Autoreferat

1. Imię i nazwisko: **Jacek Gulgowski**

2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe:

- dyplom magistra informatyki, Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki, Politechnika Gdańska, 1996;
- dyplom magistra matematyki, Uniwersytet Gdański, Wydział Matematyki i Fizyki, 1997;
- stopień doktora matematyki, Uniwersytet Gdański, Wydział Matematyki i Fizyki, 2002; tytuł rozprawy: *Bifurkacje rozwiązań nieliniowych zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych zwyczajnych*, promotor – doc. dr hab. Tadeusz Pruszko.

3. Dotychczasowe zatrudnienie w jednostkach naukowych:

- Stanowisko asystenta w Instytucie Matematyki na Wydziale Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Gdańskiego w latach 1997-2002;
- Stanowisko adiunkta w Instytucie Matematyki na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego od roku 2002;

4. Osiągnięcie wynikające z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki stanowi jednotematyczny cykl publikacji pod tytułem:

„Wybrane zagadnienia teorii funkcji o wahaniu ograniczonym".

Lista publikacji wchodzących w skład ww. osiągnięcia:

[H1] Dariusz Bugajewski, Jacek Gulgowski, Piotr Kasprzak, *On continuity and compactness of some nonlinear operators in the spaces of functions of bounded variation*, Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923 -), **195** (2016), 1513–1530, DOI 10.1007/s10231-015-0526-7.

[H2] Dariusz Bugajewski, Jacek Gulgowski, Piotr Kasprzak, *On integral operators and nonlinear integral equations in the spaces of functions of bounded variation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **444**, Issue 1 (2016), 230-250.

[H3] Dariusz Bugajewski, Klaudiusz Czudek, Jacek Gulgowski, Jędrzej Sadowski, *On some nonlinear operators in ΛBV-spaces*, Journal of Fixed Point Theory and Applications, **19** (4), (2017), 2785-2818, doi 10.1007/s11784-017-0450-0.

[H4] Jacek Gulgowski, *On integral bounded variation*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales Serie A, Matematicas, (2018) DOI: 10.1007/s13398-017-0482-8.

[H5] Jacek Gulgowski, *Bounded variation solutions to Sturm-Liouville problems*, Electronic Journal of Differential Equations, **2018** (2018), No. 08, 1–13.

[H6] Jacek Gulgowski, *Uniform continuity of nonautonomous superposition operators in ΛBV-spaces*, Forum Mathematicum, (2019), DOI: 10.1515/forum-2018-0214.

Poniżej znajduje się omówienie wyników osiągniętych w ww. pracach wraz z ich zastosowaniami.

4.1. Wstęp

Definicja wahania funkcji sięga XIX-go wieku i poprzez lata, które minęły od jej podania znalazła rozliczne zastosowania w różnych gałęziach matematyki oraz innych nauk. Warto tu przede wszystkim zauważyć, że wahanie funkcji służy do naturalnego opisu przestrzeni sprzężonej do przestrzeni funkcji ciągłych na zwartym przedziale $C[a,b]$ z normą zbieżności jednostajnej; pamiętać należy również o całce Riemanna-Stieltjesa i jej wpływie na rachunek prawdopodobieństwa i teorię miary. Wymienione tu zastosowania – jak również wiele innych – oraz ciekawe jej własności – powodują, że przestrzeń BV funkcji o wahaniu ograniczonym jest ważnym obiektem licznych badań.

Mimo że przestrzeń BV jest znana i wykorzystywana od wielu lat, badanie jej jest trudne – i ciągle związanych z nią jest wiele pytań, na które nie znamy odpowiedzi: pewne otwarte problemy związane z tą przestrzenią zostaną wymienione poniżej. Dodatkowo warto zaznaczyć, że oryginalne pojęcie wahania funkcji zostało na różne sposoby uogólnione. Należy tu również zauważyć, że pojęcie wahania funkcji uogólnia się również na funkcje wielu zmiennych – my ograniczymy się tu jednak do przypadku jednowymiarowego. Kilka z tych (jednowymiarowych) uogólnień wymienimy i szczegółowo zdefiniujemy poniżej – na razie ograniczymy się do wypisania tych najszerzej znanych:

- klasyczne wahanie w sensie Jordana (wspomniane powyżej);
- p-wahanie w sensie Wienera, dla $p \in [1, +\infty)$;
- ϕ-wahanie w sensie Younga (zdefiniowane dla odpowiedniej funkcji $\phi\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$);
- Λ-wahanie w sensie Watermana (dla odpowiedniego ciągu $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach należących do $(0,+\infty)$);
- q-całkowe p-wahanie (dla $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$, zdefiniowane w latach 70 XX wieku w pracach Brudnyi'a oraz Terehina).

