Recenzja pracy doktorskiej pani magister Marty Leśniak pod tytułem *Normalne generatory grupy klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej*

P. Traczyk@mimuw.edu.pl

15 czerwca 2020

Dr hab. Paweł Traczyk
profesor Uniwersytetu Warszawskiego
Uniwersytet Warszawski
Instytut Matematyki Wydziału
Matematyki, Informatyki i Mechaniki
ul. Banacha 2
02-097 Warszawa

Warszawa, 25.05.2020

Pani magister Marta Leśniak przedłożyła do oceny rozprawę doktorską pod tytułem *Normalne generatory grupy klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej*. Rozprawa składa się ze streszczenia, wstępu, czterech rozdziałów i spisu literatury, na łącznie 89 stronach.
We wstępie jest przedstawione tło historyczne i krótko przedstawiony przedmiot badań.

Ocena merytoryczna pracy
Grupy klas odwzorowań zamkniętych powierzchni to tematyka w głównym nurcie współczesnej matematyki. Są one istotne między innymi w niskowymiarowej topologii, geometrii algebraicznej, geometrycznej teorii grup. Związki rozpatrywanej tematyki z z matematyką w ogóle są krótko i celnie opisane we Wstępie rozprawy, nie chcę tego powtarzać. Zresztą wystarczy spojrzeć na spis literatury i obejrzeć daty publikacji cytowanych prac — dobrze ponad połowa powstała po roku 2000, a znaczna część tych, które powstały wcześniej to prace klasyczne. W badaniach doktorantki analizowany jest przypadek, gdy rozpatrywana powierzchnia zwarta jest nieorientowalna. Dopuszczona jest dowolna liczba składowych brzegu. Główny temat pracy to generatory normalne grupy

klas odwzorowań, czyli takie zestawy klas odwzorowań, że elementy do nich sprzężone generują całą grupę.
W Rozdziale 1, zatytułowanym *Preliminaria* przedstawiony jest obszerny wstęp do tematyki, bardzo pożyteczny dla czytelnika, który sam nie jest bezpośrednio zaangażowany w pracę badawczą z zakresu grup klas odwzorowań powierzchni. W szczególności podane są podstawowe definicje, w tym twistu Dehna i transpozycji wstęg oraz ślizgu wstęgowego. Twisty Dehna są lepiej znane szerszemu gronu matematyków, definicja transpozycji wstęg jest oczywista, natomiast definicja ślizgu wstęgowego mogłaby być opisana w sposób bardziej jasny (chodzi mi o to, dlaczego na rysunku 1.1, w prawym dolnym rogu jest narysowane właśnie to, co jest narysowane, jestem ciekaw, czy Autorka na pewno to wie).
W Rozdziale 2 udowodnione jest Twierdzenie 1, że dla $g \geq 7$ grupa $\mathcal{M}(N_{g,n})$ jest generowana normalnie przez jedną transpozycję wstęg. To ciekawy krok w kierunku prostoty i jednorodności zbioru generatorów. O ile dobrze zrozumiałem, ograniczenie $g \geq 7$ jest nie do poprawienia, ze względu na niecykliczność abelianizacji grupy $\mathcal{M}(N_g), 2 \leq g < 7$. Przy okazji: lepiej było to napisać zaraz po sformułowaniu Twierdzenia 1, oszczędziłoby to mi trochę wysiłku przy próbach zrozumienia, czy ograniczenie jest czy nie jest do poprawienia. A stwierdzenie, że to natychmiast wynika z niecykliczności jest prawdziwe, ale można było napisać, że wynikanie jest proste, a odsyłacz do pracy [27] dotyczy tylko samej niecykliczności.
Autorka podaje jako prosty wniosek z Twierdzenia 1 stwierdzenie, że istnieje skończony zbiór generatorów grupy klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej złożony wyłącznie z transpozycji wstęg. Słusznie, bo to jest rzeczywiście prosty wniosek, w każdym razie dla kogoś, kto się zdołał trochę wgłębić w problematykę. Ale lepiej było napisać to w postaci wyodrębnionego stwierdzenia i wyjaśnić dlaczego ten wniosek jest prosty. Taki skończony zbiór jest wyliczony w Twierdzeniu 2.2 w Rozdziale 2 — to wynik poboczny, chyba bez większego znaczenia, tylko ilustracja metody.
Rozdziały 3 i 4 są poświęcone analizie elementów torsyjnych (jako generatorów). W Rozdziale 3 pojawia się twierdzenie, że dla $g \geq 7$ domknięcie normalne elementu torysjnego rzędu większego od 3 zwiera w sobie podgrupę twistów Dehna (Twierdzenie 2), co oznacza, że albo domknięcie normalne tego elementu jest równe całemu $\mathcal{M}(N_g)$, albo jest równe podgrupie twistów Dehna, zależnie od tego, czy sam rozpatrywany element należy do $\mathcal{T}(N_g)$ (Wniosek 3). Wymienię jeszcze Twierdzenie 5, w którym stwierdza się, że dla każdego $g \geq 7$ istnieje inwolucja generująca normalnie $\mathcal{M}(N_g)$.
Poprawność formalno – językowa pracy. Uważam, że praca jest dobrze zredagowana, chociaż w tekście o takiej długości nie dało się zupełnie uniknąć niezręczności, czy drobnych błędów/literówek. Kilka przykładów takiej nieuwagi:

1. *strona* 3^6 : *Jeżeli* $n = 0$, *pomijamy je*: z konstrukcji gramatycznej tego

zdania i poprzedniego, nie wynika kogo lub co pomijamy.

