pomiar spinu w kierunku y) wystarcza, aby w optymalny sposób wyznaczać wartość gradientu pola magnetycznego w kierunku z , zarówno w przypadku idealnym, jak i w sytuacji kiedy układ cząstek podlega bardzo silnemu, skorelowanemu szumowi defazującemu w kierunku z [II].
- Określono maksymalną przewagę, jaką pomiary uogólnione mogą mieć nad ograniczonymi klasami pomiarów: pomiarami separowalnymi oraz pomiarami diagonalnymi w pewnej ustalonej bazie obliczeniowej, w zadaniu rozróżniania stanów kwantowych [13]. Ponadto, dla każdego pomiaru kwantowego powiązano maksymalną przewagę w rozróżnianiu stanów kwantowych (względem ograniczonej wypukłej klasy pomiarów) z odpornością na szum względem symulacji przez kombinacje wypukłe ograniczonych pomiarów kwantowych [VI].

Otrzymane wyniki w dużym stopniu rozwiązują, dla konkretnych sytuacji fizycznych, problemy postawione w pytaniach i-iii) powyżej. Artykuły wchodzące w skład osiągnięcia naukowego są ze sobą powiązane, zarówno pod względem tematycznym, jak również pod względem technik matematycznych użytych do rozwiązania konkretnych problemów. Wybrane związki między różnymi pracami przedstawia Rysunek 2.

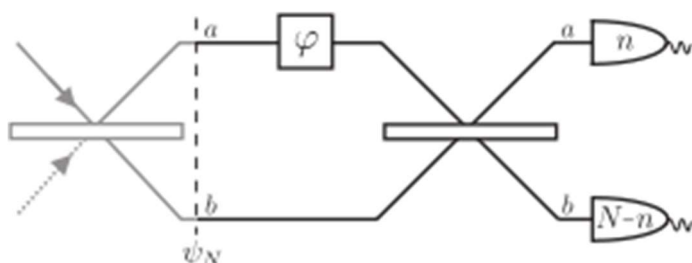


Rysunek 2 Wybrane powiązania tematyczne między pracami wchodzącymi w skład osiągnięcia naukowego.

C. 3 Kwantowa metrologia

Zanim przejdę do szczegółowego omawiania prac [I] oraz [II], przedstawię skrótowo podstawowe pojęcia i koncepcje dotyczące kwantowej metrologii.

Kwantowa metrologia [1] zajmuje się wykorzystaniem własności wielocząstkowych stanów kwantowych, aby możliwie najprecyzyjniej wyznaczyć wartości mierzonego eksperymentalnie parametru, który opisuje ich ewolucję. Przykładami mogą być tutaj czas ewolucji, jak również przesunięcie fazowe w interferometrze Macha–Zehndera (jego uproszczony schemat przedstawia Rysunek 3). Okazuje się, że wykorzystując nieklasyczne efekty takie jak splątanie kwantowe czy ściskanie światła, można uzyskać precyzję znacznie wyższą niż przy wykorzystaniu „klasycznych strategii”.



Rysunek 3. Uproszczony schemat interferometru Macha–Zehndera – paradygmatycznego układu dla kwantowej metrologii. N fotonowy stan światła ψ_N , w miarę jak propaguje się przez dwumodowy układ optyczny, akumuluje fazę φ , przechodzi przez płytkę światłodzielącą i jest mierzony za pomocą detektorów liczby cząstek w obu ramionach interferometru. Pomiaru statystyk liczby fotonów na wyjściu interferometru pozwalają na precyzyjne wyznaczenie fazy φ .

Ogólny schemat kwantowej metrologii składa się z czterech etapów

- i. Przygotowanie układu w stanie początkowym ρ .
- ii. Zastosowanie do stanu ρ transformacji opisanej jednoparametrową rodziną kanałów kwantowych Λ_φ , gdzie φ jest nieznanym parametrem (na przykład wartością pola magnetycznego albo przesunięciem fazowym w interferometrze). W wyniku tej transformacji otrzymuje się stan $\rho_\varphi = \Lambda_\varphi(\rho)$.
- iii. Wykonanie pomiaru uogólnionego $\mathbf{M} = \{M_x\}_{x \in X}$, który daje statystyki zadane zgodnie z regułą Borna przez

$$p(x|\varphi) = \text{tr}(\rho_\varphi M_x) . \quad (1)$$

- iv. Zastosowanie estymatora $\hat{\varphi}: X \rightarrow \mathbb{R}$, którego zadaniem jest możliwie jak najprecyzyjniejsze wyznaczenie nieznanego parametru φ .

Standardowym parametrem określającym użyteczność danej strategii w schemacie metrologicznym jest wariancja estymatora $\hat{\varphi}$, $Var(\hat{\varphi}) = \sum_{x \in X} p(x|\varphi)(\hat{\varphi}(x) - \varphi)^2$ (założyłem tutaj, że estymator jest nieobciążony tj. $\sum_{x \in X} p(x|\varphi)\hat{\varphi}(x) = \varphi$ jest wartością oczekiwaną $\hat{\varphi}$). Klasycznym wynikiem z teorii estymacji jest nierówność Cramera-Rao, która daje ciasne ograniczenie dolne na $Var(\hat{\varphi})$,

$$Var(\hat{\varphi}) \geq \frac{1}{F_{cl}(\{p(x|\varphi)\})} \quad , \quad (2)$$

gdzie $F_{cl}(\{p(x|\varphi)\})$ jest tak zwaną klasyczną informacją Fishera² związaną z rodziną rozkładów prawdopodobieństwa $\{p(x|\varphi)\}$. Informacja Fishera wyznacza więc nieprzekraczalną granicę na dokładność, z jaką można wyznaczyć nieznaną wartość parametru φ . Kwantową informację Fishera, oznaczaną symbolem F_Q , definiuje się jako klasyczną informację Fishera zoptymalizowaną po dopuszczalnych pomiarach kwantowych.

Przewaga mechaniki kwantowej nad strategiami klasycznymi ujawnia się, kiedy rozważamy eksperyment, w którym parametr φ wkodowywany jest niezależnie w N układów fizycznych, tj. w sytuacji, kiedy mamy N-cząstkowy stan ρ_N , na który działa kanał $\Lambda_\varphi^{(N)} = (\Lambda_\varphi)^{\otimes N}$. W przypadku klasycznych strategii (którym w schemacie kwantowym odpowiadają stany separowalne ρ_N) informacja Fishera skaluje się proporcjonalnie do liczby powtórzeń (cząstek) N. Takie skalowanie określane jest w literaturze jako szum śrutowy, albo **standard quantum limit (SQL)**. Natomiast w przypadku, kiedy parametr φ jest wkodowany za pomocą transformacji unitarnej,

$$\Lambda_\varphi(\rho) = \exp(-ih\varphi)\rho \exp(ih\varphi) \quad , \quad (3)$$

dla pewnego jednocząstkowego Hamiltonianu³ h , dla pewnych splątanych stanów N-cząstkowych ρ_N , kwantowa informacja Fishera skaluje się jak N^2 . W tym wypadku mówimy o **skalowaniu Heisenberga**. Ze względu na potencjalną przewagę, jaką stany splątane oferują w precyzyjnej estymacji fizycznych parametrów, oczekuje się, że metody kwantowej metrologii

² Konkretna postać klasycznej informacji Fishera oraz dokładne założenia, przy których nierówność Cramera-Rao jest spełniona nie są tutaj istotne. Warto jednak wspomnieć, że ściśle rzecz biorąc nierówność ma gwarancję być wysycana tylko w granicy nieskończonej liczby powtórzeń eksperymentów – patrz na przykład artykuł przeglądowy [5].

³ Typowym przykładem spotykanym w aplikacjach jest $h = (1/2)\sigma_z$. Dla tego Hamiltonianu optymalnym stanem

jest stan GHZ (zwany również stanem NOON), reprezentowany przez wektor $|GHZ_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle^{\otimes N} + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle^{\otimes N}$.

Osiąga on wartość kwantowej informacji Fishera równą N^2 .

znajdą praktyczne zastosowania (już obecnie znajdują zastosowanie w zegarach atomowych [2], magnetometrii [3], czy detekcji fal grawitacyjnych [4]).

C. 3.1 Użyteczność losowych stanów kwantowych w metrologii (praca [I])

Cel i motywacja

Praca *Random bosonic states for robust quantum metrology* skupiała się na standardowym scenariuszu metrologicznym, który został przedstawiony powyżej w równaniu (3). Jej celem było zbadanie, czy typowe stany kwantowe mogą być użyteczne w kwantowej metrologii (to znaczy oferują skalowanie wykraczające poza SQL). Przymiotnik „typowe” odnosi się tutaj do stanów kwantowych, które losujemy z pewnego zespołu statystycznego określonego na zbiorze stanów na N -cząstkowej przestrzeni Hilberta. Odpowiedź na to pytanie jest istotna, ponieważ pozwala określić jak bardzo szczególne stany trzeba przygotować, aby otrzymać kwantową przewagę w metrologii. Do tej pory badania w tej dziedzinie sprowadzały się głównie do identyfikacji konkretnych stanów, które oferują przewagę w metrologii (takich jak stany typu GHZ czy stany ściśnięte [1, 5]), bez jakościowego zrozumienia jak wiele stanów może oferować przewagę nad klasycznymi strategiami.

Konkretnymi przykładami zespołów statystycznych rozważanych w pracy były:

- **jednorodny rozkład na zbiorze stanów czystych** na ustalonej skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta

$$\mathcal{D}_1(\mathcal{H}) = \{ |\psi\rangle\langle\psi| \mid |\psi\rangle \in \mathcal{H}, \|\psi\rangle\| = 1 \} . \quad (4)$$

- **jednorodny rozkład na zbiorze stanów izospektralnych macierzy gęstości**, tj. stanów o ustalonym widmie (na ustalonej skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta)

$$\Omega_{(p_1, \dots, p_D)} = \{ \rho \mid \rho \in \text{Herm}(\mathcal{H}), \rho \geq 0, \text{tr}(\rho) = 1, \text{spec}(\rho) = (p_1, \dots, p_D) \} , \quad (5)$$

gdzie D oznacza wymiar przestrzeni Hilberta \mathcal{H} , natomiast, liczby (p_1, \dots, p_D) oznaczają uporządkowane malejąco widmo operatorów składających się na $\Omega_{(p_1, \dots, p_D)}$. W zależności od rozkładu widma (p_1, \dots, p_D) stany izospektralne są albo stanami czystymi (gdy $p_1 = 1$), albo stanami bardzo mocno zmieszanyymi. **Odpowiedni dobór widma określa więc stopień zaszumienia stanów kwantowych w danym zespole statystycznym.**

Na zbiory $\mathcal{D}_1(\mathcal{H})$ i $\Omega_{(p_1, \dots, p_D)}$ działa w sposób naturalny (poprzez sprzężenie⁴) grupa specjalna unitarna⁵ $SU(\mathcal{H})$. Działanie to jest tranzytywne i z tego powodu na zbiorach tych można zdefiniować miarę probabilistyczną (będziemy ją oznaczać przez $\mu_{\mathcal{X}}$, gdzie \mathcal{X} oznacza odpowiedni zbiór), która jest niezmiennicza względem działania $SU(\mathcal{H})$. To właśnie taką miarę rozumiemy jako „miarę jednorodną” na $\mathcal{D}_1(\mathcal{H})$ i odpowiednio na $\Omega_{(p_1, \dots, p_D)}$.

W pracy rozważane były dwie rodziny przestrzeni Hilberta. Po pierwsze, przestrzeń N rozróżnialnych cząstek, z których każda może znajdować się w m rozróżnialnych stanach (w tym przypadku $\mathcal{H} = \mathcal{H}_N \approx (\mathbb{C}^m)^{\otimes N}$). Po drugie, przestrzeń N bozonów w m modach. W tym przypadku odpowiednią przestrzeń Hilberta można traktować jako podprzestrzeń całkowicie symetryczną przestrzeni N rozróżnialnych stanów, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{bos} \approx \text{Sym}^N(\mathbb{C}^m)$.

Główna idea pracy: zastosowanie koncentracji miary w metrologii kwantowej

Główne wyniki uzyskane w pracy mają następującą **ogólną strukturę**:

$$\mu_{\mathcal{X}}(\{\rho \in \mathcal{X} \mid \rho \text{ – mają pewne cechy dla metrologii}\}) \geq 1 - \delta, \quad (6)$$

gdzie „pewne własności metrologiczne” odnoszą się do pozytywnych (jak na przykład skalowanie Heisenberga precyzji estymowanego parametru) lub negatywnych (skalowanie precyzji wolniej niż w SQL) własności stanów kwantowych ze zbioru \mathcal{X} , natomiast δ jest pewną małą liczbą dążącą do zera wraz ze wzrostem wymiaru przestrzeni Hilberta (która sama jest monotoniczną funkcją liczby cząstek N). **Innymi słowy, równanie (6) mówi nam, że losowe stany wybrane z zespołu statystycznego opisanego miarą probabilistyczną $\mu_{\mathcal{X}}$ będą miały z olbrzymim prawdopodobieństwem określone własności dla kwantowej metrologii.**

Wyniki postaci (6) (szczegółowo wymienione poniżej) zostały otrzymane za pomocą metody *koncentracji miary* [6, 7]. Koncentracja miary jest bardzo użyteczną metodą, która znalazła wiele zastosowań w klasycznej i kwantowej teorii informacji [8], jednak dotychczas nie była wykorzystywana w kwantowej metrologii. **W największym uproszczeniu, teoria koncentracji miary mówi nam, że odpowiednio regularne funkcje na wysokowymiarowych przestrzeniach będą miały wartości typowo (z dużym prawdopodobieństwem) zbliżone do swoich wartości średnich.** W omawianej pracy wykorzystano nierówność opisującą koncentrację miary na funkcjach L - Lipschicowskich na specjalnej grupie unitarnej $SU(\mathcal{H})$ [7],

⁴ Przez sprzężenie przez transformację unitarną U rozumiem tu przekształcenie $\rho \mapsto U\rho U^\dagger$.

⁵ Grupa $SU(\mathcal{H})$ składa się z macierzy unitarnych na \mathcal{H} o wyznaczniku 1.

$$\mu_{\text{Haar}} \left(\left\{ U \in \text{SU}(\mathcal{H}) \mid |f(U) - \mathbb{E}_{\mu_{\text{Haar}}} f| \leq \varepsilon \right\} \right) \geq 1 - 2 \exp \left(\frac{-\varepsilon^2}{4L^2 D} \right), \quad (7)$$

gdzie D jest wymiarem \mathcal{H} , $\mathbb{E}_{\mu_{\text{Haar}}} f$ oznacza wartość oczekiwaną funkcji $f: \text{SU}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}$ względem miary Haara, a L jest stałą Lipschitza (liczoną względem odległości geodezyjnej na $\text{SU}(\mathcal{H})$).

Metrologiczna użyteczność stanów kwantowych należących do zespołów statystycznych opisanych powyżej może być opisana za pomocą wartości odpowiedniej funkcji (klasycznej bądź kwantowej informacji Fishera policzonej na interesującym stanie kwantowym). W praktyce, z tymi funkcjami stanów można związać odpowiednie funkcje zdefiniowane na $\text{SU}(\mathcal{H})$, dla odpowiedniej przestrzeni Hilberta (przypomnijmy, że dla cząstek rozróżnialnych mamy $\mathcal{H} = \mathcal{H}_N \approx (\mathbb{C}^m)^{\otimes N}$, podczas gdy dla bozonów $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{bos}} \approx \text{Sym}^N(\mathbb{C}^m)$). Na przykład z kwantową informacją Fishera $F_Q(\rho)$, można związać następującą funkcję na $\text{SU}(\mathcal{H})$,

$$\tilde{F}(U) = F_Q(U \rho_0 U^\dagger), \quad (8)$$

która zależy od „początkowego” stanu ρ_0 , który będzie wyznaczał odpowiedni zbiór izospektralnych macierzy gęstości. **Podsumowując, udowodnienie wyników postaci (6) sprowadzało się do zastosowania nierówności (7) dla odpowiednio zdefiniowanych funkcji na $\text{SU}(\mathcal{H})$. Od strony technicznej wymagało to:**

- Wyznaczenia bądź ograniczenia wartości średnich $\mathbb{E}_{\mu_{\text{Haar}}} f$ tych funkcji,
- Wyznaczenia bądź oszacowania ich stałych Lipschitza.

Najważniejsze wyniki

Poniżej wymienię główne wyniki pracy [I]. Tak jak zostało powiedziane wcześniej, prezentowane wyniki dotyczą standardowego schematu metrologicznego, w którym nieznaną fazę φ jest nadrukowywana na N-cząstkowy stan kwantowy za pomocą nieoddziałującego Hamiltonianu

$$H_N = h \otimes I \otimes \dots \otimes I + \dots + I \otimes \dots \otimes I \otimes h. \quad (9)$$

Rezultaty zdecydowałem się przedstawić w sposób jakościowy, skupiając się na ich znaczeniu fizycznym. Czytelnika zainteresowanego ich ilościowym sformułowaniem (mają one zawsze postać zbliżoną do równania (6)) odsyłam do konkretnych twierdzeń w oryginalnym artykule.

1. **Wykazanie, że wraz ze wzrostem liczby cząstek N , typowe stany (zarówno czyste, jak i mieszane) z przestrzeni cząstek rozróżnialnych ($\mathcal{H} = \mathcal{H}_N \approx (\mathbb{C}^m)^{\otimes N}$) nie są użyteczne dla metrologii.** Dzieje się tak nawet wówczas, gdy pozwoli się na optymalizację po lokalnych

unitarnych transformacjach, które zaaplikowane są na etapie przygotowania stanu (przed zaaplikowaniem kanału $\Lambda_\varphi^{(N)}$). Od strony technicznej wynik ten otrzymany jest poprzez pokazanie, że typowe stany N-cząstkowe są zbyt splątane, aby kwantowa informacja Fishera skalowała się szybciej niż proporcjonalnie do N . Dokładniej, ich dwucząstkowe zredukowane macierze gęstości są bliskie stanom maksymalnie zmieszonym. Precyzyjne sformułowanie tego wyniku jest treścią Twierdzenia 1 z pracy [I]. Co ciekawe, we wcześniejszej pracy [9] wykazano, że typowe stany wielocząstkowe są „zbyt splątane” aby być użyteczne w schemacie obliczeń kwantowych znanym jako *measurement-based quantum computing*.