Wszystkie powyższe pojęcia są dobrym punktem wyjścia do zdefiniowania odpowiednich przestrzeni funkcyjnych – w dalszym ciągu, mówiąc o przestrzeni funkcji o wahaniu ograniczonym, będziemy mieli na myśli jedną z przestrzeni tego typu (szczegółowe definicje tych przestrzeni pojawią się w Rozdziale 4.2). Przestrzenie te mogą znaleźć różnorodne zastosowania: przede wszystkim bardzo często możemy naturalnie założyć, że rozwiązania pewnych zagadnień są funkcjami o ograniczonym wahaniu: warto tu zwrócić uwagę na prace [12] oraz [34], w których autorzy zajmują się rozwiązaniami o ograniczonym wahaniu równań Volterry, opisujących – w szczególności – modele zachowania populacji, w których prawdopodobieństwo śmierci zależy od wieku. Ważna grupa zastosowań obejmuje również analizę, przetwarzanie i odtwarzanie obrazów ([17,18,26,31,51]). Warto wspomnieć tu również istotny wpływ pojęcia wahania funkcji na teorię szeregów Fouriera ([56]) oraz geometryczną teorię miary ([4]). Przestrzenie funkcji o ograniczonym wahaniu w naturalny sposób pojawiają się również w teorii aproksymacji ([15,21,27]).

Pomimo licznych, wspomnianych wyżej zastosowań, badanie przestrzeni funkcji o wahaniu ograniczonym napotyka na wiele trudności. Poszukując w tych przestrzeniach rozwiązań odpowiednich zagadnień napotykamy problemy, takie jak trudności w opisie ciągłości operatorów superpozycji czy też w opisie zwartości zbiorów oraz odwzorowań. Są to zapewne powody, dla których klasyczne metody analizy nieliniowej (takie jak teoria stopnia czy pewne twierdzenia o punktach stałych) nie znalazły do tej pory zastosowań w poszukiwaniu rozwiązań równań całkowych, będących funkcjami o ograniczonym wahaniu.

Przyjrzyjmy się teraz pokrótce temu jak wyglądał stan naszej wiedzy w roku 2013, to znaczy wtedy gdy zająłem się problemem operatorów superpozycji w przestrzeniach funkcji o wahaniu ograniczonym. Podstawowym źródłem informacji na ten temat może być, wydana w roku 2014, monografia [5]. We wstępie do niej znajdujemy m.in. trzy podstawowe problemy związane z nieautonomicznymi operatorami superpozycji działającym w przestrzeniach funkcji o wahaniu ograniczonym w sensie Jordana (cytuję za stroną 6 z książki [5]):

- *Give conditions on h, possibly both necessary and sufficient, under which $h \circ f \in BV([a,b])$ for all $f \in BV([a,b])$, which means that the operator C_h maps the space BV into itself;*

- *Give conditions on h, possibly both necessary and sufficient, under which the operator C_h is bounded in the norm $\|\cdot\|_{BV}$;*

- *Give conditions on h, possibly both necessary and sufficient, under which the operator C_h is continuous in the norm $\|\cdot\|_{BV}$.*

W powyższym cytacie C_h oznacza nieautonomiczny operator superpozycji generowany przez funkcję h, zgodnie z Definicją 9 podaną poniżej.