2. strona 22_2 : brak zaznaczenia, że chodzi o izotopie poprzez homeomorfizmy, które na brzegu zachowują się jak identyczność.

3. strona 23^3 : *Niech [...] jest walcem*: Wydaje mi się, że w języku polskim, tak jak go używają matematycy, pisze się w takich sytuacjach: niech [...] będzie walcem. Autorka pisze czasem tak, a czasem tak.

4. strona 24, sformułowanie punktu 2 Lematu 3: zachowują → zachowuje

5. strona 25^6 Jednym z jej podstawowych zastosowań jest dowód doskonałości grupy klas odwzorowań powierzchni orientowalnej ma trywialną abelianizację – ostatnie trzy wyrazy są niepotrzebne.

6. strona 28, sformułowanie Twierdzenia 1.11.: lepiej było zrezygnować z wyrazu komutant, a jeżeli już został użyty, to zamiast znaku równości należało napisać jest równy.

7. w wielu miejscach (na pewno więcej niż dziesięciu) Autorka pisze *taki, że* — wbrew zasadzie, że nie rozdziela się przecinkiem połączeń partykuł, spójników i przysłówków ze spójnikami. Należy natomiast, w takiej sytuacji, poprzedzić przecinkiem całe wyrażenie (to znaczy napisać ..., *taki że*; to się nazywa *zasada cofania przecinka*. O ile zdołałem stwierdzić Autorka trzyma się wersji z przecinkiem z całkowitą konsekwencją.
Pomijam jako bezcelowe wyliczanie pomniejszych literówek. Wydaje mi się, że nie jest ich dużo.

Ocena metodologiczna pracy

Praca zawiera obszerny spis sześćdziesięciu pięciu cytowanych prac naukowych. Dobór cytowanych prac jest właściwy i wydaje się kompletny we właściwym sensie tego słowa, to znaczy: umożliwia czytelnikowi łatwe dotarcie do wszystkiego tego, co jest niezbędne dla zrozumienia całości argumentacji, a co nie leży w podstawowym standardzie wykształcenia matematyka. Ale i w tej kwestii są drobne usterki. Na przykład w dowodzie Twierdzenia 2.2 autorka powołuje się na Twierdzenia 3.5 i 3.6 z pracy [48] w sposób niezupełnie adekwatny — te twierdzenia nie mówią o tym że rozpatrywana grupa jest generowana przez wskazane elementy, tylko opisują relacje między tymi elementami. W pierwszej chwili myślałem, że zaglądam nie do tej pracy, co trzeba.
Mam jednak nastepujące zastrzeżenie: spis jest w gruncie rzeczy *nadkompletny*. Nie powinno się zamieszczać w literaturze odsyłaczy do prac, do których nie ma nawiązania w tekście. W tym przypadku 19 z 65 cytowanych prac nie pojawia się nigdzie w tekście, nawet w omówieniu historii tematyki, w każdym razie ja

nie potrafiłem ich znaleźć ([4], [5], [6], [16], [20], [21], [24], [30], [36], [38], [39], [42], [47], [51], [56], [59], [61], [62], [63])
Autorka stosuje adekwatne do postawionych problemów metody badawcze, odwołując się przy tym do dużego zasobu wiedzy, jaka została nagromadzona w tematyce. Sformułowania Twierdzeń są na ogół jasne i precyzyjne (pomijając niezbyt gramatyczne sformułowanie Twierdzenia 6).
Jedno zastrzeżenie: w Streszczeniu Autorka deklaruje, że w Rozdziale 2 będzie pokazane, że jedna transpozycja wstęg generuje normalnie grupę $\mathcal{M}(N_{g,n})$. To jest zwodnicze, bo jednak potrzebne będzie założenie $g \geq 7$ i nie powinno się tak pisać nawet w skrótowym przedstawieniu wyników.
Autorka przedstawia swoją argumentację w sposób kompletny i możliwy do prześledzenia, przy pewnym natężeniu uwagi. Tylko sporadycznie musiałem poświęcić nieco wysiłku na samodzielne wypełnienie brakujących szczegółów dowodów. Zresztą za każdym razem okazywało się, że Autorka może i słusznie pominęła szczegóły, bo były one naprawdę proste.

Wniosek końcowy
Uważam, że praca pani magister Marty Leśniak spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie pani magister Leśniak do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

P. Traczyk