2. **Wykazanie, że dla typowych stanów czystych N bozonów ($\mathcal{H} = \mathcal{H}_{bos} \approx \text{Sym}^N(\mathbb{C}^m)$), kwantowa informacja Fishera związana z Hamiltonianem (9) wykazuje skalowanie Heisenberga** (skaluje się proporcjonalnie do N^2 , dla ustalonego wymiaru lokalnego m). Ponadto okazuje się, że tego rodzaju kwantowa przewaga zachodzi również dla typowych stanów mieszanych ze zbioru izospektralnych macierzy gęstości tak długo, jak ich czystość $P(\rho) = \sum_{i=1}^D p_i^2$ jest odpowiednio duża (innymi słowy, jeśli stany mieszane są odpowiednio odległe, np. względem metryki Hilberta-Schmidta, od stanu maksymalnie zmieszanego). Wynik ten można rozpatrywać jako pewnego rodzaju odporność na szum przewagi metrologicznej, jaką oferują typowe mieszane stany bozonowe. Formalne sformułowanie tego wyniku można znaleźć w Twierdzeniu 2 pracy [I].
3. **Wykazanie, że skalowanie Heisenberga dla typowych czystych stanów bozonowych zachodzi również, jeśli tracą one⁶ stałą (niezależną od N) liczbę cząstek.** Co więcej, wynik ten zachodzi również dla typowych bozonowych stanów mieszanych o ustalonym widmie, jeśli tylko są one wystarczająco odległe od stanu maksymalnie zmieszanego (podobnie jak w przypadku wyniku 2 powyżej). Rezultat ten pokazuje, że typowe stany bozonowe są dużo bardziej odporne na straty cząstek, niż stan GHZ. Stan ten, pomimo, że wśród stanów na przestrzeni N-cząstkowej posiada największą wartość informacji Fishera, traci swoją użyteczność już przy stracie jednej cząstki (staje się separowalny). Warto nadmienić, że ilościowe sformułowanie tego wyniku (podane w Twierdzeniu 3 z pracy [I]), jest w zgodzie z wcześniejszymi wynikami, które stwierdzają, że przy stałym prawdopodobieństwie strat na pojedynczą cząstkę, skalowanie Heisenberga jest niemożliwe do uzyskania (patrz na przykład praca [10]).
4. **Pokazanie, że w przypadku dwóch modów optycznych ($m = 2$), aby uzyskać skalowanie Heisenberga dla typowych czystych stanów bozonowych wystarczy przeprowadzić pomiar w bazie własnej ustalonej obserwabli (niezależnej od stanu kwantowego, którego chcemy użyć w protokole metrologicznym).** Ponadto obserwabla, o której mowa jest stosunkowo łatwa do eksperymentalnej realizacji. Konkretnie, przy wkodowywaniu fazy za pomocą Hamiltonianu $(1/2)J_z$ (kolektywny moment pędu w kierunku z) można ją wybrać jako J_x [nie wyświetla mi tego równania] lub J_y (składowe kolektywnego momentu pędu na kierunkach x lub y). Jak było wspomniane wcześniej, w ogólności, aby otrzymać kwantowe polepszenie w estymacji fazy, należy dostosować pomiar kwantowy do stanu, którego się używa [5]. Nasz wynik pokazuje, że dla typowych stanów bozonowych takie dostosowanie

⁶ Przez stratę k cząstek rozumiem tutaj działanie kanału kwantowego $\rho \mapsto \text{tr}_{N-k}(\rho)$.

nie jest konieczne. Techniczne sformułowanie tego rezultatu jest podane w Twierdzeniu 4 w pracy [I]. Od strony koncepcyjnej jego dowód różni się od twierdzeń podanych poprzednio tym, że analizowana jest klasyczna informacja Fishera związana z danym czystym stanem bozonowym i ustalonym pomiarem (rzutowym, w bazie własnej J_x lub J_y).

5. **Zademonstrowano, że stany pseudolosowe generowane za pomocą zestawu bramek uniwersalnych dla liniowej optyki oraz oddziaływania typu cross-Kerr mają cechy analogiczne do stanów wylosowanych z jednorodnej miary dla stanów czystych.** W praktyce trudno jest wylosować stany dokładnie z miary Haara na danej przestrzeni Hilberta. Okazuje się jednak, że można przybliżać własności miary Haara za pomocą tak zwanych⁷ „przybliżonych t-designów”. Wiadomo, że przybliżone t-designy można generować efektywnie w układzie cząstek rozróżnialnych za pomocą pseudolosowych sekwencji bramek płączących i lokalnych unitarnych [11]. Do tej pory nie była znana analogiczna konstrukcja dla układów bozonowych. W naszej pracy zademonstrowaliśmy, że analogiczna konstrukcja ma szansę powodzenia. Konkretniej, sprawdziliśmy numerycznie (patrz sekcja VII pracy [I]), że zaaplikowanie losowych sekwencji bramek z zestawu bramek uniwersalnych dla bozonowej optyki liniowej oraz bramki⁸ $\exp(i\frac{n_1 n_2 \pi}{3})$, pozwala generować bozonowe stany czyste, których własności (na przykład metrologiczna użyteczność) są podobne do stanów generowanych za pomocą miary Haara. **Aby dojść do tego wyniku musieliśmy jednak najpierw scharakteryzować bramki, które pozwalają rozszerzyć bozonową optykę liniową do uniwersalności. Pytanie to dało początek odrębnemu projektowi badawczemu, który zakończył się publikacją [III].**

Podsumowując, w pracy [I] uzyskaliśmy kompleksowe wyniki dotyczące użyteczności losowych stanów kwantowych w metrologii. Prezentowane tu wyniki przyczyniają się do zrozumienia roli splątania kwantowego dla metrologii oraz otwierają możliwości dalszych badań – na przykład dotyczących uniwersalnych rozszerzeń bozonowej optyki liniowej oraz zbieżności konstrukcji pseudolosowych bramek do „przybliżonych t-designów” na przestrzeni bozonowej (patrz punkt 5 powyżej).

⁷ „Przybliżone t-designy” to zespoły statystyczne macierzy unitarnych, których momenty mają w przybliżeniu taką samą wielkość jak momenty dla miary Haara na grupie unitarnej – patrz sekcja VIII pracy [I] oraz referencje w niej podane.

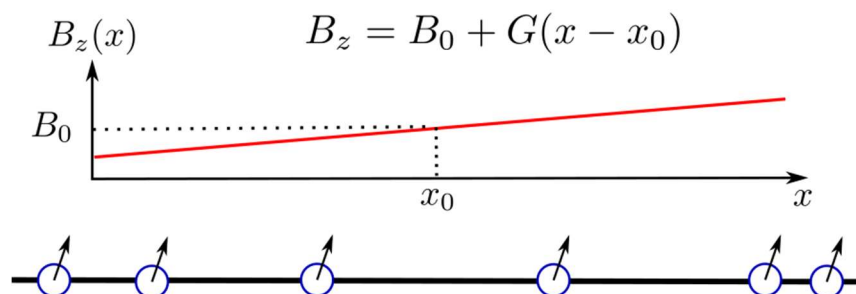
⁸ Symbole $n_{1,2}$ oznaczają operatory liczby cząstek odpowiednio w modach 1 i 2.

C. 3.2 Optymalne wyznaczanie gradientu pola magnetycznego w obecności szumu defazującego (praca [II])

Cel i motywacja

Artykuł *Estimation of gradients in quantum metrology* dotyczył precyzyjnego wyznaczania gradientu pola magnetycznego poprzez układ rozmieszczonych przestrzennie cząstek, których wewnętrzne stopnie swobody oddziałują ze zmieniającym się w przestrzeni polem magnetycznym. Rozważmy problem zmierzenia gradientu pola magnetycznego zmieniającego się w przestrzeni. Zadanie to może mieć znaczenie dla medycyny (w kontekście przeprowadzania badań z wykorzystaniem rezonansu magnetycznego) i obliczeń kwantowych (w architekturze opartej o pułapki jonowe [12]). Naturalna strategia, za pomocą której można podejść do tego problemu, polega na precyzyjnym pomiarze pól magnetycznych w dwóch oddzielonych od siebie punktach. Takie podejście ma jednak wady, ponieważ jest wrażliwe na fluktuacje składowej stałej pola magnetycznego.

W prezentowanej pracy przedstawiono alternatywny schemat pomiaru gradientu pola magnetycznego oparty o oddziaływanie pola magnetycznego z wewnętrznymi stopniami swobody cząstek rozłożonych przestrzennie. Dla uproszczenia przyjęto, że interesuje nas tylko jedna składowa pola magnetycznego, a pozycyjne stopnie swobody cząstek kwantowych są ustalone (patrz Rysunek 4). Z taką sytuacją mamy (w przybliżeniu) do czynienia w przypadku pułapek jonowych [13].



Rysunek 4. Schemat modelowego układu fizycznego rozważanego w pracy. Wewnętrzne stopnie swobody (np. spin) rozłożonych przestrzennie cząstek oddziałują z niejednorodnym, zmieniającym się przestrzennie polem magnetycznym. Celem pracy [II] jest możliwe najbardziej precyzyjne wyznaczenie gradientu pola G .

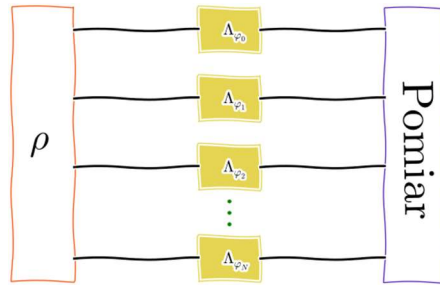
W pracy zastosowano formalizm kwantowej metrologii, który pozwolił na zidentyfikowanie stanów i pomiarów, które, dla ustalonego rozmieszczenia cząstek oraz w nieobecności szumu, dają najlepszą precyzję (wyrażaną ilościowo przez wariancję) wyznaczenia nieznanego gradientu pola magnetycznego. Rozważono również wpływ szumu defazującego (typowe źródło dekoherencji w pułapkach jonowych) i pokazano, że w ekstremalnym przypadku, kiedy szum uniemożliwia posiadanie jakiegokolwiek wiedzy na temat składowej stałej pola magnetycznego, możliwe jest skonstruowanie strategii kwantowej, która jest skuteczniejsza niż jakakolwiek metoda klasyczna.

Główna idea pracy: użycie narzędzi kwantowej metrologii do estymacji gradientu

W standardowym schemacie metrologicznym (patrz na przykład poprzednia sekcja) zadanie polega na wyznaczeniu nieznanego parametru, który jest wkodowywany w stan kwantowy w ten sam sposób na każdą cząstkę biorącą udział w eksperymencie, tzn. odpowiedni kanał kwantowy jest postaci $\Lambda_\varphi^{(N)} = (\Lambda_\varphi)^{\otimes N}$. Rozważmy przypadek kiedy parametr, który chcemy wyznaczyć jest gradientem pola magnetycznego G , które sprzęga się do spinowych stopni swobody N cząstek (jak na Rysunek 5):

$$H = \gamma B_0 H_0 + \gamma G H_G, \text{ dla } H_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_z^{(i)}, \quad H_G = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (x_i - x_0) \sigma_z^{(i)}, \quad (10)$$

gdzie γ jest stałą sprzężenia⁹, x_i jest współrzędną i -tej cząstki, a B_0 jest „bazową” wartością pola magnetycznego w punkcie x_0 .



Rysunek 5. Ilustracja sytuacji rozważanej w pracy. Pod wpływem Hamiltonianu (10) na i -tą cząstkę działa mapa $\Lambda_{\varphi_i}(\cdot) = \exp\left(-i \frac{\sigma_z}{2} \varphi_i\right)(\cdot) \exp\left(i \frac{\sigma_z}{2} \varphi_i\right)$, gdzie $\varphi_i = t\gamma(B_0 + G(x_i - x_0))$.

Celem pracy było podanie optymalnych strategii (stanu wejściowego i pomiaru kwantowego), pozwalających na możliwie najprecyzyjniejszy pomiar G w takim scenariuszu. Aby znaleźć ograniczenia na precyzję wyznaczenia G , wykorzystaliśmy następujące wyrażenie na kwantową informację Fishera związaną z wyznaczaniem G (wszystkie inne parametry traktowaliśmy jako ustalone)

$$F_Q(\rho) = 2 \sum_{\alpha, \beta: \lambda_\alpha + \lambda_\beta \neq 0} \frac{\left| \langle \lambda_\alpha | \partial_G \Lambda_G(\rho) | \lambda_\beta \rangle \right|^2}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}, \quad (11)$$

gdzie $\Lambda_G = \bigotimes_{i=1}^N \Lambda_{\varphi_i}$ jest kanałem, który koduje G na stanie wejściowym. Następnie, wykorzystując fakt, że Hamiltoniany H_0 i H_G komutują ze sobą, można było pokazać, że

⁹ Dla jasności ujęcia, w przeciwieństwie do pracy [II], przyjąłem konwencję, w której $\hbar = 1$.

$$F_Q(\rho) = 4(\gamma t)^2 \text{Var}_{H_G}(\rho) , \quad (12)$$

gdzie $\text{Var}_{H_G}(\rho) = \text{tr}(\rho H_G^2) - \text{tr}(\rho H_G)^2$ jest wariancją Hamiltonianu H_G . **Uproszczenie to pozwoliło na znalezienie optymalnych stanów pozwalających możliwie jak najprecyzyjniej wyznaczyć gradient pola magnetycznego¹⁰ i znaleźć ograniczenia na efektywność kwantowych stanów analogiczne do SQL w generycznym schemacie metrologicznym. Ponadto, powyższe równanie pozwoliło efektywnie przeanalizować problem optymalnej estymacji gradientu, kiedy na układ działa skorelowany szum defazujący [13].** W przypadku długich czasów ewolucji szum defazujący¹¹ transformuje każdy stan wejściowy do postaci diagonalnej w bazie kolektywnego operatora $J_z = (1/2) \sum_{i=1}^N \sigma_z^{(i)}$,

$$\rho \mapsto \bar{\rho} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \exp(-i2\theta J_z) \rho \exp(i2\theta J_z) . \quad (13)$$

Rzecz jasna, z powyższą transformacją wiąże się typowo pogorszenie własności metrologicznych danego stanu kwantowego.

Najważniejsze wyniki

Poniżej wymienię główne wyniki pracy [II]. Dotyczyły one optymalnych schematów pomiarowych gradientu pola magnetycznego w dwóch scenariuszach: i) nieobecności szumu defazującego, kiedy gradient pola magnetycznego był wkodowywany za pomocą kanału $\Lambda_G = \bigotimes_{i=1}^N \Lambda_{\phi_i}$, oraz ii) bardzo silnego kolektywnego szumu defazującego modelowanego przez równanie (13).

1. **Wyznaczenie optymalnej strategii dla estymacji gradientu pola magnetycznego G w nieobecności szumu defazującego.** Optymalnym stanem okazuje się być, podobnie jak w przypadku standardowego schematu metrologicznego, N cząstkowy stan GHZ¹², $|GHZ_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle^{\otimes N} + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle^{\otimes N}$. Stan ten wyznacza również najmniejszą możliwą wariancję estymatora G ,

¹⁰Przypomnijmy, że, ze względu na kwantową nierówność Cramera-Rao, odwrotność kwantowej informacji Fishera (patrz wprowadzenie do Sekcji C. 3) zadaje maksymalną precyzję z jaka można wyznaczyć estymowany parametr fizyczny.

¹¹ Szum defazujący wynika z fluktuacji „bazowego” pola magnetycznego B_0 . Za pomocą mapy zadanej równaniem (13) można również modelować ignorancję (brak wiedzy o B_0). Szczegółowa dyskusja roli kolektywnego szumu defazującego znajduje się w [II].

¹² Dla uproszczenia postaci wyników będę zakładał, że $x_i \geq x_0$.

$$Var(\hat{G}) \geq \frac{1}{(\gamma t)^2 \left[\sum_{i=0}^N (x_i - x_0) \right]^2} . \quad (14)$$

W przypadku jednorodnego rozkładu cząstek na odcinku $[x_0, x_0 + L]$ dostajemy

$$Var(\hat{G}) \geq \frac{4}{(\gamma t L)^2 N^2} .$$

Wykazano ponadto, obliczając wprost klasyczną informację Fishera, że optymalnym pomiarem, który wysyca nierówność (14) jest pomiar w bazie własnej obserwabli

$$J_x = (1/2) \sum_{i=1}^N \sigma_x^{(i)}$$

2. **Analogia z SQL dla estymacji gradientu pola magnetycznego.** Wykazano, wykorzystując wypukłość oraz subaddytywność (względem czynników iloczynu tensorowego) kwantowej informacji Fishera we wzorze (12), że optymalnym stanem separowalnym dla estymacji G jest stan $|+\rangle^{\otimes N}$, gdzie $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Ograniczenie na dokładność estymacji gradientu za pomocą stanów separowalnych wyraża się poprzez

$$Var_{SEP}(\hat{G}) \geq \frac{1}{(\gamma t)^2 \left[\sum_{i=0}^N (x_i - x_0)^2 \right]} , \quad (15)$$

co w przypadku równomiernego rozkładu cząstek na odcinku $[x_0, x_0 + L]$ daje¹³

$$Var_{SEP}(\hat{G}) \geq \frac{6}{2(\gamma t L)^2 N}$$

. Wykazano ponadto, obliczając wprost klasyczną informację Fishera, że optymalny pomiar można wybrać taki sam jak w punkcie 1 powyżej.

3. **Optymalna strategia estymacji gradientu przy silnym szumie defazującym (lub braku wiedzy na temat wartości bazowego pola magnetycznego).** Strategie opisane powyżej nie działają w przypadku, kiedy do stanu wejściowego zastosowany jest kanał (13). W takiej sytuacji konieczne jest użycie stanów posiadających nośnik na tak zwanych *decoherence free subspaces*, które w rozważanej tu sytuacji odpowiadają podprzestrzeniom odpornym na działanie skorelowanego szumu defazującego. Innymi słowy, należy używać stanów, które spełniają $[\rho, J_z] = 0$. W pracy przeanalizowano stany spełniające ten warunek i (wykorzystując przy tym wypukłość kwantowej informacji Fishera (12)) wykazano, że optymalny stan, który go spełnia jest postaci¹⁴

¹³ Użyłem tutaj przybliżonego wyrażenia, które jest prawdziwe w granicy dużych N .

¹⁴ Dla prostoty założyłem, że liczba cząstek N jest parzysta.

$$|ODF_{N/2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle^{\otimes N/2} |0\rangle^{\otimes N/2} + |0\rangle^{\otimes N/2} |1\rangle^{\otimes N/2} \right) . \quad (16)$$

Wykazano ponadto następującą nierówność na precyzję estymacji gradientu za pomocą stanów odpornych na działanie skorelowanego szumu defazującego

$$Var_{DFS}(\hat{G}) \geq \frac{1}{(\gamma t)^2 \left[\sum_{i=0}^{N/2} (x_i - x_{N-i+1}) \right]^2} . \quad (17)$$

Co ciekawe, w przypadku jednorodnego rozmieszczenia cząstek na odcinku $[x_0, x_0 + L]$ dokładność, z jaką można wyznaczyć gradient pola, skaluje się podobnie jak w przypadku, kiedy na układ nie działa żaden zewnętrzny szum¹⁵, tj. zachodzi $Var_{DFS}(\hat{G}) \geq \frac{16}{(\gamma t L)^2 N^2}$.

Podobnie jak w poprzednich dwóch scenariuszach, pomiarem kwantowym, który wysyca powyższe ograniczenie okazuje się być pomiar rzutowy w bazie własnej J_x .

Otrzymano również inne, nie przedstawione tutaj wyniki, do których należą optymalne rozmieszczenie cząstek, obliczenia informacji Fishera dla innych rodzin stanów oraz uogólnienia powyższych rozważań dla dowolnego profilu pola magnetycznego. Zainteresowany czytelnik może je znaleźć w pracy [II].

¹⁵ Tak jak przy omawianiu poprzedniego wyniku, podałem ograniczenie dolne, które jest prawdziwe dla dużych N .

C. 4 Obliczenia kwantowe w układach cząstek nierozróżnialnych

Następne dwie omawiane prace [III, IV] dotyczą teorii obliczeń kwantowych. Ich wspólnym mianownikiem jest to, że dotyczą modeli obliczeń opartych o cząstki nierozróżnialne (bozony i fermiony). Ze względu na to, że artykuły [III] i [IV] dotyczą różnych aspektów obliczeń kwantowych (odpowiednio teorii kontroli i uniwersalności, oraz klasycznej symulowalności w obecności strat optycznych), omówienie każdej pracy zostało poprzedzone krótkim wstępem nakreślającym kontekst i motywację prezentowanych wyników.