Podobne pytania można postawić również dla operatorów autonomicznych – przy czym dla dwóch pierwszych pytań odpowiedzi są dobrze znane (por. wyniki z pracy [29] oraz wstęp do monografii [5]) – jednak dla trzeciego z wymienionych zagadnień nie znaliśmy wówczas, w ogólności, satysfakcjonującego rozwiązania. Spośród rozwiązań częściowych należy na pewno wymienić wyniki podane w pracach [7, 40] – podające warunki konieczne i dostateczne na to by operator superpozycji był lokalnie lipschitzowski. Przegląd wszystkich wyników znaleźć można we wspomnianej monografii [5], szczególnie w Rozdziałach 5 oraz 6, a także w artykule przeglądowym [6] z roku 2011.

Rolę operatora superpozycji w analizie nieliniowej najlepiej ocenić patrząc na klasyczne równania całkowe Hammersteina

$$x(t) = g(t) + \int_0^1 k(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,1], \tag{1}$$

oraz Volterry-Hammersteina:

$$x(t) = g(t) + \int_0^t k(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,1], \tag{2}$$

Standardowe metody analizy nieliniowej stosowane przy rozwiązywaniu zagadnień tego typu rozpoczynają się od następującego diagramu:

$$E \supset V \xrightarrow{\quad F \quad} E_1 \xrightarrow{\quad T \quad} E.$$

Spojrzenie takie pozwala nam na przedstawienie problemów (1) oraz (2) jako równań operatorowych

$$x = g + TF(x), \tag{3}$$

gdzie E jest odpowiednią przestrzenią funkcji o wahaniu ograniczonym, $F : V \to E_1$ jest operatorem superpozycji generowanym przez funkcję f (autonomicznym bądź nieautonomicznym), zaś $T : E_1 \to E$ jest operatorem całkowym z jądrem k.

Oczywiście bardzo istotny jest tu wybór odpowiedniej przestrzeni E_1: dobrze byłoby gdyby oba odwzorowania F i T były ciągłe, ale byłoby również dobrze móc posłużyć się jakimś argumentem związanym ze zwartością – na przykład gdy odwzorowanie T jest pełnociągłe, to możemy zastosować teorię stopnia Leray-Schaudera lub twierdzenie Schaudera o punkcie stałym. Niestety, bezpośrednie zastosowanie takich argumentów nie było możliwe – przede wszystkim ze względu na brak twierdzeń, które gwarantowałyby ciągłość operatora superpozycji F oraz takich, które gwarantowałyby pełnociągłość operatora całkowego T. W związku z tym znane do tej pory wyniki dotyczące istnienia rozwiązań zagadnień (1) oraz (2) w przestrzeniach funkcji o wahaniu ograniczonym prowadziły – prędzej czy później – do twierdzenia Banacha o kontrakcji (Rozdział 7 monografii [5], również artykuł [14]).

Poniżej przedstawione zostaną wyniki, które rozwiązują sporo z wymienionych wyżej problemów (przynajmniej częściowo).

4.2. Oznaczenia i podstawowe definicje

Zbiory dodatnich oraz nieujemnych liczb całkowitych oznaczane są odpowiednio jako $\mathbb{N}$ oraz $\mathbb{N}_0$. Symbolem I oznaczamy przedział jednostkowy $[0,1]$. Kulę otwartą w przestrzeni unormowanej E, o środku z punkcie x i promieniu $r \in (0,+\infty)$ oznaczamy symbolem $B_E(x,r)$. Norma w przestrzeni unormowanej E oznaczana będzie jako $\|\cdot\|_E$.

Tradycyjnie, symbolem $L^p(J)$ oznaczamy przestrzeń Banacha klas równoważności funkcji rzeczywistych, całkowalnych w sensie Lebesgue'a z p-tą potęgą, gdzie $p \in [1, +\infty)$, i określonych na ograniczonym przedziale $J \subseteq \mathbb{R}$.

Poniżej przestawię kilka podstawowych definicji oraz faktów, z których korzystać będziemy poniżej, a związanych z funkcjami o wahaniu ograniczonym.

Definicja 1. *Niech $x\colon I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą zadaną na przedziale I. Wartość*

$$\operatorname{var} x = \sup \sum_{i=1}^{n} |x(t_i) - x(t_{i-1})|,$$

gdzie supremum brane jest po wszystkich skończonych podziałach $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ przedziału I, nazywamy wahaniem w sensie Jordana *(lub, po prostu,* wahaniem*) funkcji x na przedziale I. Jeśli zamiast przedziału I weźmiemy inny przedział $[a, b]$, to wahanie funkcji $x\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ na przedziale $[a, b]$ oznaczane jest symbolem $\operatorname{var}(x, [a, b])$.*

Definicja 2. *Niech $p \in (1, +\infty)$ oraz $x\colon I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą zadaną na przedziale I. Wartość*

$$\operatorname{var}_p x = \sup \sum_{i=1}^{n} |x(t_i) - x(t_{i-1})|^p,$$

gdzie supremum brane jest po wszystkich skończonych podziałach $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ przedziału I, nazywamy p-wahaniem *lub* p-wahaniem w sensie Wienera *funkcji x na przedziale I.*

Definicja 3. *Mówimy, że funkcja $\phi\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ jest* ϕ-funkcją *jeśli jest ciągła, nieograniczona, niemalejąca oraz $\phi(u) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $u = 0$.*

Odwołując się do pojęcia ϕ-funkcji możemy zdefiniować wahanie w sensie Younga.

Definicja 4. *Niech $x\colon I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą zadaną na przedziale I i taką, że $x(0) = 0$ oraz niech ϕ będzie zadaną ϕ-funkcją. Wartość*

$$\operatorname{var}_\phi x = \sup \sum_{i=1}^{n} \phi(|x(t_i) - x(t_{i-1})|),$$

gdzie supremum brane jest po wszystkich skończonych podziałach $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ przedziału I, nazywamy ϕ-wahaniem *(lub* wahaniem w sensie Younga*) funkcji x na przedziale I.*

Zdefiniujmy teraz Λ-wahanie funkcji $x\colon I \to \mathbb{R}$. Pojęcie to zostało wprowadzone przez Watermana w pracy [56]. Od tego momentu funkcje o ograniczonym Λ-wahaniu były intensywnie badane przez licznych autorów (np. [43–47, 57], do przeglądu wyników związanych z tym wahaniem ponownie odsyłam do monografii [5]).

Definicja 5. *Niech $\Lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie niemalejącym ciągiem dodatnich liczb rzeczywistych. Ciąg taki nazywamy* ciągiem Watermana *jeśli*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty.$$

Jeśli dodatkowo $\lambda_n \to +\infty$ gdy $n \to +\infty$, to ciąg taki nazywamy właściwym.

Definicja 6. *Niech $\Lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem Watermana i niech dana będzie funkcja $x\colon I \to \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja x jest funkcją o ograniczonym Λ-wahaniu gdy istnieje dodatnia stała M taka, że dla dowolnego skończonego ciągu podprzedziałów domkniętych o parami rozłącznych wnętrzach $\{[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n]\}$ przedziału I, zachodzi następująca nierówność*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|x(b_i) - x(a_i)|}{\lambda_i} \leqslant M.$$

Kres górny powyższych sum, wzięty po rodzinie wszystkich skończonych ciągów podprzedziałów I o parami rozłącznych wnętrzach, nazywamy Λ-wahaniem funkcji x i oznaczamy symbolem $\operatorname{var}_\Lambda(x)$.

Znanych jest wiele równoważnych sposobów wyrażenia tego, że funkcja $x\colon I \to \mathbb{R}$ ma ograniczone Λ-wahanie (np. [57, Theorem 1, p. 34] oraz [H3, Lemma 1]) – nie będziemy tu jednak wchodzić w szczegóły związane z tą kwestią.

Wspomniane powyżej rodzaje wahania funkcji (w sensie Jordana, Wienera, Younga oraz Watermana) zadane są „punktowo" co oznacza, że nie możemy stosować ich bezpośrednio w przestrzeniach $L^q(I)$ funkcji całkowalnych. Jednak i w tej klasie przestrzeni możemy stosować podobne metody. Punktem wyjścia jest w tym wypadku klasyczne pojęcie L^q-modułu ciągłości (np. [60]) dla $q \in [1, +\infty)$.