C 4.1 Uniwersalne rozszerzenia ograniczonych klas bramek kwantowych (praca [III])

Cel i motywacja

Jednym z ważnych pytań w kwantowej teorii obliczeń [14] jest zidentyfikowanie zasobów, które pozwalają na wykonywanie uniwersalnych obliczeń kwantowych, tj. manipulacji układem kwantowym w dowolny sposób dopuszczalny przez mechanikę kwantową. Od strony matematycznej oznacza to możliwość zaimplementowania dowolnej transformacji unitarnej U na interesującej nas przestrzeni Hilberta \mathcal{H} . Zazwyczaj w praktyce nie mamy bezpośredniego dostępu do wszystkich operacji na danym układzie kwantowym, ale możemy w relatywnie łatwy sposób implementować tylko bramki należące do pewnej podklasy¹⁶ $\mathcal{S} \subset U(\mathcal{H})$. **Zwykle \mathcal{S} nie zawiera wszystkich dopuszczalnych bramek kwantowych, jednakże dla odpowiednio wybranych zbiorów \mathcal{S} (tak zwanych *zbiorów uniwersalnych*) możliwe jest przybliżanie z dowolną dokładnością każdej innej bramki przez odpowiednio dobraną sekwencję elementów z \mathcal{S} .** Formalnie, zbiór \mathcal{S} nazywany jest zbiorem uniwersalnym jeśli dla każdej bramki $V \in U(\mathcal{H})$, dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna M , oraz sekwencja bramek $\{U_i\}_{i=1}^M$ ($U_i \in \mathcal{S}$), takie, że

$$\|V - U_M U_{M-1} \cdots U_2 U_1\| \leq \varepsilon, \quad (18)$$

gdzie $\|\cdot\|$ oznacza normę operatorową¹⁷. W dalszych rozważaniach będziemy używali symbolu $\langle \mathcal{S} \rangle$ aby oznaczyć zbiór bramek generowanych przez \mathcal{S} , tj. operacji unitarnych, które można

¹⁶ Ze względu na to, że przy transformacji unitarnej stany kwantowe podlegają przekształceniu $\rho \mapsto U \rho U^\dagger$, globalna faza operatora U nie ma znaczenia. Dlatego też bez straty ogólności można założyć, że operatory unitarne proporcjonalne do identyczności, tj. postaci $\exp(i\theta)\mathbb{I}$, należą do \mathcal{S} .

¹⁷ Rozważamy tutaj skończone wymiarowe przestrzenie Hilberta, dlatego też wybór konkretnej normy na przestrzeni operatorów nie gra tutaj roli.

przybliżyć z dowolną dokładnością przez ciągi elementów z \mathcal{S} . Zauważmy, że jeśli nie mamy do czynienia ze zbiorem uniwersalnym, to $\langle \mathcal{S} \rangle$ jest podzbiorem właściwym $U(\mathcal{H})$.

Często zdarza się, że bramki łatwe do zaimplementowania w praktyce nie są bramkami uniwersalnymi. Podamy tutaj dwa kanoniczne przykłady tego faktu:

1. Zbiór \mathcal{S} składa się z bramek lokalnych unitarnych [15] działających w układzie N kubitów ($\mathcal{H} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$) tj. bramki postaci $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_N$, gdzie bramki V_i są dowolnymi bramkami jednokubitowymi;
2. Zbiór \mathcal{S} składa się z bramek Clifforda¹⁸ [16], które są ważne dla kwantowej korekcji błędów oraz certyfikacji (benchmarkingu) układów kwantowych.

Co istotne, powyższe zbiory stanowią podgrupy właściwe grupy transformacji unitarnych na N kubitowej przestrzeni Hilberta. Ponadto, proces polegający na zaaplikowaniu do wyjściowego stanu standardowego $|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle$ dowolnej sekwencji bramek lokalnych unitarnych bądź Clifforda oraz wykonaniu pomiaru w bazie obliczeniowej, jest efektywnie symulowalny na komputerze klasycznym [16], a zatem nie może być użyty, aby przeprowadzić skuteczne obliczenia kwantowe.

Powyższe rozważania motywują następujące pytanie. W jaki sposób można rozszerzyć ograniczony zbiór bramek kwantowych do uniwersalności, to jest dodać do \mathcal{S} takie elementy, aby powiększony zbiór \mathcal{S}' był uniwersalny, tj. $\langle \mathcal{S}' \rangle = U(\mathcal{H})$? W przypadku dwóch zestawów bramek podanych powyżej, rozwiązania tego problemu należą do kanonu teorii obliczeń kwantowych. Mianowicie:

1. Dodanie dowolnej płaczącej bramki dwu kubitowej (którą można zaimplementować między dowolnymi parami kubitów) do bramek lokalnych unitarnych skutkuje rozszerzeniem tego zbioru do uniwersalności [15].
2. Dodanie *dowolnej bramki* do zbioru bramek Clifforda promuje ten zbiór bramek do uniwersalności [17].

Wydaje się zatem naturalnym, aby zapytać o analogiczne rezultaty dla innych ograniczonych rodzin bramek kwantowych.

Główna idea pracy: zastosowanie teorii reprezentacji w problemie uniwersalnych rozszerzeń

W pracy [III] postawiliśmy sobie za zadanie rozwiązanie problemu rozszerzenia do uniwersalności dla następujących zestawów bramek kwantowych działających na przestrzeni cząstek nierozróżnialnych (bozonów i fermionów).

¹⁸ N-kubitowe Bramki Clifforda można najprościej zdefiniować jako bramki, które przy sprzężeniu iloczynu tensorowego bramek Pauliego dają (z dokładnością do globalnej fazy) iloczyn bramek Pauliego.

- a. **Pasywna bozonowa optyka liniowa** [18]: zbiór \mathcal{S} składa się z bramek opisujących tak zwaną pasywną bozonową optykę liniową, to jest bramek postaci $W = V^{\otimes N} \Big|_{\mathcal{H}_{bos}}$, gdzie $V \in U(\mathbb{C}^m)$. Operator W ograniczony jest do przestrzeni N bozonów w m modach, którą można interpretować jako podprzestrzeń bozonowej m -modowej przestrzeni Focka. Równoważnie można ją rozumieć jako podprzestrzeń całkowicie symetryczną $\mathcal{H}_{bos} = \text{Sym}^N(\mathbb{C}^m)$ układu N rozróżnialnych cząstek, z których każda posiada m wymiarową jednocząstkową przestrzeń Hilberta¹⁹.
- b. **Pasywna fermionowa optyka liniowa** [19]: zbiór \mathcal{S} składa się z bramek opisują tak zwaną pasywną fermionową optykę liniową, tj. bramek postaci $W = V^{\otimes N} \Big|_{\mathcal{H}_f}$, gdzie $V \in U(\mathbb{C}^m)$. W tym przypadku operator W jest ograniczony do przestrzeni N fermionów w m modach, którą, w analogii do sytuacji przedstawionej powyżej, można interpretować jako podprzestrzeń fermionowej m -modowej przestrzeni Focka, tj. podprzestrzeń antysymetryczną $\mathcal{H}_f = \wedge^N(\mathbb{C}^m)$ układu N rozróżnialnych cząstek, z których każda posiada m wymiarową jednocząstkową przestrzeń Hilberta.
- c. **Aktywna fermionowa optyka liniowa** [20]: zbiór \mathcal{S} składa się z bramek działających na m -modowej fermionowej przestrzeni Focka²⁰ $\mathcal{H}_{\text{Fock}}$, które są generowane przez bramki postaci $\exp(iH_{quad})$, gdzie $H_{quad} = i \sum_{k,l=1}^{2m} h_{kl} m_k m_l$, gdzie h_{kl} jest antysymetryczną rzeczywistą macierzą rozmiaru $2m \times 2m$, a operatory $\{m_j\}_{j=1}^{2m}$ nazywane są operatorami Majorany i definiowane są następująco: $m_{2j-1} = a_j + a_j^\dagger$, $m_{2j} = i(a_j - a_j^\dagger)$ ($j = 1, \dots, m$).

Liniowe transformacje optyczne dla cząstek nierozróżnialnych pojawiają się w wielu kontekstach. Pasywna bozonowa optyka liniowa (ai) opisuje swobodną ewolucję N nieoddziałujących bozonów. Pojawia się ona w naturalny sposób w optyce kwantowej, kiedy kwantowy stan światła propaguje się przez sieć optyczną złożoną z dzielników wiązki (ang. *beam splitters*) oraz przesuwników fazowych (ang. *phase shifters*) [21]. Ponadto, pasywna bozonowa optyka liniowa ma znaczenie dla schematu obliczeń kwantowych KLM z fotonami [22], jak również paradygmatu próbkowania bozonów (ang. *boson sampling*) mającego na celu wykazanie tak zwanej supremacji kwantowej [18] – patrz opis pracy [IV] zaprezentowany w następnej sekcji. Fermionowa optyka liniowa (klasy bramek (b) oraz (c)) znajduje zastosowanie w chemii kwantowej oraz w fizyce wielociałowej. Ponadto, związane z nią modele obliczeń kwantowych, podobnie jak w przypadku bramek lokalnych unitarnych i Clifforda, prowadzą do klasycznie symulowalnych procesów kwantowych [19, 23].

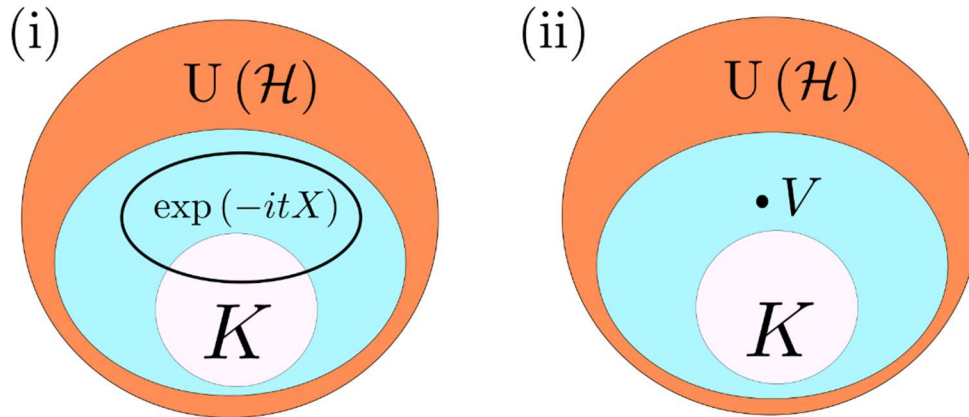
¹⁹ Związek między opisem układu bozonów za pomocą metod pierwszej i drugiej kwantyzacji można znaleźć w podręcznikach kwantowej teorii wielu ciał [71] (patrz również sekcja 2 pracy [IV]).

²⁰ Fermionowa m -modowa przestrzeń Focka jest zdefiniowana jako $\mathcal{H}_{\text{Fock}} = \bigoplus_{k=0}^m \wedge^k(\mathbb{C}^m)$. Mówiąc precyzyjnie, w pracy [III] rozważamy tylko parzystą podprzestrzeń przestrzeni Focka ze względu na to, że aktywna fermionowa optyka liniowa zachowuje parzystość liczby fermionów w układzie.

Grupy przedstawione powyżej są zwartymi podgrupami Liego grupy unitarnej $U(\mathcal{H})$, gdzie \mathcal{H} jest odpowiednią przestrzenią Hilberta. Ponadto, grupy te są związane z nieprzywiedlnymi reprezentacjami tak zwanych prostych algebr Liego na \mathcal{H} . Ta obserwacja pozwoliła na uzyskanie głównych wyników pracy. W szczególności została wykorzystana klasyfikacja Dynkina [24] dotycząca maksymalnych podalgebr Liego prostych algebr Liego.

Najważniejsze wyniki

W pracy [III] zbadano dwie wersje problemu rozszerzania ograniczonej klasy bramek K do uniwersalności. W pierwszym przypadku do grupy transformacji liniowo optycznych dodawano bramki postaci $\exp(-itX)$, gdzie $t \in \mathbb{R}$ a X jest Hamiltonianem, który nie należy do algebry Liego²¹ grupy K . W drugim przypadku rozważano, jakie bramki są generowane za pomocą ustalonej bramki V i grupy K . Oba scenariusze przedstawione powyżej ilustruje Rysunek 6.



Rysunek 6. Schematyczna prezentacja problemów badanych w [III]. (i) Zaczynając od rodziny bramek K (biały kolor) i jednoparametrowej rodziny transformacji unitarnych postaci $\exp(-itX)$ (czarna pętla), jaką klasę bramek (cyjan) można wygenerować w pełnej grupie przekształceń unitarnych $U(\mathcal{H})$ (kolor pomarańczowy)? (ii) Zaczynając od rodziny bramek K (biały kolor) i pojedynczej bramki V (czarna kropka), jaką klasę bramek (cyjan) można uzyskać w pełnej grupie przekształceń unitarnych $U(\mathcal{H})$ (kolor pomarańczowy)?

Głównym wynikiem pracy było podanie, dla każdej z rodzin ograniczonych bramek kwantowych (a-c), systematycznych klasyfikacji (zależnych od liczby cząstek i ilości modów) Hamiltonianów oraz bramek rozszerzających odpowiednie klasy optyki liniowej do uniwersalności. Formalne sformułowanie wyników można znaleźć w twierdzeniach 1-6 w pracy

²¹ Algebra Liego zwartej grupy K reprezentowanej unitarnie na \mathcal{H} składa się z operatorów antyhermitowkich. Dodanie dodatkowego hamiltonianu, za pomocą którego można ewoluować układ kwantowy odpowiada dodaniu generatora iX na poziomie algebry Liego grupy, która jest generowana przez K i transformacje $\exp(-itX)$.

[III] (dla każdej z trzech rodzin optyki liniowej (a-c) mamy dwa przypadki odpowiadające rozszerzeniom przez dodatkowy Hamiltonian X , oraz przez bramkę V). Wszystkie te twierdzenia mają podobną strukturę, która jest określona wyłącznie przez relacje komutacyjne między obiektem (bramką bądź Hamiltonianem), który dodajemy, a pewnym pomocniczym obiektem zdefiniowanym przez początkowy zestaw bramek.

W tym opracowaniu skupię się na przypadku rozważanym w Twierdzeniu 1, to jest rozszerzaniu przez dodatkową bramkę V bozonowej optyki liniowej (oznaczona poniżej przez LO_b) dla m modów i N cząstek. W przypadku $m=2$ kluczową rolę będzie odgrywał operator \mathbb{L}_b , który działa na dwóch kopiach bozonowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_b \otimes \mathcal{H}_b$ i jest zdefiniowany jako projektor na trywialną reprezentację $SU(2)$ w tej przestrzeni²².

W tej sytuacji mamy następujące trzy przypadki:

- i. Jeśli $m > 2$, to $\langle V, LO_b \rangle = U(\mathcal{H}_b)$.
- ii. Jeśli $m = 2$, $N \neq 6$, oraz $[V \otimes V, \mathbb{L}_b] = 0$, to

$$\langle V, LO_b \rangle = G_b = \{U \in U(\mathcal{H}_b) \mid [U \otimes U, \mathbb{L}_b] = 0\} . \quad (19)$$

- iii. Gdy $m = 2$, oraz $[V \otimes V, \mathbb{L}_b] \neq 0$, to $\langle V, LO_b \rangle = U(\mathcal{H}_b)$.

Na uwagę zasługuje konkretna postać G_b , tj. właściwej podgrupy $U(\mathcal{H}_b)$, która pojawia się w przypadku ii). Okazuje się, że w zależności od parzystości liczby cząstek N , podgrupa G_b jest (z dokładnością do globalnej fazy) równa²³ grupie specjalnej ortogonalnej (dla parzystych N) lub unitarnej symplektycznej (dla nieparzystych N). Co istotne, grupa unitarna symplektyczna działa tranzytywnie na zbiorze stanów czystych. Fakt ten nie zachodzi natomiast dla grupy ortogonalnej. Szczegóły tego zjawiska, wraz z odpowiednimi fizycznymi przykładami są opisane w [III].

W pozostałych przypadkach struktura wyników jest podobna. Dla generycznych kombinacji liczby modów i liczby cząstek, dowolna dodatkowa bramka V (Hamiltonian X) rozszerza K do uniwersalności – tak jak w przypadku i) powyżej. Natomiast dla pewnych relacji, które są spełnione między liczbą modów i liczbą cząstek (chodzi tu konkretnie o parzystość m , oraz to,

²² Okazuje się, że bozonową optykę liniową dla $m=2$ i N cząstek można zidentyfikować (z dokładnością do globalnej fazy) z nieprzywiedlną reprezentacją $SU(2)$ o spinie $j = N/2$. Fakt, że w przestrzeni $\mathcal{H}_b \otimes \mathcal{H}_b$ znajduje się trywialna reprezentacja $SU(2)$ wynika ze znanych reguł dodawania momentu pędu w mechanice kwantowej. W sformułowaniu Twierdzenia 1 z pracy [III] znajduje konkretna postać \mathbb{L}_b zapisana w bazie stanów Dickego na \mathcal{H}_b .

czy $m = 2N$), możliwe są sytuacje takie jak w punktach b) i c) powyżej (dla odpowiednio zdefiniowanego operatora \mathbb{L} , który pełni analogiczną rolę jak operator \mathbb{L}_b).

Rezultaty otrzymane w pracy [III] mają również znaczenie dla wyników wcześniej omawianego artykułu dotyczącego zastosowania losowych stanów w metrologii (sekcja C. 3.1). Konkretnie, powyżej sformułowany wynik może zostać wykorzystany, aby pokazać, że dla generycznych czasów t bramka $\exp(-itn_1n_2)$ promuje bozonową optykę liniową do uniwersalności dla $m=2$ modów i dowolnej liczby cząstek N . **Istotnie, znalezienie odpowiedzi na pytanie, dla jakich t bramka $\exp(-itn_1n_2)$ promuje bozonową optykę liniową do uniwersalności, było oryginalną motywacją dla wyników składających się na pracę [III].**

C. 4.2 Wpływ strat optycznych na klasyczną symulowalność eksperymentów typu próbkowanie bozonów (praca [IV])

Cel i motywacja

Oczekuje się, że komputery kwantowe będą przewyższały komputery klasyczne w możliwościach rozwiązywania różnego typu problemów obliczeniowych. Niestety, obecne ograniczenia eksperymentalne powodują, że skalowalne i odporne na błędy (ang. *fault-tolerant*) komputery kwantowe, najprawdopodobniej nie zostaną zbudowane w ciągu najbliższych kilku lat. Nie jest również jasne, która architektura fizyczna będzie ostatecznie użyta do zrealizowania komputera kwantowego.

Ze względu na tę sytuację, w ostatnich latach zaproponowano etap pośredni w rozwoju komputerów kwantowych - paradygmat kwantowej supremacji [18, 25] (ang. *quantum supremacy*). Składa się na niego kilka ograniczonych modeli obliczeń kwantowych, które nie muszą być uniwersalne, ale dla których przypuszcza się, że dla pewnych szczególnych zadań przewyższają one możliwości komputerów klasycznych. **Co ważne, zadania te typowo nie są związane z żadnym praktycznym problemem. Polegają one zwykle na próbkowaniu wyników pewnego kwantowego eksperymentu, dla którego istnieją silne argumenty z teorii złożoności obliczeniowej, pozwalające przypuszczać, że analogiczny problem jest bardzo trudny dla komputera klasycznego**²⁴.

Jedną z pierwszych propozycji kwantowej supremacji był schemat próbkowania bozonów (ang. *boson sampling*) [18]. W schemacie tym, na wejściu interferometru opisującego pasywną bozonową optykę liniową reprezentowaną przez macierz $U \in U(\mathbb{C}^m)$ (patrz poprzednia sekcja) mamy N fotonowy stan Focka,

$$|\psi_0\rangle = \left| \overbrace{1, 1, \dots, 1}^N, \overbrace{0, 0, \dots, 0}^{m-N} \right\rangle, \quad (20)$$

który opisuje N nierozróżnialnych fotonów w kolejnych m modach optycznych²⁵ (ze względów technicznych, typowo zakłada się, że $m \gg n$). Po przejściu przez interferometr stan na wyjściu jest mierzony za pomocą detektorów liczby fotonów w kolejnych modach. W wyniku wykonania jednego eksperymentu dostajemy ciąg liczb fotonów $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)$ zarejestrowanych przez kolejne detektory. Przy założeniu, że nie wystąpiły żadne błędy w implementacji doświadczenia,

²⁴ Poniżej przedstawiono schematyczną strukturę takiej argumentacji dla problemu próbkowania bozonów.

²⁵ Użyłem tutaj formalizmu liczby obsadzeni w bozonowej przestrzeni Focka. W terminach pierwszej kwantyzacji stan ten możemy zapisać jako $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}(|1\rangle|2\rangle \cdots |N\rangle + \cdots)$, gdzie kolejne człony w sumie oznaczają wszystkie możliwe $N!$ kombinacje jednocząstkowych stanów $|1\rangle, |2\rangle, \dots, |N\rangle$ w N cząstkach.

rozkład \mathbf{n} podlega rozkładowi $p_U^{BS}(\mathbf{n})$, o którym wiadomo, że dla typowych²⁶ $U \in U(\mathbb{C}^m)$ jest bardzo trudny do odtworzenia przez klasyczny komputer. Konkretniej, w pracy [18] wykazano, że o ile przyjmie się pewne nieudowodnione, ale dobrze ugruntowane hipotezy z teorii obliczeń²⁷, to dla typowych macierzy U nie istnieje klasyczny probabilistyczny algorytm, który (dla zadanego U) próbkowałby liczby fotonów \mathbf{n} z rozkładu $\tilde{p}_U^{BS}(\mathbf{n})$, spełniającego²⁸

$$TV(\{p_U^{BS}(\mathbf{n})\}, \{\tilde{p}_U^{BS}(\mathbf{n})\}) \leq \varepsilon \quad (21)$$

w czasie²⁹ $T = \text{poly}\left(N, \frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Zainteresowanie schematem próbkowania bozonów zostało wywołane przez szybki postęp w konstrukcji tak zwanych zintegrowanych sieci fotonicznych [21], które umożliwiają wykonywanie złożonych operacji liniowo-optycznych. W ostatnich latach miały miejsce liczne interakcje między społecznościami eksperymentalnymi i teoretycznymi, których celem była ocena najważniejszych przeszkód na drodze praktycznej implementacji schematu próbkowania bozonów. W szczególności, przeanalizowano jego odporność ze względu na częściową rozróżnialność fotonów, niedoskonałości wytwarzania fotonów oraz w obecności strat fotonów [26, 27]. Po stronie eksperymentalnej przedstawiono do tej pory kilka niewielkich implementacji, z maksymalnie pięcioma fotonami przy użyciu niemal deterministycznych źródeł kropek kwantowych [28]. Co istotne, opracowane ostatnio efektywne klasyczne algorytmy [29] pozwalają na symulację eksperymentów próbkowania bozonów dla 50 fotonów na współcześnie istniejących superkomputerach.

Praca *Classical simulation of photonic linear optics with lost particles* wpisuje się w ten aktualny nurt badań. Zbadano w niej w systematyczny sposób, przy jakich stratach optycznych urządzenia realizujące boson sampling mogą prowadzić do procesów łatwo symulowalnych na klasycznym komputerze.

²⁶ W sensie miary Haara na $U(\mathbb{C}^m)$

²⁷ Mowa tutaj o nieredukowalności tzw. „Wielomianowej hierarchii” (ang. *polynomial hierarchy*) oraz o pewnej technicznej hipotezie dotyczącej trudności przybliżonego liczenia permanentów losowych macierzy Gaussowskich.

²⁸ Wyrażenie $TV(\{p(\mathbf{n})\}, \{q(\mathbf{n})\}) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{n}} |p(\mathbf{n}) - q(\mathbf{n})|$ oznacza tutaj przeskalowaną odległość L1 między rozkładami prawdopodobieństwa $\{p(\mathbf{n})\}$ i $\{q(\mathbf{n})\}$ (jest ona czasem nazywana również *Total Variation distance*).

²⁹ Przy udowadnianiu tego wyniku zakłada się ponadto, że $m \gg N^2$, przy utrzymaniu $m = \text{poly}(N)$. Przypuszcza się jednak, że skalowanie $m = N^2$ wystarczy, aby udowodnić trudność dla próbkowania z rozkładu zbliżonego do $p_U^{BS}(\mathbf{n})$ przez klasyczny komputer.

Idea pracy: przybliżanie zaszumionych stanów bozonowych przez stany separowalne

W pracy [IV] przeanalizowano wpływ strat na klasyczną symulowalność eksperymentów typu boson sampling. Rozważono trzy modele strat, które charakteryzowały się wzrastającym stopniem skomplikowania (bezpośrednio przekładającym się na realizm danego modelu).

1. **Model stałych strat.** W tym modelu przed zaimplementowaniem pasywnej transformacji liniowej związanej z U , stan wejściowy ψ_0 traci dokładnie k cząstek, co jest modelowane przez działanie kanału kwantowego

$$\rho \mapsto tr_{N-k}(\rho), \quad (22)$$

gdzie ρ jest dowolnym bozonowym stanem N -cząstkowym. *Uwaga: Ten sam model strat był badany w pracy [I] (patrz Sekcja C. 3.1).*

2. **Model o stałym prawdopodobieństwie strat.** Liczba cząstek, która jest tracona przed zaimplementowaniem pasywnej transformacji liniowej³⁰ związanej z U , jest zmienną losową o rozkładzie dwumianowym takim, że prawdopodobieństwo utraty pojedynczej cząstki jest równe η . Oznacza to, że stan wejściowy ψ_0 ulega transformacji

$$\rho \mapsto \sum_{k=0}^N (1-\eta)^k \eta^k \binom{N}{k} tr_{N-k}(\rho). \quad (23)$$

Co istotne, powyższą transformację można zrozumieć poprzez zastosowanie płytki światłodzielącej (o przepuszczalności $\sqrt{\eta}$), która działa jednakowo na wszystkie mody przez nią przechodzące. Przy tej interpretacji kanał zadany wzorem (23) opisuje światło, które przeszło przez taką płytkę światłodzielącą, przy czym ignorowane są mody światła, odpowiadające „odbitemu” światłu – patrz Rysunek 7).

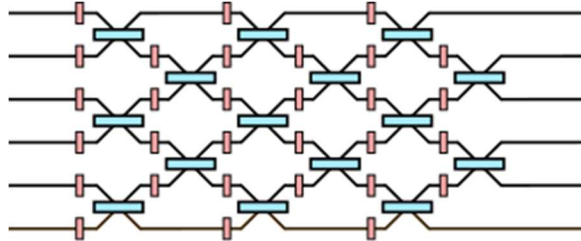


Rysunek 7. Kanał kwantowy zadany wzorem (23) może być zinterpretowany w terminach działania płytki światłodzielącej o odpowiednio dobranej przepuszczalności.

3. **Sieć optyczna, której elementy optyczne wprowadzają straty.** Typowo, aby zrealizować daną transformację optyczną składa się ze sobą płytki światłodzielące i przesuwniki fazowe ułożone w sieć optyczną [21]. W tym modelu strat zakładamy, że z implementacją każdej dwumodowej transformacji wiążą się straty optyczne w modach, których ona dotyczy (patrz

³⁰ Zarówno model 1, jak i model 2 strat optycznych komutują z działaniem pasywnej optyki liniowej. Z tego powodu nie ma znaczenia, na którym etapie eksperymentu zachodzą tak modelowane straty (w pracy [IV] znajduje się bardziej szczegółowa dyskusja tego faktu).

Rysunek 8). Co ważne, ponieważ w modelu tym straty zachodzą lokalnie, nie komutują one w ogólności z innymi elementami sieci optycznej. **Nie można zatem w prosty sposób, tak jak w powyższych dwóch modelach, „przekomutować” strat optycznych do etapu przygotowania stanu bądź wykonywania pomiaru liczby cząstek na wyjściu sieci interferometrycznej.**

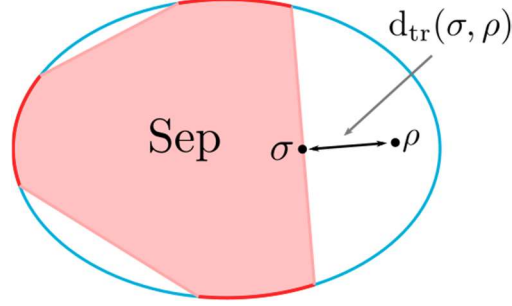


Rysunek 8 Przykładowa sieć optyczna. Niebieskie elementy oznaczają idealne elementy optyczne (dowolne transformacje pasywnej optyki liniowej na modach, które stykają się z danym elementem). Pomarańczowe elementy oznaczają straty optyczne związane z implementacją danej dwumodowej transformacji optycznej. Dla uproszczenia przyjęto, że przy implementowaniu każdej elementarnej transformacji, obydwie oddziałujące ze sobą mody światła podlegają tym samym stratom.

Dla wszystkich trzech modeli strat nasza strategia, aby otrzymać klasyczną symulację była podobna. W każdym z powyższych przypadków mamy na wejściu stan wejściowy ψ_0 , który podlega działaniu pewnego liniowo-optycznego kanału Λ (zawierającego straty optyczne). Nasz pomysł polegał na tym, aby przybliżyć stan wyjściowy $\rho = \Lambda(\psi_0)$ poprzez inny stan σ , który będzie miał następujące własności:

- σ jest kombinacją wypukłą bozonowych stanów cząstkowo-separowalnych (tj. postaci $|\phi\rangle\langle\phi|^{\otimes l}$);
- odległość śladowa³¹ między ρ a σ jest od góry ograniczona przez małą liczbę Δ tj. $d_{tr}(\rho, \sigma) \leq \Delta$ (patrz Rysunek 9).

³¹ Odległość śladową między dwoma stanami σ i ρ można zinterpretować jako maksymalną odległość w mierze *Total Variation distance* między prawdopodobieństwami, które można otrzymać wykonując różne pomiary kwantowe na tych stanach [16].



Rysunek 9. Ilustracja przybliżania stanu $\rho = \Lambda(\psi_0)$ przez stany cząstkowo-separowalne (w odległości śladowej).

Idea klasycznej symulacji jest następująca. Okazuje się, że rozkład prawdopodobieństwa $p_\sigma(\mathbf{n})$ pochodzący z pomiarów liczby cząstek w różnych modach na stanie σ jest łatwy do zasymulowania klasycznie (szczegółowe rozumowanie znajduje się w [IV]). Wobec tego, ponieważ odległość śladowa między ρ a σ jest mniejsza od Δ , mamy również

$$TV(\{p_\sigma(\mathbf{n})\}, \{p_\rho(\mathbf{n})\}) \leq \Delta, \quad (24)$$

gdzie $p_\rho(\mathbf{n})$ jest prawdziwym rozkładem prawdopodobieństwa na wyjściu układu interferometrycznego, który podlega stratom optycznym. Innymi słowy, przybliżone symulowanie³² (z dokładnością Δ) próbkowania z rozkładu $p_\rho(\mathbf{n})$ można uzyskać poprzez próbkowanie $p_\sigma(\mathbf{n})$, co może zostać skutecznie wykonane na klasycznym komputerze. Większość wyników technicznych pracy [IV] była poświęcona znajdowaniu efektywnych przybliżeń σ "zazumionych" stanów ρ dla różnych modeli strat.

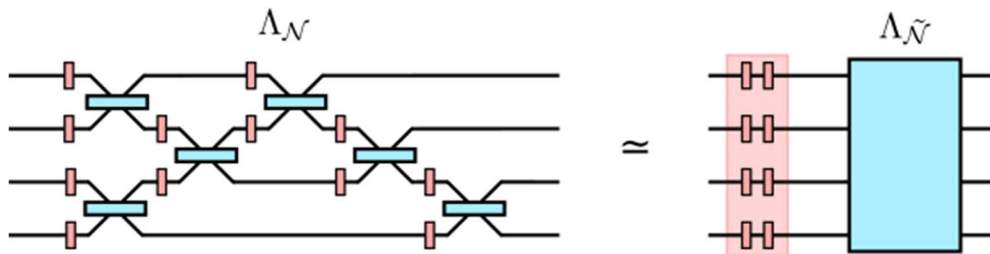
Najważniejsze wyniki

Poniżej podsumowałem najważniejsze wyniki uzyskane w [IV].

1. **Klasyczna symulowalność dla modelu stałych strat.** Wykazano, że o ile liczba cząstek, które nie zostały stracone $l = N - k$ skaluje się wolniej niż \sqrt{N} , to możliwa jest klasyczna symulacja rozkładu prawdopodobieństwa $p_\rho(\mathbf{n})$ z dokładnością $\Delta \approx \frac{l^2}{2N}$. Formalne sformułowanie tego wyniku znajduje się w Twierdzeniu 1 z [IV].

³² Warto podkreślić, że Δ pojawiająca się w równaniu (24) nie może być dowolnie mała. Tak więc klasyczna symulacja, którą tutaj dostajemy, nie jest tak silna jak ta, o której mowa w równaniu (21). Jest jednak wystarczająca dla wielu praktycznych zastosowań i może być użyta np. do testowania skomplikowanych sieci optycznych podlegających stratom.

2. **Klasyczna symulowalność dla modelu o stałych średnich stratach.** Wykazano, że o ile średnia liczba cząstek, które nie zostały stracone $\langle l \rangle = \eta N$ skaluje się wolniej niż \sqrt{N} , to możliwa jest klasyczna symulacja rozkładu prawdopodobieństwa $p_\rho(\mathbf{n})$ z dokładnością $\Delta \approx \frac{\langle l \rangle^2}{2N}$. Formalne sformułowanie tego wyniku znajduje się w lemacie 1 z [IV].
3. **Redukcja złożonej sieci optycznej do modelu jednorodnych strat.** Rozważmy najbardziej ogólny przypadek, w którym fotony mogą przechodzić przez sieć optyczną z elementami, które mogą powodować straty (Rysunek 10). Prawdopodobieństwo, że dany foton zostanie stracony zależy od jego ścieżki propagacji poprzez interferometr. Niech s oznacza najmniejszą liczbę niedoskonałych elementów optycznych, które foton musi przebyć w czasie takiej propagacji. Pokazano, że taka sytuacja może zostać równoważnie opisana przez s warstw jednorodnych strat optycznych, po których stosowana jest pewna liniowo-optyczna transformacja (którą można efektywnie opisać) – patrz Rysunek 10. Prowadzi to do wydajnego algorytmu stratnych liniowo-optycznych sieci o głębokości $s = C \log(N)$, dla odpowiednio dobranej stałej C . Formalne sformułowanie tego wyniku znajduje się w twierdzeniu 2 z [IV].



Rysunek 10. Ilustracja trzeciego głównego wyniku pracy [IV]. Kanał odpowiadający dowolnej stratnej sieci optycznej może być zrealizowany jako aplikacja pewnej ilości (zależnej od geometrii sieci) rund jednorodnych strat, po której zastosowany jest inny liniowo-optyczny kanał kwantowy.

Podsumowując, w pracy [IV] przedstawiono kompleksową analizę wpływu strat na klasyczną symulowalność eksperymentów typu boson sampling. Co więcej, wykazano, że dowolna metoda klasycznej symulacji, która będzie tego samego typu nie może prowadzić do wyników lepszych, niż te przedstawione powyżej (patrz formalne sformułowania wyników, które zostały powyżej nakreślone). Przedstawione tutaj rezultaty są punktem wyjścia dla moich dalszych badań w dziedzinie obliczeń kwantowych (patrz Sekcja C. 6).

C. 5 Ograniczone pomiary kwantowe

Pomiary kwantowe są nieodzownym elementem kwantowej informacji i teorii obliczeń kwantowych. Wynika to z faktu, że w niemalże wszystkich interesujących sytuacjach układ kwantowy musi zostać zmierzony, aby zakodowana w nim (poprzez wykonane uprzednio operacje kwantowych – patrz Rysunek 1) informacja kwantowa mogła zostać wykorzystana³³ w praktyce. Prace [V,VI] prezentowane w tej części dotyczą sytuacji kiedy, ze względu na ograniczane zasoby, nie można zaimplementować dowolnych schematów pomiarowych dopuszczalnych przez teorię kwantów. Zanim przejdę do szczegółowego omówienia tych artykułów, przedstawię krótkie wprowadzenie do teorii pomiarów uogólnionych w mechanice kwantowej.

Uogólnione pomiary kwantowe i twierdzenie Naimarka

W teorii kwantów najogólniejsze pomiary opisywane są przez tak zwane dodatnie miary o wartościach operatorowych (ang. positive operator-valued measures) – w skrócie POVM³⁴ [30]. Będziemy się tutaj zajmowali pomiarami na skończone wymiarowych przestrzeniach Hilberta ($\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^d$). Ponadto, będziemy rozważali pomiary kwantowe mające skończoną liczbę wyników n . W takich sytuacjach uogólnione pomiary można matematycznie scharakteryzować jako n -elementowe wektory operatorów na \mathbb{C}^d

$$\mathbf{M} = (M_1, M_2, \dots, M_m) , \quad (25)$$

gdzie operatory $\{M_i\}$, zwane efektami \mathbf{M} , spełniają $M_i \geq 0$ i $\sum_{i=1}^m M_i = \mathbb{I}$. Jeśli układ kwantowy znajduje się w stanie ρ , a wykonany na nim zostanie pomiar \mathbf{M} , to zgodnie z regułą Borna otrzymuje się wynik i z prawdopodobieństwem $p_i = \text{tr}(\rho M_i)$ (zadaje ona fizyczną interpretację efektów pomiaru \mathbf{M}).

Najbardziej znaną klasą pomiarów kwantowych są pomiary rzutowe (ang. *projective measurements*), tj. pomiary \mathbf{P} , których efekty są projektorami na \mathbb{C}^d (innymi słowy, dla każdego wyniku i odpowiadający mu efekt spełnia $P_i^2 = P_i$). Od strony operacyjnej pomiary rzutowe są związane z pomiarami obserwabli kwantowych. Mianowicie projektory odpowiadające różnym wartościom własnym danej obserwabli są efektami związanego z nią POVMu. Co istotne, dla każdego wymiaru d istnieją pomiary kwantowe, które nie mogą być zrealizowane jako pomiary rzutowe na \mathbb{C}^d . Ponadto, takie pomiary mogą być użyteczne dla pewnych zdań w kwantowej

³³ W przypadku wcześniej omawianych wyników będących częścią osiągnięcia naukowego z taką sytuacją mamy do czynienia w pracach [I], [II] oraz [IV].

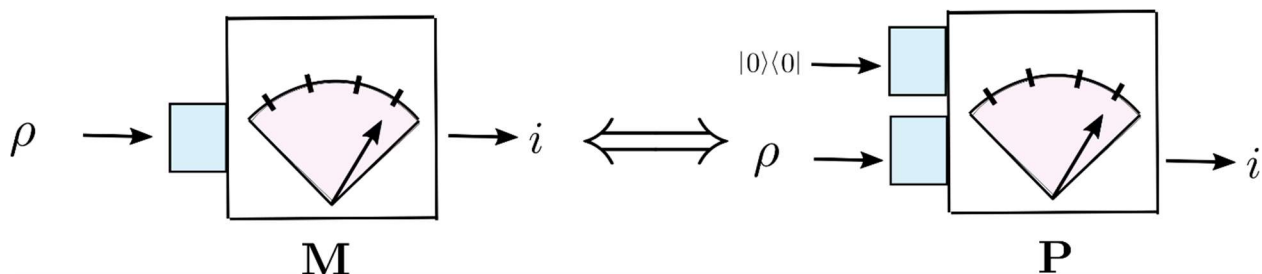
³⁴ W dalszej części prezentacji będę używał angielskiego skrótu POVM, ze względu na to, że jest on powszechnie używany w światowej literaturze dotyczącej przedstawianych tu zagadnień.

informacji takich jak rozróżnianie stanów kwantowych [31], generacja losowości [32], czy wieloparametrowa metrologia [33].