Definicja 7. *Załóżmy, że $x\colon I \to \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną w sensie Lebesgue'a zaś $[a,b] \subset I$ jest ustalonym przedziałem, $a < b$. Wartość*

$$\omega_q(x;a,b) = \sup_{0<h<b-a} \Big(\int_a^{b-h} |x(t+h) - x(t)|^q \mathrm{d}t\Big)^{1/q} = \sup_{0<h<b-a} \|x(\cdot+h) - x(\cdot)\|_{L^q(a,b-h)}$$

nazywamy L^q-modułem ciągłości funkcji x na przedziale $[a,b]$.

Zdefiniujmy teraz wahanie całkowe dla funkcji mierzalnej, wprowadzone przez Terehina ([52]).

Definicja 8. *Niech $p, q \in [1, +\infty)$ zaś $x\colon I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną w sensie Lebesgue'a. Wartość*

$$\operatorname{ivar}_p^q(x) = \sup\Big(\sum_{i=1}^N (\omega_q(x;t_{i-1},t_i))^p\Big)^{1/p},$$

gdzie supremum brane jest po wszystkich skończonych podziałach $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ przedziału I, nazywamy q-całkowym p-wahaniem funkcji x. Jeżeli $\operatorname{ivar}_p^q(x;a,b) < +\infty$, to mówimy, że funkcja x jest funkcją o ograniczonym q-całkowym p-wahaniu. Zbiór wszystkich takich funkcji będziemy oznaczać symbolem IBV_p^q.

Definicja q-całkowego p-wahania została podana przez Terehina ([52], pewne uogólnienia tego pojęcia znaleźć można w pracach [10, 11], wersje wielowymiarowe dostępne są w [53–55] oraz [15, 16]). Przestrzenie te były rozważane w kontekście teorii aproksymacji, lecz nie z perspektywy równań całkowych czy nieliniowych operatorów superpozycji.

Wiadomo, że następujące przestrzenie liniowe funkcji o wahaniu ograniczonym, wyposażone w odpowiednią normę, są przestrzeniami Banacha:

- $BV = \{x\colon I \to \mathbb{R} : \operatorname{var} x < +\infty\}$ z normą $\|x\|_{BV} = |x(0)| + \operatorname{var} x$;
- $BV_p = \{x\colon I \to \mathbb{R} : \operatorname{var}_p x < +\infty\}$ z normą $\|x\|_{BV_p} = |x(0)| + (\operatorname{var}_p x)^{1/p}$;
- $BV_\phi = \{x\colon I \to \mathbb{R} : x(0) = 0 \text{ i } \operatorname{var}_\phi(\lambda x) < +\infty \text{ dla pewnego } \lambda > 0\}$ z normą $\|x\|_\phi = \inf\{\lambda > 0 : \operatorname{var}_\phi(x/\lambda) \leqslant 1\}$;
- $\Lambda BV = \{x\colon I \to \mathbb{R} : \operatorname{var}_\Lambda x < +\infty\}$ z normą $\|x\|_\Lambda := |x(0)| + \operatorname{var}_\Lambda x$
- $IBV_p^q = \{x\colon I \to \mathbb{R} : \operatorname{ivar}_p^q(x) < +\infty\}$ z normą $\|x\|_{IBV_p^q} = \|x\|_{L^q} + \operatorname{ivar}_p^q(x)$;

(por. [5; 11, Theorem 4; 42, Theorem 3.21; 57, Section 3]).

Funkcje należące do wymienionych powyżej przestrzeni są mierzalne w sensie Lebesgue'a. Wiadomo również, że wszystkie funkcje należące do przestrzeni $E \in \{BV, BV_p, BV_\phi, \Lambda BV\}$ są ograniczone i dla każdej z tych przestrzeni E istnieje stała $c_E > 0$, taka że $\|x\|_\infty \leqslant c_E \|x\|_E$ dla każdego $x \in E$ ($\|x\|_\infty$ oznacza tutaj normę supremum funkcji ograniczonej x).