Jak jednak fizycznie zrealizować takie uogólnione pomiary kwantowe? Jedną z możliwych odpowiedzi na to pytanie daje **twierdzenie Naimarka** [30], które stwierdza, że każdy POVM na \mathbb{C}^d można zrealizować jako pomiar rzutowy na układzie rozszerzonym o dodatkowe stopnie swobody. Konkretnie, dowolny pomiar M o m efektach rzędu jeden³⁵ można zrealizować za pomocą pomiaru rzutowego³⁶ na $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^{m/d}$ według przepisu

$$\text{tr}(\rho M_i) = \text{tr}(\rho \otimes |0\rangle\langle 0| P_i) , \quad (26)$$

gdzie ρ jest dowolnym stanem na \mathbb{C}^d , $|0\rangle\langle 0|$ jest ustalonym stanem czystym na dodatkowym układzie (ancilli), a P_i są efektami odpowiednio dobranej pomiaru rzutowego działającego na całym układzie (patrz Rysunek 11).



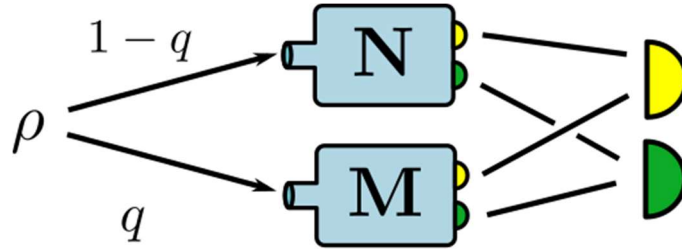
Rysunek 11. Graficzne przedstawienie standardowej konstrukcji Naimarka zadanej wzorem (26).

Klasyczne operacje na pomiarach kwantowych: randomizacja i klasyczne przetwarzanie wyników

Pomiary kwantowe można przekształcać między sobą za pomocą metod czysto klasycznych, tj. nie używających stanów kwantowych, ale działających wyłącznie na poziomie wyników pomiarów). Poniżej omówiłem krótko strategie związane z randomizacją [34] (ang. randomisation), oraz klasycznym przetwarzaniem wyników pomiarów [35] (ang. post-processing), które są szczególnie ważne w pracach [V,VI].

³⁵ Dowolny pomiar na skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta można zrealizować poprzez wykonanie pomiaru, którego efekty są rzędu 1, po którym następuje czysto klasyczna obróbka (ang. post-processing) otrzymanych wyników. Formalna definicja post-processingu pomiarów kwantowych zostanie podana w następnej części, omawiającej manipulowanie pomiarami kwantowymi za pomocą czysto klasycznych metod.

³⁶ Zakładam tutaj dla uproszczenia, że liczba wyników m jest podzielna przez d .



Rysunek 12. Ilustracja protokołu randomizacji dwóch pomiarów kwantowych o $m = 2$ wynikach.

Randomizacja dwóch m -wynikowych pomiarów \mathbf{M}, \mathbf{N} na \mathbb{C}^d polega na zaimplementowaniu strategii, w której z prawdopodobieństwem $q \in [0,1]$ zrealizowany jest pomiar \mathbf{M} , a prawdopodobieństwem $(1-q)$ pomiar \mathbf{N} (patrz Rysunek 12). W wyniku tej procedury dostaje się pomiar $q\mathbf{M} + (1-q)\mathbf{N}$, którego i -ty efekt zadany jest wzorem

$$[q\mathbf{M} + (1-q)\mathbf{N}]_i = qM_i + (1-q)N_i . \quad (27)$$

Kolejną operacją, jaką można wykonywać klasycznie na pomiarach kwantowych jest **klasyczne przetwarzanie wyników pomiarów**. Wyobraźmy sobie, że wykonujemy pomiar kwantowy \mathbf{M} na stanie ρ , dostajemy wynik j , a następnie, zwracamy wynik i z prawdopodobieństwem q_{ij} (taka procedurę można wykonać za pomocą czysto klasycznych metod). Niech teraz $\mathcal{Q} = \{q_{ij}\}$ będzie macierzą stochastyczną związaną z procedurą opisaną powyżej. Związany z nią pomiar kwantowy $\mathcal{Q}(\mathbf{M})$ ma efekty

$$\mathcal{Q}(\mathbf{M})_i = \sum_{j=1}^m q_{ij} M_j . \quad (28)$$

C. 5.1 Pomiary kwantowe symulowalne przez pomiary rzutowe i klasyczne zasoby (praca [V])

Cel i motywacja

Głównym celem pracy *Simulating positive-operator-valued measures with projective measurements* jest opisanie, jakie uogólnione pomiary kwantowe na skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta można zrealizować mając do dyspozycji pomiary rzutowe (na tej samej przestrzeni Hilberta), randomizację oraz klasyczny post-processing.

Główną motywacją dla badania powyższego zagadnienia jest wspomniane wcześniej twierdzenie Naimarka, które podaje przepis jak zrealizować dowolny pomiar kwantowy poprzez pomiary rzutowe na powiększonej przestrzeni. Konstrukcja wynikająca z tego twierdzenia ma jednak dwie wady:

- i. Wymaga ona kontroli nad dodatkowymi stopniami swobody, konieczne jest bowiem dołączenie do rozważanego układu kwantowego dodatkowych cząstek oraz implementacja skomplikowanych operacji unitarnych na rozszerzonym układzie;
- ii. Wymiar dodatkowego układu, który należy dołączyć do oryginalnego systemu, skaluje się proporcjonalnie z ilością wyników pomiaru kwantowego.

Jednocześnie, w typowych sytuacjach³⁷, pomiary rzutowe na ustalonej przestrzeni Hilberta oraz klasyczne strategie oparte na randomizacji i post-processingu (patrz wstęp do Sekcji C. 5) są dużo łatwiejsze do praktycznego zrealizowania niż konstrukcja Naimarka. Dlatego właśnie ważne jest zrozumienie jak szeroką klasę pomiarów kwantowych można zrealizować w ten właśnie sposób.

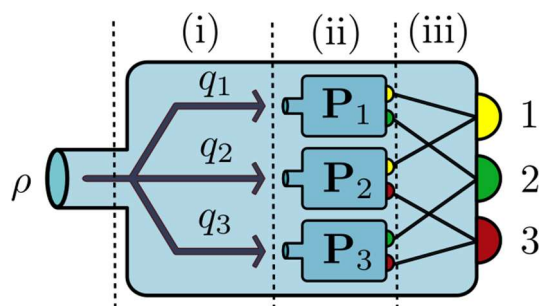
Kolejnym impulsem do badań nad tym problemem jest nielokalność w sensie Bella [36]. Konkretnie, od czasów pionierskiej pracy Wernera z 1989 roku [37] wiadomo, że istnieją stany splątane które posiadają tak zwany model lokalny³⁸ dla pomiarów rzutowych. Badanie, jakie uogólnione pomiary można zasymulować przez pomiary rzutowe może umożliwić otrzymanie nowych modeli lokalnych dla stanów splątanych, które będą działały również dla ogólnych POVMów.

³⁷ Wykluczam tu sytuacje, z którymi mamy do czynienia w optyce kwantowej, kiedy to pewne pomiary uogólnione (takie jak na przykład pomiary homodynowe) są dużo łatwiej dostępne niż pomiary rzutowe.

³⁸ Stan kwantowy ρ na $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ posiada model lokalny dla lokalnych pomiarów \mathbf{M}, \mathbf{N} (działających odpowiednio na pierwszej i drugiej cząstce) jeśli $\text{tr}(\rho M_i \otimes N_j) = \int d\lambda p(\lambda) q(i | \mathbf{M}, \lambda) q(j | \mathbf{N}, \lambda)$, dla pewnej gęstości prawdopodobieństwa $p(\lambda)$. Szczegółową dyskusję nielokalności w sensie Bella Czytelnik może znaleźć w pracy [36].

Główna idea pracy: opis POVMów symulowalnych rzutowo w języku analizy wypukłej

Myślą przewodnią pracy było wykorzystanie technik analizy wypukłej do badania zbioru pomiarów symulowalnych przez pomiary rzutowe, randomizację oraz klasyczne przetwarzanie otrzymanych wyników (patrz Rysunek 13). Pozwoliło to sformułować operacyjnie dobrze zdefiniowany problem w terminach dobrze pojęć matematycznych takich jak zbiory wypukłe, otoczki wypukłe, punkty ekstremalne, przestrzenie afiniczne związane z danym zbiorem wypukłym etc..



Rysunek 13. Schematyczne przedstawienie symulacji uogólnionych pomiarów z wykorzystaniem pomiarów rzutowych na danej przestrzeni Hilberta. Protokół symulacji składa się z trzech części: (i) randomizacji, w której określone zostaje (probabilistycznie) który z pomiarów rzutowych zostanie zaimplementowany, (ii) implementacji danego pomiaru rzutowego, oraz (iii) klasycznego postprzetworzenia otrzymanych wyników. Rysunek przedstawia symulację pewnego pomiaru kubitowego za pomocą 3 pomiarów rzutowych. W ogólności liczba użytych pomiarów rzutowych oraz liczba wyników m może być dowolna.

Punktem wyjścia w rozważaniach z pracy [V] było to, że randomizację pomiarów (w sensie opisanym powyżej) można rozumieć matematycznie jako branie kombinacji wypukłej pomiarów w zbiorze wszystkich pomiarów kwantowych o ustalonej liczbie wyników. **Ważną rolę w otrzymaniu wyników pracy była obserwacja, że zbiór pomiarów symulowalnych rzutowo (dla danego wymiaru d i liczby wyników m) jest otoczką wypukłą pomiarów rzutowych³⁹.** Ponadto, w naszej analizie bardzo przydatna była analiza struktury wypukłej zbioru pomiarów kwantowych na skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta przedstawiona w pracy [34].

Najważniejsze wyniki

W pracy [V] po raz pierwszy w systematyczny sposób zdefiniowano klasę pomiarów uogólnionych, które można zasymulować za pomocą pomiarów rzutowych na danej skończenie-wymiarowej przestrzeni Hilberta. Otrzymano szereg ogólnych wyników opisujących tę klasę pomiarów dla dowolnego wymiaru d . Ponadto, uzyskano rezultaty dające szczegółową wiedzę o pomiarach symulowalnych rzutowo dla kubitów i kutritów.

1. **Uogólnienie twierdzenia Naimarka.** Otrzymano silną generalizację klasycznego twierdzenia Naimarka dotyczącego pomiarów kwantowych (twierdzenie 1 z pracy [V]). W szczególności

³⁹ Jeśli będzie rozważało się wszystkie pomiary rzutowe nie tylko te, których niezerowe efekty są rzędu 1.

wykazano, że dowolny uogólniony pomiar na \mathbb{C}^d można uzyskać poprzez wykonanie odpowiedniego rzutowo-symulowanego pomiaru na przestrzeni $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$. Co ważne, wymiar dodatkowego układu nie zależy od liczby wyników symulowanego POVMu (w przeciwieństwie do klasycznej konstrukcji Naimarka [30] - patrz dyskusja powyżej). Ponadto wykazano, że w ogólności wymiar dodatkowego układu nie może być zmniejszony (wykorzystano tutaj znany wynik, że ekstremalne pomiary na \mathbb{C}^d mają co najwyżej d^2 wyników).

2. **Efektywna charakteryzacja pomiarów rzutowo symulowalnych dla $d = 2, 3$.** Opisano zbiory pomiarów symulowanych rzutowo dla kubitów ($d = 2$) i qutritów ($d = 3$) w terminach programowania półokreślonego [38] (ang. semidefinite programming). Wynik ten pozwala na efektywną (w sensie numerycznej efektywności i stabilności) charakteryzację zbioru pomiarów symulowanych przez pomiary rzutowe. Wykazano ponadto, że nie jest możliwe zastosowanie podobnych metod dowodu dla przestrzeni Hilberta o wymiarze większym niż 3. Wyniki, o których mowa przedstawione są w lematkach 3 i 4 w pracy [V].
3. **Odporność na szum depolaryzujący dla dowolnego wymiaru przestrzeni Hilberta.** Zbadano, odporność pomiarów kwantowych na symulowalność przez pomiary rzutowe w obecności szumu depolaryzującego. Szum depolaryzujący Φ_t działa na pomiary kwantowe poprzez transformację ich efektów według reguły

$$\Phi_t(M_i) = tM_i + (1-t)\frac{\text{tr}(M_i)}{d}\mathbb{I}, \quad (29)$$

gdzie parametr t nazywany jest często widzialnością (ang. *visibility*). Interesującym pytaniem jest to, jak mała może być krytyczna widzialność $t_*(d)$, poniżej której każdy zaszumiony pomiar $\Phi_t(\mathbf{M})$ w wymiarze d można zasymulować przez pomiary rzutowe w wymiarze d .

W pracy [V] (lemat 2) udało się wykazać ograniczenie dolne $t_*(d) \geq \frac{1}{d}$. Oznacza to, że każdy odpowiednio zaszumiony pomiar będzie symulowalny za pomocą pomiarów rzutowych.

4. **Model lokalny dla uogólnionych pomiarów na stanie Wernera.** Wykazano, za pomocą kombinacji technik numerycznych i analitycznych, że $t_*(2) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$. Wykorzystano ten wynik (szczegóły konstrukcji znajdują się na stronie czwartej pracy [V]), aby zwiększyć zakres widzialności p , dla której dwu kubitowy stan Wernera $\rho_w(p) = p\psi_- + (1-p)\frac{1}{4}\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$ posiada model lokalny dla wszystkich pomiarów uogólnionych. Konkretnie, wykazano, że dla p mniejszych od $p_* \approx 0.4519$ stan $\rho_w(p)$ posiada model lokalny. Jest to polepszenie względem konstrukcji Barreta [39], która dawała wartość widzialności $\tilde{p} = 0.416$.

Powyższe wyniki zasugerowały otwarte problemy badawcze wymienione poniżej.

- a) Operacyjna charakteryzacja tego, czy dany pomiar uogólniony można zasymulować przez pomiary rzutowe;
- b) Jak duża może być maksymalna przewaga pomiarów uogólnionych nad rzutowymi dla dobrze zdefiniowanych operacyjnie problemów?
- c) W pracy [V] nie udało się uzyskać kompletnej odpowiedzi na to, jak $t_*(d)$ zachowuje się wraz ze wzrostem wymiaru. Nie wiadomo na przykład, czy $t_*(d)$ maleje do zera wraz ze wzrostem d . Gdyby tak nie było, miałyby to poważne konsekwencje, między innymi dla modeli lokalnych dla uogólnionych pomiarów [39].

Zagadnienia te zostały podjęte przeze mnie w kolejnych pracach oraz są przedmiotem prowadzonych przez mnie obecnie badań. W szczególności problem a) był główną motywacją dla pracy [VI]. Z kolei problemy b) i c) były jedną z inspiracji dla pracy [f] (patrz Sekcja D).

C. 5.2 Rozróżnianie stanów kwantowych jako uniwersalne narzędzie operacyjnego certyfikowania własności pomiarów kwantowych (praca [VI])

Cel i motywacja

W wielu sytuacjach, ze względu na ograniczenia natury praktycznej lub fundamentalnej⁴⁰, nie jest możliwe wykonywanie najbardziej ogólnych pomiarów dopuszczalnych przez mechanikę kwantową, a zatem klasa dostępnych pomiarów jest, w pewnym zakresie, ograniczona w praktyce. Jeśli jednak założyć, że dokonywanie randomizacji (patrz wstęp do Sekcji C. 5) jest dopuszczalne, to zbiór dostępnych pomiarów \mathcal{F} jest zbiorem wypukłym⁴¹. **Celem pracy *Operational relevance of resource theories of quantum measurements* było znalezienie operacyjnej charakteryzacji tego, czy dany pomiar kwantowy należy (bądź nie) do ograniczonej klasy pomiarów \mathcal{F} .** Przez operacyjną charakteryzację rozumiem tutaj znalezienie pewnego dobrze zdefiniowanego problemu (teorio-informacyjnego, statystycznego czy algorytmicznego), dla którego pomiar nie należący do \mathcal{F} oferowałby przewagę nad wszystkimi pomiarami z \mathcal{F} .

Praca [VI] umieszczona jest mocno w kontekście rozwijającego się intensywnie w ostatnich latach paradygmatu kwantowych teorii zasobów [40] (ang. *quantum resource theories*). Ten schemat pojęciowy jest potężnym matematycznym narzędziem do systematycznego analizowania pod-teorii mechaniki kwantowej, w których nie są dostępne wszystkie stany kwantowe, operacje, czy

⁴⁰ Na przykład, kiedy rozważymy oddzielonych od siebie obserwatorów, którzy mogą wykonywać operacje wyłącznie lokalnie i komunikować się ze sobą klasycznie. W tej sytuacji klasa operacji ogranicza się do tak zwanych operacji LOCC [42].

⁴¹ Aby uniknąć tutaj komplikacji natury technicznej zakładam, że całkowita liczba wyników jest skończona i wynosi m (może być to jednak liczba dowolnie duża w porównaniu z wymiarem rozważanej przestrzeni Hilberta).

też pomiary. W ostatnich latach „teorie zasobów” były z sukcesem wykorzystywane do opisu pojęć związanych ze splątaniem kwantowym, koherencjami w układach kwantowych czy kwantową termodynamiką (w pracy przeglądowej [40] znajduje się wyczerpująca lista współczesnych referencji do prac poświęconych tym dziedzinom).

W dotychczasowych pracach dotyczących teorii zasobów główny nacisk był położony na stany kwantowe. Prezentowany artykuł [VI] przedstawia natomiast zarys teorii zasobów dla POVMów, skonstruowanej w oparciu o wypukłe podzbiory pomiarów na skończenie wymiarowych przestrzeniach Hilberta. Ponadto, główne wyniki pracy (twierdzenia 1 oraz 2) wiążą każdą taką teorię (związaną z pewnym wypukłym podzbiorem \mathcal{F}) z dobrze zdefiniowanym operacyjnym zadaniem, jakim jest rozróżnianie (dyskryminacja) odpowiednio dobranych zespołów statystycznych stanów kwantowych⁴².

Główna idea pracy

Podstawowym pomysłem leżącym u podstaw artykułu jest wykorzystanie schematu dyskryminacji stanów kwantowych [31] jako zadania, które będzie odróżniać pomiary nie należące do zbioru ograniczonych pomiarów \mathcal{F} . Problem rozróżniania stanów kwantowych można zdefiniować następująco. Rozważmy maszynę, która generuje stany kwantowe z rozkładu statystycznego $\mathcal{E} = \{p_i, \rho_i\}_{i=1}^m$, tj. w każdej rundzie eksperymentu generowany jest stan ρ_i z prawdopodobieństwem p_i . Jeśli teraz za pomocą m-wynikowego pomiaru kwantowego \mathbf{M} będziemy starali się rozróżnić, który ze stanów ρ_i został wygenerowany, dostaniemy prawdopodobieństwo poprawnego rozróżnienia równe

$$p_{succ}(\mathcal{E}, \mathbf{M}) = \sum_{i=1}^m p_i \text{tr}(\rho_i M_i) . \quad (30)$$

Zwykle dla ustalonego zespołu statystycznego optymalizuje się pomiar, aby uzyskać maksymalne prawdopodobieństwo sukcesu. W pracy [VI] przyjęliśmy odmienne podejście polegające na tym, aby porównać jak dobrze, względem pomiarów należących do \mathcal{F} , ustalony pomiar \mathbf{M} rozróżnia stany z różnych zespołów statystycznych \mathcal{E} . **Ta strategia pozwoliła nam uzyskać ogólne wyniki dla dowolnych domkniętych i wypukłych rodzin ograniczonych pomiarów \mathcal{F} .** W szczególności, główne wyniki pracy mają zastosowanie do następujących klas ograniczonych pomiarów.

- Pomiary niekoherentne, tj. pomiary, których efekty są diagonalne w pewnej ustalonej bazie na \mathbb{C}^d . Pomiary te są związane z tak zwanymi stanami niekoherentnym (diagonalnymi

⁴² Uwaga: W artykule [VI] używano technicznych określeń używanych w kwantowych teoriach zasobów: zbiór ograniczonych pomiarów był określany jako *free measurements*, podczas gdy pomiar nie należący do tej klasy był określany jako *resourceful measurement*. W niniejszym opracowaniu nie będziemy stosować tej terminologii.

w ustalonej bazie), które mają znaczenie m.in. w ostatnio intensywnie rozwijanej teorii kwantowej koherencji [41].

- Pomiar separowalny, których efekty są operatorami separowalnymi w wielocząstkowej przestrzeni Hilberta. Zawierają one ważną fizycznie klasę pomiarów LOCC [42].
- Pomiar symulowalny przez pomiary rzutowe (patrz opis pracy [V]).

Najważniejsze wyniki

Poniżej przedstawiłem główne wyniki pracy [VI].

1. **Rozróżnianie stanów kwantowych jako uniwersalne narzędzie certyfikujące „nietrywialność” pomiarów kwantowych; (tj. własność $\mathbf{M} \notin \mathcal{F}$).** W analogii do koncepcji świadków splątania zbadano, za pomocą jakich liniowych kryteriów można certyfikować, że $\mathbf{M} \notin \mathcal{F}$ (dla domkniętego i wypukłego podzbioru \mathcal{F} zbioru m-wynikowych pomiarów na \mathbb{C}^d). Wykorzystując twierdzenie Minkowskiego o płaszczyźnie podpierającej [43] wykazano, że przy ustalonym zbiorze ograniczonych pomiarów \mathcal{F} , dla każdego POVMu \mathbf{M} spełniającego $\mathbf{M} \notin \mathcal{F}$ istnieje zespół statystyczny $\mathcal{E}_{\mathbf{M}}$ taki, że dla każdego pomiaru $\mathbf{N} \in \mathcal{F}$ mamy

$$p_{succ}(\mathcal{E}_{\mathbf{M}}, \mathbf{M}) > p_{succ}(\mathcal{E}_{\mathbf{M}}, \mathbf{N}) . \quad (31)$$

Powyższy wynik opisany jest w twierdzeniu 1 z pracy [VI].

2. **Ilościowe sformułowanie przewagi w rozróżnianiu stanów w terminach geometrycznych.** Równanie (31) mówi nam, że zawsze możliwa jest certyfikacja własności $\mathbf{M} \notin \mathcal{F}$ poprzez wybór odpowiedniego zespołu statystycznego $\mathcal{E}_{\mathbf{M}}$. Jak wielka może być jednak przewaga jaką oferuje pomiar \mathbf{M} w rozróżnianiu różnych zespołów statystycznych? Odpowiedź na to pytanie, co ciekawe, wiąże się z geometryczną miarą związaną z przynależnością do zbioru \mathcal{F} zwaną *robustness*, która zdefiniowana jest następująco

$$R_{\mathcal{F}}(\mathbf{M}) = \min \left\{ s \left| \exists \mathbf{M}' \frac{1}{1+s} \mathbf{M} + \frac{s}{1+s} \mathbf{M}' \in \mathcal{F} \right. \right\} , \quad (32)$$

gdzie \mathbf{M}' jest dowolnym m-wynikowym pomiarem na \mathbb{C}^d . Przedmiotem Twierdzenia 2 z [VI] jest ilościowe powiązanie $R_{\mathcal{F}}(\mathbf{M})$ z maksymalną relatywną przewagą jaką pomiar \mathbf{M} oferuje w rozróżnianiu różnych zespołów statystycznych stanów na \mathbb{C}^d :

$$R_{\mathcal{F}}(\mathbf{M}) = \max_{\mathcal{E}} \frac{p_{succ}(\mathcal{E}, \mathbf{M})}{\max_{\mathbf{N} \in \mathcal{F}} p_{succ}(\mathcal{E}, \mathbf{N})} - 1 . \quad (33)$$

Powyższy wynik jest uogólnieniem niedawnej pracy [44], która miała zastosowanie jedynie do przypadku, kiedy zbiór \mathcal{F} składał się z pomiarów, których efekty były proporcjonalne do operatorów identyfikacyjnych na danej przestrzeni Hilberta.

3. **Maksymalne wartości $R_{\mathcal{F}}(\mathbf{M})$ dla różnych fizycznie interesujących zbiorów \mathcal{F} .** Ze względu na operacyjne znaczenie geometrycznej miary $R_{\mathcal{F}}(\mathbf{M})$ interesującym jest pytanie, jaka może być jej największa wartość dla różnych interesujących fizycznie zbiorów \mathcal{F} . W pracy przeanalizowano pod tym kątem dwie klasy zbiorów \mathcal{F} :
- a. **Pomiary niekoherentne.** W stwierdzeniu (*proposition*) 3 w pracy [VI] wykazano, że w wymiarze d największa wartość $R_{\mathcal{F}}(\mathbf{M})$ wynosi $d - 1$ i jest osiągnięta przez pomiary w bazie Fouriera (względem wyjściowej bazy definiującej pomiary niekoherentne na \mathbb{C}^d).
 - b. **Pomiary separowalne.** Rozważono dwa przypadki – dwucząstkowej ($\mathcal{H} = \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$) oraz N kubitowej ($\mathcal{H} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$) przestrzeni Hilberta. W stwierdzeniu 4 z pracy [VI] wykazano, że największa wartość $R_{\mathcal{F}}(\mathbf{M})$ w przypadku dwucząstkowym zachowuje się asymptotycznie jak d , podczas gdy w przypadku wielokubitowym mamy do czynienia ze skalowaniem wykładniczym z liczbą kubitów.

Pomimo tego, że ogólne wyniki z Twierdzeń 1 oraz 2 stosują się do scenariusza, w którym zbiór ograniczonych pomiarów \mathcal{F} składa się z pomiarów symulowanych przez pomiary rzutowe (patrz opis pracy [V]), nie udało się odpowiedzieć na pytania jak duża (w funkcji wymiaru d) może być maksymalna relatywna przewaga, jaką uogólnione pomiary oferują nad pomiarami rzutowymi w problemie rozróżniania stanów kwantowych. Jest to przedmiotem intensywnie prowadzonych przeze mnie obecnie badań.

C. 6 Plany badawcze

Przedstawione osiągnięcie badawcze jest impulsem do moich przyszłych prac naukowych. Planuję się w nich skupić na badaniu praktycznej użyteczności oraz na ograniczeniach komputerów kwantowych w niedalekiej przyszłości (ang. *near-term quantum computing*) [45]. Takie maszyny są i będą z konieczności niedoskonałe (głównie ze względu na to, że nie będzie używać się w nich kwantowych kodów korekcji błędów [46]). Z tej perspektywy zaprezentowane tutaj wyniki dotyczące różnych aspektów kwantowej informacji przy ograniczonych zasobach (ze szczególnym uwzględnieniem pomiarów kwantowych [V-VI], uniwersalności [III], i klasycznej symulowalności [IV]), są doskonałym punktem wyjścia do dalszego badania prototypów komputerów kwantowych. W przyszłości planuję zająć się następującymi aspektami obliczeń kwantowych⁴³:

- Rozwijanie metod certyfikacji pomiarów kwantowych w układach wielokubitowych i opracowanie schematów korekcji błędów pomiarowych w tych układach;
- Opracowanie efektywnych kompilatorów bramek i pomiarów kwantowych dostosowanych do architektury komputerów kwantowych dostępnych w bliskiej przyszłości;
- Systematyczne zbadanie, czy efektywnie implementowalne pomiary kwantowe (na przykład pomiary rzutowe nie wykorzystujące ancilli) mogą zostać wykorzystane do rozwiązywania konkretnych problemów algorytmicznych, takich jak problem „ukrytej podgrupy” (ang. *hidden subgroup problem*) czy izomorfizmu grafów [47];
- Teoretyczne podstawy obliczeń kwantowych: twierdzenia typu Solovay’a - Kitaeva [14] dla nieskończone wymiarowych układów (naturalnych dla optyki kwantowej), związek przybliżonych t -designów (patrz sekcja C. 3.1) z dyskretnymi przybliżeniami (tzw. ε nets) przestrzeni stanów i kanałów unitarnych;
- Opracowanie nowych schematów na osiągnięcie kwantowej przewagi obliczeniowej (ang. *quantum computational supremacy*) [18, 25] opartych o fermionową optykę liniową.

⁴³ Niedawno otrzymałem finansowanie na nakreślone tu badania, w ramach programu Team-Net prowadzonego Fundacją na rzecz Nauki Polskiej <https://www.fnnp.org.pl/team-net-wyniki-konkursu/>.

D. Osiągnięcia po uzyskaniu stopnia naukowego doktora nie wchodzące w skład jednotematycznego cyklu publikacji

Poza pracami wchodzącymi w skład osiągnięcia naukowego, po uzyskaniu doktoratu byłem zaangażowany w szereg projektów badawczych, których rezultatem były następujące artykuły naukowe

- a) M. Ozmaniec, A. Grudka, M. Horodecki, A. Wójcik, *Creating superpositions of unknown quantum states*, Phys. Rev. Lett. 116, 110403 (2016)
- b) W. Kłobus, M. Ozmaniec, R. Augusiak, A. Grudka, *Communication strength of boxes violating monogamy relations*, Foundations of Physics, 1-15 (2016)
- c) D. Saha, M. Ozmaniec, Ł. Czekaj, M. Horodecki, R. Horodecki, *Operational foundations of complementarity and uncertainty relations*”, arXiv:1809.03475 (obecnie w recenzji w czasopiśmie Quantum)
- d) A. Sawicki, T. Maciążek, K. Karnas, K. Kowalczyk-Muryńska, M. Kuś, M. Ozmaniec, *Multipartite quantum correlations: symplectic and algebraic geometry approach*, Reports on Mathematical Physics 82 (1), 81-111 (2018)
- e) Z. Puchała, Ł. Paweła, A. Krawiec, R. Kukulski, and M. Ozmaniec, *Multiple-shot and unambiguous discrimination of von Neumann measurements*, arXiv:1810.05122v1 (obecnie w recenzji w czasopiśmie IEEE Transactions on Information Theory)
- f) M. Ozmaniec, F. B. Maciejewski, Z. Puchała, *All quantum measurements can be simulated using projective measurements and postselection*, arXiv:1807.08449 (obecnie w recenzji w czasopiśmie Physical Review A)

Prace [a-c] dotyczyły formalnych i operacyjnych podstaw teorii kwantów. Praca [d] jest pracą przeglądową opisującą zastosowania technik geometrycznych i algebraicznych w teorii splątania kwantowego, natomiast prace [e] oraz [f] dotyczą pomiarów kwantowych i można je traktować jako komplementarne do prac przedstawionych w Sekcji C. 5 (w szczególności praca [f] jest ściśle związana z artykułami [V] oraz [VI]). Poniżej przedstawiony jest krótki opis najważniejszych idei i wyników zawartych w powyższych artykułach.

D. 1 Superpozycje nieznanymi stanów kwantowych (praca [a])

W projekcie zbadano ograniczenia, jakie mechanika kwantowa nakłada na możliwość tworzenia superpozycji nieznanymi stanów kwantowych. Problem ten ma podstawowe znaczenie dla podstaw mechaniki kwantowej, ze względu na to, że superpozycje stanów kwantowych należą do aspektów mechaniki kwantowej, które odróżniają ją od mechaniki klasycznej. Z drugiej strony, superpozycje stanów kwantowych są użyteczne w wielu dziedzinach kwantowej informacji, takich jak kryptografia kwantowa, kwantowa metrologia [1] (patrz też np. opis prac [I, II]), czy teoria obliczeń kwantowych [14]. Do tej pory nie było wiadomo, czy mechanika kwantowa pozwala na dodawanie do siebie nieznanymi czystych stanów kwantowych. Wyniki projektu zostały opublikowane w pracy [a], przyjętej do czasopisma Physical Review Letters. Poniżej opisano główne wyniki pracy.

Twierdzenie typu „no-go”. Głównym wynikiem pracy było wykazanie bardzo silnego twierdzenia typu „no-go” (analogia do twierdzenia Żurka o nieklonowaniu [48] i innych twierdzeń tego typu), które uniemożliwia tworzenie superpozycji nieznanych czystych stanów kwantowych przy pomocy najogólniejszych operacji dopuszczalnych w mechanice kwantowej (zastosowania dowolnych kanałów kwantowych oraz postselekcji). Formalne sformułowanie tego wyniku wymagało precyzyjnego zdefiniowania pojęcia superpozycji „nieznanych stanów kwantowych”. Okazuje się bowiem, że z pojęciem tym wiążą się pewne subtelności natury matematycznej. Mianowicie, branie superpozycji stanów kwantowych nie jest operacją dobrze określoną na stanach kwantowych. Załóżmy, że mamy dwa stany kwantowe φ oraz ψ (reprezentowane jednoznacznie przez operatory rzutowe $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ oraz $|\psi\rangle\langle\psi|$ na odpowiedniej przestrzeni Hilberta). Zwróćmy uwagę, że standardowa reprezentacja stanów czystych, jako jednostkowych wektorów w przestrzeni Hilberta nie jest jednoznaczna i jest ustalona z dokładnością do fizycznie niedostępnej fazy globalnej. Powoduje to, że, dla zadanych stanów kwantowych φ oraz ψ ich superpozycja

$$a|\psi\rangle + b|\varphi\rangle \quad (34)$$

nie jest dobrze określona. Dzieje się tak ponieważ wektory $|\psi\rangle, |\varphi\rangle$ są każde z osobna określone z dokładnością do fazy, a więc ich faza względna nie jest dobrze określoną wielkością fizyczną (nie można jej uzyskać z jakichkolwiek pomiarów stanów φ oraz ψ , nawet posiadając ich kompletny opis klasyczny). **Okazuje się, że pomimo niejednoznaczności pojawiających się w powyższym wzorze, niemożliwe jest skonstruowanie kwantowej maszyny, która tworzyłaby (nawet probabilistycznie) któreś z dopuszczalnych superpozycji równocześnie dla dowolnych par stanów φ oraz ψ .** Formalne sformułowanie poprzedniego stwierdzenia jest treścią Twierdzenia 1 z pracy [a].

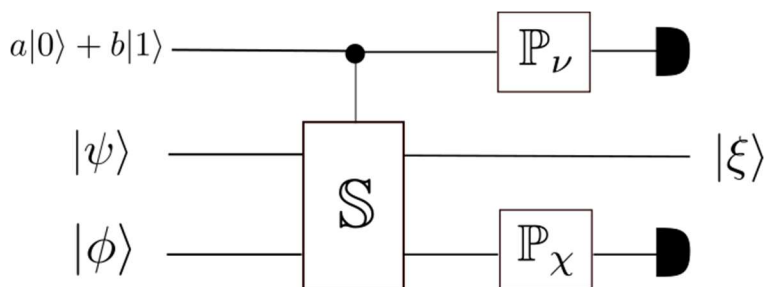
Konstruktywny protokół na tworzenie superpozycji. Poza negatywnym wynikiem, zabraniającym tworzenia kwantowych superpozycji nieznanych stanów kwantowych, pokazano również wynik konstruktywny. Wykazano mianowicie, że tworzenie superpozycji jest możliwe, o ile tylko dysponuje się minimalną informacją na temat stanów, których superpozycję chce się wytworzyć. Mówiąc bardziej precyzyjnie, wystarczy znać przekrycie (iloczyn skalarny Hilberta-Schmidta) stanów na wejściu z pewnym referencyjnym, znanym stanem czystym χ (reprezentowanym jednoznacznie przez projektor $|\chi\rangle\langle\chi|$),

$$\text{tr}(\chi\psi) = c_1 \quad , \quad \text{tr}(\chi\varphi) = c_2 \quad . \quad (35)$$

W pracy [a] zaproponowano konstruktywną metodę, która przy tej wiedzy na temat stanów kwantowych, tworzy ich superpozycję reprezentowaną (z dokładnością do normalizacji) przez wektor

$$|\xi\rangle = a \frac{\langle\chi|\varphi\rangle}{|\langle\chi|\psi\rangle|} |\psi\rangle + b \frac{\langle\chi|\psi\rangle}{|\langle\chi|\varphi\rangle|} |\varphi\rangle \quad , \quad (36)$$

z najwyższym możliwym prawdopodobieństwem (liczby zespolone a, b kodowane są w nieznanym stanie kubitów, który jest dostarczany na wejściu protokołu). Schemat metody zaproponowany jest na Rysunek 14 Szczegółowa analiza pokazująca, dlaczego w wyniku działania metody rzeczywiście generowany jest stan $|\xi\rangle$ oraz dowód jej optymalności przedstawione są w pracy [a].



Rysunek 14. Ilustracja protokołu realizującego dodawanie nieznanymi stanów kwantowych. Nieznane stany ψ, ϕ są umieszczone w drugim i trzecim rejestrze wejściowym. Następnie aplikowana jest bramka „conditional swap”, która permutuje te dwa rejestry w zależności od stanu pierwszego układu (kubitów), który koduje współczynniki superpozycji. Następnie wykonane zostają pomiary na układzie pierwszym i trzecim (w bazach zależnych od stanu χ oraz zadanych przekryć c_1, c_2 stanów wejściowych ze stanem χ). Jeśli wynik pomiaru jest odpowiedni, to na wyjściu drugiego rejestru dostajemy stan będący superpozycją stanów wejściowych (z wagami zadanymi przez wejściowy kubit).

Co ważne, powyższe wyniki są niezależne od wymiaru przestrzeni Hilberta oraz jej konkretnej fizycznej realizacji. Oznacza to, że są one prawdziwe dla kubitów, kuditów jak również dla zmiennych ciągłych (typowa sytuacja w optyce kwantowej). Można przewidywać, że opracowana metoda na dodawanie stanów kwantowych znajdzie zastosowanie w generacji nieklasycznych stanów światła, jak również w teorii obliczeń kwantowych - staje się teraz możliwe dodawanie do siebie w sposób koherentny funkcji falowych odpowiadających wynikom obliczeń kwantowych.

W przeciągu niespełna roku od publikacji artykułu, protokół na dodawanie stanów kwantowych zaproponowany w pracy został zrealizowany doświadczalnie przez dwie niezależne grupy badawcze: w układzie spinów kontrolowanych przez nuklearny rezonans magnetyczny (NMR) - w grupie z IQC (Waterloo, Kanada) kierowanej przez Raymonda Lafflamme'a [49] oraz w układzie fonicznym - w grupie z uniwersytetu Heifei (Chiny) [50].

D. 2 Łamanie relacji monogamii dla teorii niesygnalizujących (praca [b])

Wprowadzenie (korelacje niesygnalizujące). Korelacje otrzymywane w eksperymentach typu eksperymentu Bella [36] spełniają zwykle zasadę niesygnalizowania (ang. *no-signalling*). Jako przykład rozważmy przypadek trzech obserwatorów. Badanym obiektem jest wtedy zestaw warunkowych prawdopodobieństw $\{p(x,y,e|A,B,E)\}$, które opisują wyniki doświadczeń (oznaczonych małymi literami x,y,e) wykonywanych przez oddzielonych przestrzennie obserwatorów wybierających ustawienia urządzeń pomiarowych oznaczone dużymi literami A, B, E. Zestaw prawdopodobieństw $\{p(x,y,e|A,B,E)\}$ spełnia zasadę no-signalling jeśli lokalne statystyki obserwowane przez każdego obserwatora nie zależą od ustawień doświadczalnych innych obserwatorów: $p(x|A)=\sum_y \sum_z p(x,y,e|A,B,E)$, niezależnie od wyboru obserwacji B oraz E (podobnie w przypadku lokalnych statystyk dla pozostałych dwóch obserwatorów).