Przy okazji omawiania przestrzeni ΛBV warto wspomnieć, że przestrzenie te – dla różnych ciągów Watermana – można w naturalny sposób porównywać. Mianowicie, dla dwóch ciągów Watermana $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $\Gamma = (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relacja $\Gamma < \Lambda$, oznacza

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda_n} = 0.$$

Łatwo można pokazać, że jeśli $\Gamma < \Lambda$, to

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_j^n \frac{1}{\lambda_j}}{\sum_j^n \frac{1}{\gamma_j}} = 0,$$

co oznacza, że $\Gamma BV \subsetneq \Lambda BV$ ([43, Theorem 3]).

4.3. Operatory superpozycji

Przywołajmy teraz definicję nieliniowych operatorów superpozycji.

Definicja 9. *Załóżmy, że $g\colon I \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją.*

(a) Niech $f\colon I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Operator

$$F(g)(u):=f(u,g(u)), \tag{4}$$

gdzie $g\colon I\to\mathbb{R}$ jest dowolną funkcją, nazywamy nieautonomicznym operatorem superpozycji generowanym przez funkcję f.

(b) Niech $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Operator

$$F(g)(u):=f(g(u)), \tag{5}$$

gdzie $g\colon I\to\mathbb{R}$ jest dowolną funkcją,nazywamy autonomicznym operatorem superpozycji generowanym przez funkcję f.

Operatory superpozycji rozpatrywane w kontekście funkcji o wahaniu ograniczonym prowadzą do wielu nietrywialnych problemów. Na początku lat 80-tych XX-go wieku Josephy udowodnił ważne twierdzenie w tej tematyce

Twierdzenie 10 ([29]). *Autonomiczny operator superpozycji F dany wzorem* (5) *przekształca przestrzeń BV w siebie wtedy i tylko wtedy gdy jego generator $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest funkcją lokalnie lipschitzowską.*

Twierdzenie to podaje tzw. *acting conditions* dla autonomicznych operatorów superpozycji w przestrzeni funkcji o wahaniu ograniczonym w sensie Jordana. Z kolei przypadek nieautonomiczny jest dużo bardziej złożony (zob. dyskusję w Rozdziale 6 monografii [5] oraz artykuł Maćkowiaka [37]). Warunki konieczne i dostateczne dla nieautonomicznego operatora superpozycji odwzorowującego przestrzeń funkcji o ograniczonym wahaniu w sensie Jordana w siebie zostały podane przez Bugajewską *et al.* w pracy [13]. Autorzy podali w nim następujące Twierdzenie:

Twierdzenie 11 ([13]). *Niech $f\colon[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie daną funkcją. Następujące warunki są równoważne:*

1. *nieautonomiczny operator superpozycji F, generowany przez f, odwzorowuje przestrzeń BV w siebie i jest lokalnie ograniczony;*
2. *dla każdego $r>0$ istnieje stała $M_r>0$ taka, że dla każdego $k\in\mathbb{N}$, dowolnego skończonego podziału $0=t_0<\ldots<t_k=1$ przedziału $[0,1]$ oraz dowolnego skończonego ciągu $u_0,u_1,\ldots,u_k\in[-r,r]$ spełniającego warunek $\sum_{i=1}^k|u_i-u_{i-1}|\leqslant r$, zachodzą następujące nierówności*

$$\sum_{i=1}^k|f(t_i,u_i)-f(t_{i-1},u_i)|\leqslant M_r \quad i \quad \sum_{i=1}^k|f(t_{i-1},u_i)-f(t_{i-1},u_{i-1})|\leqslant M_r.$$

Z kolei problem lokalnej ograniczoności został w interesujący sposób rozwiązany w pracy [30]. W każdym razie problem *acting conditions* oraz problem lokalnej ograniczoności operatorów superpozycji w przestrzeniach funkcji o wahaniu ograniczonym (tj. dwa pierwsze problemy wymienione we wstępie do monografii [5]) nie były głównym przedmiotem moich rozważań (chociaż problem *acting conditions* rozważałem w przestrzeniach funkcji o ograniczonym q-całkowym p-wahaniu –

por. Twierdzenie 22 poniżej). W moich badaniach skupiłem się na trzecim z wymienionych problemów tj. na ciągłości operatora superpozycji w różnych przestrzeniach typu BV.