Idea pracy. W każdej teorii spełniającej zasadę „braku sygnalizowania”, korelacje generowane między obserwatorami oddzielonymi od siebie przestrzennie podlegają pewnym ograniczeniom znanym jako relacje monogamii. Przykładem takiej relacji jest trzycząstkowa relacja monogamii związana ze słynną nierównością Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) [36]:

$$|I_{AB}| + 2|\langle B_0E \rangle| \leq 4, \quad (37)$$

gdzie $I_{AB} = \langle A_0B_0 \rangle + \langle A_1B_0 \rangle + \langle A_1B_1 \rangle - \langle A_0B_1 \rangle$ (wyrażenie CHSH), natomiast $\langle XY \rangle$ oznacza wartość oczekiwaną iloczynu (dychotomicznych) obserwacji X i Y. W niedawnej pracy dotyczącej problemu utraty informacji o czarnej dziurze zasugerowano [51], że tego typu relacje monogamii mogą zostać naruszone. To natomiast oznacza, że korelacje pojawiające się w takim scenariuszu muszą naruszać zasadę braku sygnalizacji, a zatem mogą być wykorzystywane do wysyłania klasycznych informacji między stronami. **Główna idea pracy *Communication strength of boxes violating monogamy relations* polegała na ilościowym określeniu informacji (mierzonej przez pojemność odpowiednich klasycznych kanałów), która może być przekazywana pomiędzy obserwatorami, którzy łamią zasady monogamii takie jak w równaniu (37).**

Główne wyniki pracy [b] były następujące:

- Prosty dowód relacji monogamii mających postać (37) w oparciu o algebraiczne własności obserwacji w niej występujących oraz o współmierzalność pomiarów dla ustalonych wyborów ustawień pomiarowych trzech obserwatorów;
- Uogólnienie powyższego dowodu do przypadku relacji monogamii opartych o tak zwane *chained bell inequalities* (wielocząstkowe uogólnienie nierówności CHSH, w których każdy obserwator ma do dyspozycji dwie dychotomiczne obserwacje);
- Udowodniono ograniczenia dolne na pojemność kanałów komunikacyjnych związanych z łamaniem relacji monogamii (w ogólnym przypadku N cząstkowym). W przypadku relacji monogamii opartej o nierówność CHSH (równanie (37)) określono ściśle największą pojemność kanału komunikacyjnego gwarantowaną przez łamanie tej relacji monogamii.

D. 3 Operacyjne podejście do komplementarności i zasad nieoznaczoności (praca [c])

Wprowadzenie. Zasada nieoznaczoności Heisenberga jest jedną z fundamentalnych cech teorii kwantów, która odróżnia ją od fizyki klasycznej [52]. Stwierdza ona, że w teorii kwantowej istnieją obserwabli (na przykład pęd i położenie) wykazujące łączną niepewność, to znaczy dla żadnego stanu nie można im jednoznacznie przypisać jednocześnie określonych wartości. **Celem pracy *Operational foundations for complementarity and uncertainty relations* było sformułowanie i przeanalizowanie relacji nieoznaczoności na gruncie czysto operacyjnym, bez odwoływania się do formalizmu teorii kwantów.** Jest to zadanie stosunkowo trudne, ponieważ standardowa relacja nieoznaczoności $U(X, Y) \geq \mathcal{C}(X, Y)$ wydaje się zależeć od formalizmu kwantowego. O ile jeszcze łączną niepewność dwóch obserwabli $U(X, Y)$ można zdefiniować operacyjnie poprzez odwołanie się do statystyk eksperymentalnych, to prawa strona $\mathcal{C}(X, Y)$, typowo nazywana „komplementarnością” rozważanych obserwabli, jest zwykle zależna od formalizmu kwantowego.

Idea pracy. W pracy [c] zaproponowano rozwiązanie powyższego problemu poprzez wprowadzenie operacyjnej definicji komplementarności, opartej o pojęcie niewspółmierzałości w danej teorii. Ponadto zapostulowano, że łączna niepewność jest kosztem jaki, w fizycznie realizowalnych teoriach płaci się za komplementarność obserwabli, tj. za możliwość uzyskania większej ilości informacji o układzie ze względu na samą możliwość wykonania pomiarów dwóch obserwabli pomimo, że nie można ich zmierzyć równocześnie.

Oto główne rezultaty otrzymane w pracy:

- Wprowadzono aksjomatyczną charakteryzację pojęć łącznej niepewności i komplementarności w dowolnych teoriach operacyjnych [53] wykraczających poza formalizm kwantowy;
- Zaproponowano szereg miar komplementarności opartych o (i) wydajność tak zwanych *random access codes*, (ii) właściwości geometryczne zbioru obserwowanych statystyk oraz (iii) tzw. wariację informacji. Przeanalizowano, czy te miary mogą zostać użyte, aby sformułować relacje nieoznaczoności;
- Udowodniono, że zasada niesygnalizowania i relacja nieoznaczoności związana z komplementarnością typu (ii) prowadzi do ograniczenia Tsirelsona na wartość wyrażenia CHSH (zarówno wyrażenie CHSH, jak i pojęcie zasady niesygnalizowania, zostały zdefiniowane w Sekcji D.2);
- Wykazano, że zaproponowana niedawno zasada *Information Content* [54] może być interpretowana jako zasada nieoznaczoności w sensie nakreślonym powyżej.

D. 4 Geometryczne i algebraiczne podejście do korelacji kwantowych (praca [d])

Artykuł *Multipartite quantum correlations: symplectic and algebraic geometry approach* jest pracą przeglądową poświęconą zastosowaniu technik geometrii symplektycznej i geometrii algebraicznej do opisu korelacji w wielocząstkowych układach kwantowych (głównie w teorii splątania kwantowego). Do niedawna dominującymi metodami w badaniu splątania były techniki oparte o algebrę liniową i analizę. Jednakże w ciągu ostatnich dziesięciu lat, ze względu na techniczną trudność problemów pojawiających się w teorii splątania, coraz większe zainteresowanie zyskały narzędzia oparte o teorię grup, struktury przestrzeni fazowej na zbiorze stanów kwantowych (geometrię symplektyczną) oraz algebraiczne własności naturalnych symetrii na przestrzeni stanów kwantowych (poprzez wykorzystanie geometrii algebraicznej).

Artykuł [d] koncentrował się na następujących kwestiach, ważnych dla opisu wielocząstkowych korelacji kwantowych⁴⁴:

1. Wykorzystanie formalizmu geometrycznego i symplektycznego do opisu układów kwantowych na skończone wymiarowych przestrzeniach Hilberta;
2. Problem lokalnej unitarnej równoważności
 - a. Rozwiązanie problemu lokalnej równoważności za pomocą użycia wielomianów niezmienniczych względem odpowiednich grup symetrii;
 - b. Opisanie, kiedy obraz tak zwanego odwzorowania momentu (kodującego kolekcję jednocząstkowych zredukowanych macierzy gęstości) decyduje o lokalnej unitarnej równoważności dla stanów czystych oraz opisanie związku takiej sytuacji z istnieniem tak zwanych stanów wyjątkowych, tj. stanów, które można przybliżyć przez tensory o niższym rzędzie;
3. Problem równoważności ze względu na działanie SLOCC (stochastic local operations and classical communication)
 - a. Częściowe rozwiązanie problemu za pomocą wielomianów niezmienniczych⁴⁵;
 - b. Zastosowanie potężnego narzędzia z geometrii algebraicznej, tak zwanej geometrycznej teorii niezmienników (ang. geometric invariant theory), do sklasyfikowania stanów kwantowych ze względu na działanie SLOCC;
4. Zastosowanie geometrii symplektycznej do znalezienia „najbardziej klasycznych” orbit działania grupy lokalnej unitarnej oraz związanych z nią podgrup grupy ogólnych przekształceń unitarnych.

⁴⁴ Tematy te dotyczą bezpośrednio wyników [62, 63, 64, 65, 66] uzyskanych przeze mnie przed uzyskaniem stopnia doktora, ale nie wchodzących w skład rozprawy doktorskiej – patrz Sekcja E. 2.

⁴⁵ W tym przypadku odpowiednia grupa symetrii nie jest zwarta. Powoduje to, że problemu SLOCC równoważności nie można całkowicie rozwiązać za pomocą wielomianów niezmienniczych.

D. 5 Rozróżnianie pomiarów kwantowych (praca [e])

Wprowadzenie. W pracy *Multiple-shot and unambiguous discrimination of von Neumann measurements* przeanalizowano kompleksowo problem rozróżniania pomiarów rzutowych (von Neumanna) w skończone wymiarowych przestrzeniach Hilberta. Konkretnie, w analogii do rozróżniania stanów kwantowych rozważono problem rozróżnienia dwóch pomiarów rzutowych, których efekty są rzędu 1 (patrz na przykład Sekcja C. 5). Stany kwantowe można rozróżniać od siebie za pomocą wykonywania na nich odpowiednich pomiarów kwantowych [31] (patrz na przykład Sekcja C. 5.2). Analogicznie, pomiary kwantowe można od siebie odróżniać, analizując statystyki pomiarowe, które otrzymuje się mierząc odpowiednio przygotowane stany kwantowe [55]. W pracy [e] skupiono się na dwóch ogólnych scenariuszach:

1. Rozróżnianiu pomiarów rzutowych mając dostęp do wielu kopii pomiarów kwantowych, które chcemy rozróżnić.
2. Bezbłędne (unambiguous) rozróżnianie pomiarów rzutowych.

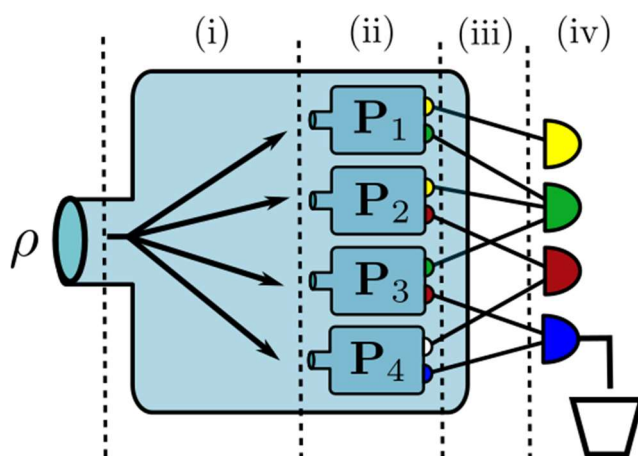
W przypadku pierwszego scenariusza skupiamy się na dyskryminacji pomiarów za pomocą splątania (pomiary rzutowe mogą być wykonywane na części dużego układu kwantowego, którego stan może być splątany). Z kolei drugi z rozważanych scenariuszy jest analogiczny do tak zwanego bezbłędnego rozróżniania stanów kwantowych [31]. ”Bezbłądność” oznacza tutaj, że wynikiem implementacji protokołu rozróżniającego dwa pomiary kwantowe musi być zawsze jednoznaczna odpowiedź lub „wstrzymanie się” od identyfikacji pomiaru.

Najważniejsze wyniki. Poniżej przedstawiono podsumowanie najważniejszych wyników zawartych w [e]:

- Udowodniono, że w scenariuszu 1, dla dowolnej pary różnych pomiarów von Neumanna $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$, możliwe jest ich doskonałe (tj. z prawdopodobieństwem sukcesu równym 1) rozróżnienie przy użyciu tylko skończonej liczby implementacji pomiarów $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$. Wynik ten jest uogólnieniem klasycznego rezultatu dotyczącego rozróżniania kanałów unitarnych [56];
- Pokazano, że typowe pary pomiarów rzutowych wylosowanych z miary Haara można doskonale rozróżnić używając jedynie dwóch implementacji;
- Wykazano, że w scenariuszu 1 równoległa implementacja pomiarów, które chcemy rozróżnić, daje optymalną strategię, a zatem wszelkie możliwe metody oparte na strategiach adaptacyjnych nie dają żadnej przewagi nad schematem równoległym;
- W przypadku bezbłędnego rozróżniania podano ogólne wyrażenia na optymalne prawdopodobieństwo rozróżnienia dwóch pomiarów von Neumanna (z wykorzystaniem splątania, oraz w sytuacji, kiedy zasób ten nie jest dostępny)

D. 6 Uogólnione pomiary kwantowe mogą być zasymulowane przez pomiary rzutowe i postselekcję (praca [f])

Wprowadzenie. Praca *All quantum measurements can be simulated using projective measurements and postselection* zawiera rozszerzenie wyników uzyskanych w artykule⁴⁶ [V]. Zbadano w niej jakie pomiary kwantowe na d wymiarowej przestrzeni Hilberta można zrealizować, jeśli ma się do dyspozycji pomiary rzutowe i postselekcję. W szczególności, schemat symulacji uogólnionych pomiarów kwantowych z [V] rozszerzono o dodatkowy krok, jakim jest postselekcja, to jest zignorowanie jednego z wyników zaimplementowanego pomiaru kwantowego (parz Rysunek 15).



Rysunek 15. Schemat symulacji rozpatrywany w pracy [f] składa się z czterech części: (i) randomizacji, w której określone zostaje (probabilistycznie) który z pomiarów rzutowych zostanie zaimplementowany, (ii) implementacji danego pomiaru rzutowego, (iii) klasycznego post-przetworzenia otrzymanych wyników, oraz (iv) zignorowania pewnych wyników pomiaru.

Ważną cechą naszej metody symulacji pomiarów jest to, że w każdym eksperymencie albo wygenerowana jest próbka z pewnego rozkładu prawdopodobieństwa (związanego z symulowanym pomiarem), albo nie zwracana jest żadna użyteczna informacja (ta druga możliwość zachodzi z pewnym ustalonym prawdopodobieństwem). Oznacza to, że schemat symulacji działa na poziomie pojedynczych eksperymentów i nie jest wymagane odtwarzanie statystyk pomiarowych (tak jak na przykład w tomografii kwantowej).

⁴⁶ Ze względu na duży związek wyników [f] z artykułami [V,VI], użyłem tutaj oznaczeń, które zostały wprowadzone w Sekcji C. 5.

Najważniejsze wyniki. W pracy [f] uzyskano systematyczną charakteryzację tego, z jak dużym prawdopodobieństwem można zasymulować pomiary kwantowe za pomocą pomiarów rzutowych i postselekcji. Ponadto, powiązano ten problem z maksymalną względną przewagą, jaką uogólnione pomiary mogą mieć nad pomiarami rzutowymi w problemie bezbłędnego rozróżniania stanów kwantowych [31] (ang. *unambiguous state discrimination*). Poniżej wymienię najważniejsze rezultaty pracy:

1. **Optymalny protokół symulacji pomiarów uogólnionych za pomocą pomiarów rzutowych i postselekcji.** Wykazano, że dowolny m -wynikowy pomiar M na \mathbb{C}^d może być zasymulowany przez pomiary rzutowe na \mathbb{C}^d i postselekcję z prawdopodobieństwem sukcesu $q_* = \frac{1}{d}$. Od strony matematycznej oznacza to, że $m+1$ wynikowy pomiar

$$\tilde{M} = (q_* M_1, q_* M_2, \dots, q_* M_m, (1 - q_*) \mathbb{I}) \quad (38)$$

jest symulowalny za pomocą pomiarów rzutowych na \mathbb{C}^d . Co więcej wykazano, że w wymiarze d istnieją pomiary, dla których nie jest możliwe uzyskanie prawdopodobieństwa sukcesu q_* wyższego niż $\frac{1}{d}$. Wyniki te zostały opisane w twierdzeniach 1 i 2 w pracy [f].

2. **Związek z bezbłędnym rozróżnianiem stanów kwantowych.** Z poprzedniego wyniku można wykazać (lemat 1 w [f]) ograniczenie górne na stosunek prawdopodobieństw sukcesu przy bezbłędnym (ang. *unambiguous*) rozróżnianiu stanów kwantowych za pomocą pomiarów uogólnionych i rzutowych:

$$\frac{p_{succ}^{POVM}(\mathcal{E})}{p_{succ}^{PROJ}(\mathcal{E})} \leq d, \quad (39)$$

gdzie d jest wymiarem przestrzeni Hilberta, $\mathcal{E} = \{p_i, \psi_i\}_{i=1}^d$ jest dowolnym zespołem statystycznym składającym się z liniowo niezależnych stanów czystych, a $p_{succ}^{POVM/PROJ}(\mathcal{E})$ oznaczają najwyższe prawdopodobieństwa bezbłędnego rozróżniania stanów z \mathcal{E} . Pokazano ponadto, że ograniczenie górne (39) jest asymptotycznie wysycane dla symetrycznych i typowych równo-prawdopodobnych ($p_i = \frac{1}{d}$) zespołów statystycznych z \mathbb{C}^d (przykłady 2 oraz 3 z [f]).

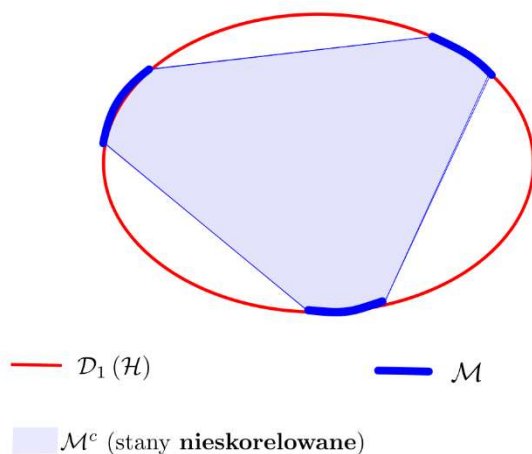
3. **Eksperymentalna demonstracja.** Zademonstrowano doświadczalnie, wykorzystując dostępne w chmurze prototypy komputerów kwantowych IBM [57], protokół symulujący uogólnione pomiary na kubicie poprzez pomiary rzutowe oraz postselekcję. Zaobserwowano poprawę w jakości takiej implementacji w porównaniu z tradycyjnym podejściem opartym o twierdzenie Naimarka. Poprawa wynikała prawdopodobnie z konieczności realizacji dwu kubitowych bramek (w prawdziwym urządzeniu są one niedoskonałe), która pojawia się w tradycyjnym schemacie opartym o twierdzenie Naimarka.

E. Osiągnięcia przed uzyskaniem stopnia naukowego doktora

E. 1 Prace wchodzące w skład rozprawy doktorskiej

Jednym z najważniejszych problemów w teorii informacji kwantowej jest opisanie zbioru stanów splątanych (bądź równoważnie - separowalnych) złożonego układu kwantowego. Splątanie kwantowe nie jest jednak jedynym typem korelacji, który pojawia się w mechanice kwantowej. Tematem przewodnim mojej rozprawy doktorskiej [58] był opis ogólniejszych typów korelacji, które mogą być zdefiniowane w sposób analogiczny do splątania.

Analizowane przeze mnie typy korelacji były definiowane w następujący sposób. Spośród wszystkich stanów czystych danego układu kwantowego wybierany był pewien podzbiór $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}_1(\mathcal{H})$ zwanych stanami nieskorelowanymi. Konkretna postać stanów czystych nieskorelowanych zależała od danego problemu fizycznego. Korelacje dla stanów mieszanych były definiowane za pomocą konstrukcji opartej o otoczkę wypukłą. Jeśli dany stan mieszany może zostać zapisany jako kombinacja wypukła nieskorelowanych stanów czystych, to stan taki nazywamy nieskorelowanym. W przeciwnym wypadku określamy go jako skorelowany (patrz Rysunek 16).



Rysunek 16. Ilustracja definicji stanów nieskorelowanych jako stanów, które należą do otoczki wypukłej zbioru stanów czystych nieskorelowanych \mathcal{M} .

W ciągu prac [59, 60, 61, 23] wchodzących w skład mojej rozprawy doktorskiej⁴⁷ rozpatrywane były przypadki, w których na przestrzeni Hilberta rozważanego układu fizycznego działa ciągła grupa symetrii zachowująca zbiór nieskorelowanych stanów czystych. Co więcej, w wielu interesujących fizycznie przypadkach zbiór ten był szczególną orbitą działania tej grupy – tak

⁴⁷ Poza wynikami zawartymi w tych pracach, sama rozprawa zawierała dodatkowe wyniki, których nie opisuję tutaj szczegółowo.

zwaną orbitą uogólnionych stanów koherentnych. Obecność tej struktury pozwoliła w ujednolicony sposób traktować różne typy korelacji i umożliwiła stosowanie metod geometrii różniczkowej oraz teorii reprezentacji grup i algebr Liego do opisu różnych własności zbioru stanów skorelowanych. We wspomnianych pracach zastosowano te ogólne metody do badania następujących typów korelacji: (i) splątania cząstek rozróżnialnych, (ii) splątania cząstkowego bozonów, (iii) „splątania” fermionów, oraz (iv) nie-Gaussowskich korelacji w układach fermionowych.

Poniżej opisałem skrótowo główne wyniki każdej z prac składających się na mój doktorat.

Analityczny opis stanów mieszanych nieskorelowanych dla niskowymiarowych reprezentacji półprostych grup Liego. W pracy [59] scharakteryzowano nieprzywiedlne reprezentacje półprostych algebr Liego dopuszczające analityczny opis zbioru stanów nieskorelowanych za pomocą tak zwanej konstrukcji Woottersa.

Wielomianowy opis stanów nieskorelowanych w układach cząstek rozróżnialnych, bozonowych i fermionowych. W pracy [60] zaproponowano ujednolicony opis algebraiczny stanów czystych nieskorelowanych dla cząstek rozróżnialnych, bozonów i fermionów. Opis ten oparty był o pewien wielomian na przestrzeni stanów kwantowych i działał również w przypadku, kiedy rozważane przestrzenie Hilberta były nieskończenie wymiarowe. Charakteryzacja ta została potem wykorzystana do wyprowadzenia wielomianowych kryteriów na korelacje kwantowe w stanach mieszanych (dla cząstek rozróżnialnych, bozonowych i fermionowych).

Typowe własności korelacji kwantowych na zbiorze macierzy gęstości o ustalonym widmie. W pracy [61] zbadano, jaka część stanów o ustalonym widmie jest stanami skorelowanymi. Rozważono 4 scenariusze: (i) splątanie cząstek rozróżnialnych, (ii) splątanie cząstkowe bozonów, (iii) „splątanie” fermionów, oraz (iv) nie-Gaussowskie korelacje w układach fermionowych. Aby uzyskać wyniki zaprezentowane w pracy wyprowadzono nowe kryteria wielomianowe (rozszerzenie kryteriów z pracy [60]) na wykrywanie tych typów korelacji w stanach mieszanych oraz zastosowano teorię koncentracji miary [6].

Klasyczna symulowalność zaszumionych obliczeń opratych o fermionową optykę liniową. W artykule [23] rozwiązano otwarty problem z pracy [20] dotyczący opisu 4 modowych stanów fermionowych, które można opisać jako kombinację wypukłą tzw. stanów fermionowych Gaussowskich. Aby rozwiązać ten problem wykorzystano wyniki z pracy [59]. Otrzymane wyniki rozszerzyły zakres parametrów, dla których zaszumione stany, które promowałyby fermionową optykę liniową do obliczeniowej uniwersalności, prowadzą do klasycznie symulowalnego modelu obliczeń.

Artykuły [59, 60, 61, 23] nie są związane z wynikami składającymi się na osiągnięcie habilitacyjne. Warto podkreślić jest jednak to, że w trakcie pracy nad doktoratem nauczyłem się i rozwinąłem narzędzia matematyczne, które wykorzystywałem w późniejszych pracach (mających inną motywację fizyczną): analizę wypukłą, teorię reprezentacji półprostych grup i algebr Liego, uogólnione stany koherentne, oraz teorię koncentracji miary.

E. 2 Prace nie wchodzące w skład rozprawy doktorskiej

Poza zaangażowaniem w projekty wchodzące w skład mojej rozprawy doktorskiej zajmowałem się także zastosowaniem teorii grup oraz metod geometrycznych w teorii splątania kwantowego. W cyklu artykułów [62, 63, 64, 65, 66], który przygotowałem we współpracy z naukowcami z CFT PAN oraz Instytutu Studiów Fotonicznych (ICFO) w Barcelonie, używałem tych technik do badania geometrii korelacji kwantowych, problemu lokalnej unitarnej (LU) równoważności, oraz równoważności ze względu na transformacje SLOCC⁴⁸ (stochastic local operations and classical communication). Poniżej wymieniłem krótko najważniejsze wyniki tych prac.

- **Użycie tak zwanej geometrycznej teorii niezmienników (Geometric Invariant Theory - GIT) do problemu klasyfikacji splątania stanów czystych ze względu na operacje SLOCC.** Wykorzystanie formalizmu GIT w pracach [62, 63] pozwoliło uzyskać lepszą (bardziej dokładną), niż istniejące wcześniej klasyfikację stanów czystych względem działania SLOCC.
- **Wykorzystanie technik geometrii symplektycznej do problemu LU równoważności stanów wielocząstkowych.** Konkretnie, w pracy [64] opisano ile, w zależności od wartości jednocząstkowych macierzy gęstości, potrzeba niezależnych LU-niezmienniczych wielomianów, aby rozstrzygnąć problem LU równoważności dwóch stanów czystych układu N kubitów.
- **Geometria symplektyczna kwantowych korelacji na stanach mieszanych dla dwucząstkowego układu kwantowego.** W pracy [65] rozszerzono na przypadek stanów mieszanych metodologię, która została wprowadzona w [67] do opisu splątania stanów czystych. Głównym wynikiem [65] było wykazanie, że warunek symplektyczności orbity odpowiednio dobranej grupy przez dany stan mieszany charakteryzuje interesujące fizycznie klasy stanów: tak zwane stany CC oraz stany CQ.
- **Wielomiany niezmiennicze dla problemu LU równoważności stanów symetrycznych.** W pracy [66] wykorzystano teorię wielomianów LU niezmienniczych, aby zbadać problem równoważności stanów bozonowych ze względu na symetryczne transformacje LU. Głównym wynikiem pracy było zaproponowanie prostego i eksperymentalnie dostępnego wielomianu niezmienniczego, który umożliwi certyfikację szerokich klas splątania kwantowego w układach bozonowych.

29.04.2019
Michał Oszumiec

⁴⁸ Formalne definicje równoważności względem działania LU i SLOCC zainteresowany czytelnik może znaleźć na przykład w pracy przeglądowej [d].

Literatura

- [1] V. Giovannetti, S. Lloyd, L. Maccone, „Advances in Quantum Metrology,” *Nat. Phot.*, tom 5, pp. 222-229, 2011.
- [2] K. Chabuda, I. D Leroux, R. Demkowicz-Dobrzański, „The Quantum Allan variance,” *New J. Phys.*, tom 18, nr 8, p. 083035, 2016.
- [3] W. Wasilewski, K. Jensen, H. Krauter, J. J. Renema, M. V. Balabas, and E. S. Polzik, „Quantum Noise Limited and Entanglement-Assisted Magnetometry,” *Phys. Rev. Lett.*, tom 104, p. 133601, 2010.
- [4] T. L. S. Collaboration, „A gravitational wave observatory operating beyond the quantum shot-noise limit,” *Nat. Phys.*, tom 7, p. 962, 2001.
- [5] R. Demkowicz-Dobrzanski, M. Jarzyna, J. Kolodynski, „Quantum limits in optical interferometry,” *Prog. Opt.*, tom 60, p. 345, 2015.
- [6] M. Ledoux, *The Concentration of Measure Phenomenon*, Providence: American Mathematical Society, 2005.
- [7] G. W. Anderson, A. Guionnet, O. Zeitouni, *An Introduction to Random Matrices*, Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [8] G. Aubrun, Stanislaw J. Szarek, *Alice and Bob Meet Banach: The Interface of Asymptotic Geometric Analysis and Quantum Information Theory*, American Mathematical Society, 2017.
- [9] D. Gross, S. Flammia, J. Eisert, „Most quantum states are too entangled to be useful as computational resources,” *Phys. Rev. Lett.*, tom 102, p. 190501, 2009.
- [10] R. Demkowicz-Dobrzanski, J. Kolodynski, M. Guta, „The elusive Heisenberg limit in quantum enhanced metrology,” *Nat. Comm.*, tom 3, p. 1063, 2012.
- [11] F. G. S. L. Brandao, A. W. Harrow, M. Horodecki, „Local random quantum circuits are approximate polynomial-designs,” *Commun. Math. Phys.*, tom 346, nr 2, pp. 397-434, 2016.
- [12] C. Ospelkaus, C. E. Langer, J. M. Amini, K. R. Brown, D. Leibfried, D. J. Wineland, „Trapped-ion quantum logic gates based on oscillating magnetic fields,” *Phys. Rev. Lett.*, tom 101, p. 090502, 2008.
- [13] T. Monz, P. Schindler, J. T. Barreiro, M. Chwalla, D. Nigg, W. A. Coish, M. Harlander, W. Haensel, M. Hennrich, R. Blatt, „14-qubit entanglement: creation and coherence,” *Phys. Rev. Lett.*, tom 106, p. 130506, 2011.
- [14] A. Yu. Kitaev, A. H. Shen, M. N. Vyalyi, *Classical and Quantum Computation (Graduate Studies in Mathematics)*, American Mathematical Society, 2002.

- [15] J. L. Brylinski and R. Brylinski, „Universal quantum gates,” *Mathematics of Quantum Computation*, tom 79, 2002.
- [16] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [17] S. Clark, „Valence bond solid formalism for d-level one-way quantum computation,” *J. Phys. A: Math. Gen.*, tom 39, pp. 2701-2721, 2006.
- [18] S. Aaronson, A. Arkhipov, „Boson Sampling,” *Theory of Computing*, tom 4, pp. 143-252, 2013.
- [19] D. P. DiVincenzo, B. M. Terhal, „Fermionic Linear Optics Revisited,” *Foundations of Physics*, tom 35, nr 12, pp. 1967-1984, 2005.
- [20] F. de Melo, P. Ćwikliński, B. M. Terhal, „The power of noisy fermionic quantum computation,” *New J. Phys.*, tom 15, nr 1, p. 013015, 2013.
- [21] J. Carolan, et al., „Universal Linear Optics,” *Science*, Tomy %1 z %2349, p. 711, 2015.
- [22] E. Knill, R. Laflamme, G. J. Milburn, „A scheme for efficient quantum computation with linear optics,” *Nature*, tom 409, p. 46-52, 2001.
- [23] M. Oszmaniec, J. Gutt, M. Kuś, „Classical simulation of fermionic linear optics augmented with noisy ancillas,” *Phys. Rev. A*, tom 90, nr 2, p. 020302, 2014.
- [24] E. B. Dynkin, G. M. Seitz, and A. L. Onishchik, „Maximall subgroups of classical groups,” w *Selected papers of E. B. Dynkin with commentary*, Americal Mathematical Society, 2000.
- [25] A. W. Harrow, A. Montanaro, „Quantum Computational Supremacy,” *Nature*, tom 549, pp. 203-209, 2017.
- [26] D. J. Brod, S. Aaronson, „BosonSampling with lost photons,” *Phys. Rev. A*, tom 93, p. 012335, 2016.
- [27] S. Rahimi-Keshari, T. C. Ralph, and C. M. Caves, „Sufficient Conditions for Efficient Classical Simulation of Quantum Optics,” *Phys. Rev. X*, tom 6, p. 021039, 2016.
- [28] H. Wang, et al., „High-efficiency multiphoton boson sampling,” *Nat. Phot.*, tom 11, p. 361365, 2017.
- [29] A. Neville, et. al, „ Classical boson sampling algorithms with superior performance to near-term experiments,” *Nat. Phys.*, tom 13, p. 153, 2017.
- [30] A. Peres, *Quantum theory: Concepts and methods*, Springer Science and Buisness Media, 2006.
- [31] S. M. Barnett, S. Croke, „Quantum state discrimination,” *Adv. Opt. Photon.*, tom 1, p. 238, 2009.

- [32] F.J. Curchod, M. Johansson, R. Augusiak, M.J. Hoban, P. Wittek, A. Acín, „Unbounded randomness certification using sequences of measurements,” *Phys. Rev. A*, tom 95, p. 020102, 2017.
- [33] M. Szczykulska, T. Baumgratz, A. Datta, „Multi-parameter Quantum Metrology,” *Adv. Phys. X*, tom 1, pp. 621-639, 2016.
- [34] G. M. D'Ariano, P. L. Presti, P. Perinotti, „Classical randomness in quantum measurements,” *J. Phys. A: Math. Gen.*, tom 38, pp. 5979-5991, 2005.
- [35] F. Buscemi, G. M. D'Ariano, M. Keyl, P. Perinotti, R. Werner, „Clean Positive Operator Valued Measures,” *J. Math. Phys.* 46, tom 46, p. 082109, 2005.
- [36] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani, S. Wehner, „Bell nonlocality,” *Rev. Mod. Phys.*, tom 86, p. 419, 2014.
- [37] R. Werner, „Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model,” *Phys. Rev. A*, tom 40, pp. 4277-428, 1989.
- [38] L. Vandenberghe, S. Boyd, „Semidefinite Programming,” *SIAM Rev.*, tom 38, nr 1, p. 49-95, 1996.
- [39] J. Barrett, „Nonsequential positive-operator-valued measurements on entangled mixed states do not always violate a Bell inequality,” *Phys. Rev. A*, tom 65, p. 042302, 2002.
- [40] E. Chitambar, G. Gour, „Quantum Resource Theories,” *Rev. Mod. Phys.*, tom 91, p. 025001, 2018.
- [41] A. Streltsov, G. Adesso, Martin B. Plenio, „Quantum Coherence as a Resource,” *Rev. Mod. Phys.*, tom 89, p. 041003, 2017.
- [42] E. Chitambar, D. Leung, L. Mančinska, M. Ozols, A. Winter, „Everything You Always Wanted to Know About LOCC (But Were Afraid to Ask),” *Comm. Math. Phys.*, tom 328, nr 1, p. 303-326, 2014.
- [43] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.
- [44] P. Skrzypczyk, N. Linden, „Robustness of Measurement, Discrimination Games, and Accessible Information,” *Phys. Rev. Lett.*, tom 122, nr 14, p. 140403, 2019.
- [45] J. Preskill, „Quantum Computing in the NISQ era and beyond,” *Quantum*, tom 2, nr 79, 2018.
- [46] B. M. Terhal, „Quantum Error Correction for Quantum Memories,” *Rev. Mod. Phys.*, tom 87, p. 307, 2015.
- [47] A. M. Childs, W. van Dam, „Quantum algorithms for algebraic problems,” *Rev. Mod. Phys.*, tom 82, pp. 1-52, 2010.

- [48] W. Wootters and W. Żurek, „A Single Quantum Cannot be Cloned“.,” *Nature*, tom 299, nr 5886, p. 802–803, 1982.
- [49] K. Li, G. Long, H. Katiyar, T. Xin, G. Feng, D. Lu, R. Laflamme, „Experimentally superposing two pure states with partial prior knowledge,” *Phys. Rev. A*, tom 95, p. 022334, 2017.
- [50] X.-M. Hu, M.-J. Hu, J.-S. Chen, B.-H. Liu, Y.-F. Huang, C.-F. Li, G.-C. Guo, Y.-S. Zhan, „Experimental creation of superposition of unknown photonic quantum states,” *Phys. Rev. A*, tom 94, p. 033844, 2016.
- [51] A. Almheiri, D. Marolf, J. Polchinski, J. Sully, „Black holes: complementarity or firewalls,” *JHEP*, tom 02, p. 062, 2013.
- [52] P. Busch, T. Heinonen, P. Lahti, „Heisenberg's uncertainty principle,” *Phys. Rep.*, tom 452, p. 155, 2007.
- [53] R. W. Spekkens, „Contextuality for preparations, transformations, and unsharp measurements,” *Phys. Rev. A*, tom 71, p. 052108, 2005.
- [54] L. Czekaj, M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, „Information Content of Systems as a Physical Principle,” *Phys. Rev. A*, tom 95, p. 022119, 2017.
- [55] Z. Puchała, Ł. Paweł, A. Krawiec, R. Kukulski, „Strategies for optimal single-shot discrimination of quantum measurements,” *Phys. Rev. A*, tom 98, p. 042103, 2018.
- [56] A. Acin, „Statistical distinguishability between unitary operations,” *Phys. Rev. Lett.*, tom 87, p. 177901, 2001.
- [57] A. W. Cross, L. S. Bishop, J. A. Smolin, J. M. Gambetta, „Open Quantum Assembly Language,” *arXiv:1707.03429*, 2017.
- [58] M. Oszmaniec, „Applications of differential geometry and representation theory to description of quantum correlations,” *arXiv:1412.4657*.
- [59] M. Oszmaniec, M. Kuś, „On detection of quasiclassical states,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, tom 45, nr 24, p. 244034, 2012.
- [60] M. Oszmaniec, M. Kuś, „Universal framework for entanglement detection,” *Phys. Rev. A*, tom 88, nr 5, p. 052328, 2013.
- [61] M. Oszmaniec, M. Kuś, „Fraction of isospectral states exhibiting quantum correlations,” *Phys. Rev. A*, tom 90, nr 1, p. 010302, 2014.
- [62] A. Sawicki, M. Oszmaniec, M. Kuś, „Critical sets of the total variance can detect all stochastic local operations and classical communication classes of multiparticle entanglement,” *Phys. Rev. A*, tom 86, nr 4, p. 040304, 2012.

- [63] A. Sawicki, M. Oszmaniec, M. Kuś, „Convexity of momentum map, Morse index, and quantum entanglement,” *Rev. Math. Phys.*, tom 26, nr 3, p. 1450004, 2014.
- [64] T. Maciążek, M. Oszmaniec, A. Sawicki, „How many invariant polynomials are needed to decide local unitary equivalence of qubit states?,” *J. Math. Phys.*, tom 54, nr 9, p. 092201, 2013.
- [65] M. Oszmaniec, P. Suwara, A. Sawicki, „Geometry and topology of CC and CQ states,” *J. Math. Phys.*, tom 55, nr 6, p. 062204, 2013.
- [66] P. Migdał, J. Rodríguez-Laguna, M. Oszmaniec, M. Lewenstein, „Multiphoton states related via linear optics,” *Phys. Rev. A*, tom 89, nr 6, p. 062329, 2014.
- [67] A. Sawicki, A. Huckleberry, M. Kuś, „Symplectic geometry of entanglement,” *Comm. Math. Phys.*, tom 305, nr 2, pp. 441-468, 2011.
- [68] S. Deléglise, I. Dotsenko, C. M. Sayrin, J. Bernu, M. Brune, J. M. Raimond, S. Haroche, „Reconstruction of non-classical cavity field states with snapshots of their decoherence,” *Nature*, tom 455, nr 7212, p. 510–514, 2008.
- [69] S. Wehner, D. Elkouss, R. Hanson, „Quantum internet: A vision for the road ahead,” *Science*, tom 362, nr 412, p. eaam9288, 2018.
- [70] H.-P. Breuer, F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford: Oxford University Press, 2002.
- [71] A. L. Fetter, J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-particle Systems*, Mineola, New York: Dover Publications, 2013.
- [72] A. Montanaro, „Quantum algorithms: an overview,” *npj Quant. Inf.*, tom 2, p. 15023, 2016.
- [73] N. Gisin, R. Thew, „Quantum communication,” *Nat. Phot.*, tom 1, p. 165–171, 2007.