Z problemem ciągłości operatora superpozycji w przestrzeniach funkcji o ograniczonym wahaniu zetknąłem się po raz pierwszy podczas konferencji zorganizowanej z okazji urodzin Profesora Kazimierza Gęby na Politechnice Gdańskiej, we wrześniu 2013 roku. Podczas konferencji wysłuchałem wykładu prof. Dariusza Bugajewskiego z Uniwersytetu Adama Mickiewicza w Poznaniu po czym odbyłem z nim interesującą dyskusję. Spotkanie to okazało się być owocnym – pierwszym owocem, który otrzymaliśmy było, podane poniżej, Twierdzenie 12 podające warunki dostateczne na ciągłość autonomicznego operatora superpozycji w przestrzeni BV – dla generatorów klasy C^1. Wynik ten został później opublikowany w pracy [H1].

Ku naszemu zdziwieniu, podczas pracy nad pierwszym artykułem (tzn. [H1]), odkryliśmy, że bardzo duży krok do opisu ciągłości operatora superpozycji w przestrzeni BV wykonany był kilka dekad wcześniej! Ciągłość nieautonomicznego operatora superpozycji w przestrzeni BV badana była przez Morse'a w latach 30-tych XX-go wieku. W pracy [41] autor udowodnił, że jeśli generator f może zostać przedstawiony za pomocą funkcji odpowiedniej regularności, to nieautonomiczny operator superpozycji, generowany przez funkcję f działa na przestrzeni BV w sposób ciągły ([41, Theorem 7.1]). Interesująca obserwacją jest to, że autonomiczny, lokalnie lipschitzowski, generator spełnia założenia Morse'a – stąd wszystkie autonomiczne operatory superpozycji, spełniające *acting conditions* podane przez Josephy'ego, są również ciągłe. Przypadek nieautonomiczny pozostaje jednak otwarty, nawet po „ponownym odkryciu" wyników Morse'a – podane przez niego warunki nie są koniecznymi dla ciągłości (co zaznaczyliśmy w pracy [H1]). W związku z wynikami Morse'a warto również zaznaczyć, że dowód podanego przez niego twierdzenia jest dalece nietrywialny i jego zrozumienie wymaga uważnego wczytania się we wszystkie fakty podane w tej technicznej, czterdziestostronicowej, pracy. Z drugiej strony dowody podane przez nas są zupełnie inne, dużo krótsze i bardziej czytelne.

Pierwszym twierdzeniem z tej serii jest:

Twierdzenie 12 ([H1, Theorem 2]). *Załóżmy, że $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją mającą ciągłą pochodną. Wówczas autonomiczny operator superpozycji $F\colon BV \to BV$ generowany przez funkcję f jest ciągły.*

Podany w pracy dowód jest zupełnie inny od technik stosowanych wcześniej przy rozwiązywaniu problemów związanych z operatorami superpozycji w przestrzeniach typu BV i odwołuje się do pewnych własności aproksymacyjnych wielomianów Bernsteina. Jak wspomniałem uprzednio dowód ten nie obejmuje ogólnej sytuacji operatorów autonomicznych lecz jest niezwykle elementarny – w szczególności w porównaniu z metodami Morse'a. Ostatnio również wspomniany przypadek ogólny dla operatorów autonomicznych został rozwiązany elementarnymi metodami (i to zupełnie innymi niż te zastosowane w pracy [H1]) – szczegóły znaleźć można w pracy Maćkowiaka [38].

Okazało się, że wynik podobny do Twierdzenia 12 można podać również dla szerszej klasy operatorów $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kosztem osłabienia topologii w przeciwdziedzinie.

Twierdzenie 13 ([H1, Theorem 3]). *Załóżmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest absolutnie ciągła na każdym zwartym przedziale zawartym w $\mathbb{R}$. Załóżmy również, że istnieje takie $q \in (1, +\infty)$, że $f' \in L^q[-a,a]$ dla każdego $a > 0$. Wówczas autonomiczny operator superpozycji $F\colon BV \to BV_p$ jest ciągły, gdzie p jest liczbą sprzężoną do q, tzn. $p^{-1} + q^{-1} = 1$.*

Możemy również przejść do ogólniejszej sytuacji ϕ-wahania. Na początek przypomnijmy kilka faktów związanych z pojęciem *modułu ciągłości* funkcji.

Definicja 14 ([36, p. 41]). *Funkcję $\omega\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ nazywamy* modułem ciągłości, *jeśli jest niemalejąca, subaddytywna, ciągła oraz $\omega(0) = 0$.*

Definicja 15 ([8, p. 406]). *Moduł ciągłości ω jest* modułem ciągłości funkcji $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$, *gdy $|f(t) - f(s)| \leqslant \omega(\delta)$ dla wszystkich punktów t, s in $[-a,a]$ spełniających $|t-s| \leqslant \delta$.*

Dowód następującego twierdzenia dotyczącego ϕ-wahania wywodzi się z podobnego pomysłu jak dowody Twierdzeń 12 oraz 13 (w twierdzeniu tym $B_n^a(f)$ oznacza n-ty wielomian Bernsteina funkcji f na przedziale $[-a,a]$).

Twierdzenie 16 ([H1, Theorem 4]). *Załóżmy, że $\omega\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ jest wklęsłym, nieograniczonym i ściśle rosnącym modułem ciągłości ciągłej funkcji $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$, zaś przez ϕ oznaczmy funkcję $\phi\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ daną wzorem $\phi(s) = \left[\omega^{-1}(\frac{1}{5}s)\right]^p$, gdzie $p > 1$. Niech, dodatkowo, F oraz F_n oznaczają autonomiczne operatory superpozycji o generatorach, odpowiednio, f i $B_n^a(f)$, odwzorowujące kulę $B_{BV}(0,a)$ w pewien podzbiór przestrzeni $B(I)$ funkcji ograniczonych złożony z funkcji o ograniczonym ϕ-wahaniu. Wówczas $\mathrm{var}_\phi[F(x) - F_n(x)] \to 0$ jednostajnie ze względu na $x \in B_{BV}(0,a)$.*

W pracy [H3] podobne wyniki zostały udowodnione dla operatorów superpozycji działających w przestrzeniach ΛBV

Twierdzenie 17 ([H3, Theorem 9]). *Załóżmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną. Wówczas autonomiczny operator superpozycji $F\colon \Lambda BV \to \Lambda BV$, generowany przez funkcję f, jest ciągły.*

W przypadku przestrzeni BV zauważyliśmy, że operator superpozycji generowany przez funkcję, która niekoniecznie jest lokalnie lipschitzowska, działa z przestrzeni BV do pewnej większej przestrzeni. W przypadku przestrzeni ΛBV obserwacja ta prowadzi do kilku interesujących pytań. Na część z nich udało się nam odpowiedzieć w formie poniższych twierdzeń.

Twierdzenie 18 ([H3, Theorem 10]). *Jeżeli $\Gamma < \Lambda$ są ciągami Watermana zaś $F : \Lambda BV \to \Gamma BV$ jest autonomicznym operatorem superpozycji generowanym przez $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, to f jest funkcją stałą.*

Twierdzenie 19 ([H3, Theorem 12]). *Jeżeli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, F jest autonomicznym operatorem superpozycji, generowanym przez f zaś Λ jest ciągiem Watermana, to wówczas istnieje taki ciąg Watermana Γ, że operator autonomiczny $F\colon \Lambda BV \to \Gamma BV$ jest ciągły.*

Dla nieautonomicznych operatorów superpozycji udało mi się udowodnić twierdzenie o jednostajnej ciągłości operatorów superpozycji w przestrzeniach ΛBV – założenia tego twierdzenia obejmują m.in. generatory $f \in C^1((-a, 1+a) \times \mathbb{R})$ dla pewnego $a > 0$.

Twierdzenie 20 ([H6, Theorem 2]). *Załóżmy, że $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia następujące założenia*

(C1) *istnieje funkcja różnowartościowa $\phi \in \Lambda BV$ spełniająca:*

(a) $\exists\, m > 0 \quad \forall\, t,s \in I,\ t \neq s \quad \left|\frac{f(t,0)-f(s,0)}{\phi(t)-\phi(s)}\right| \leqslant m$

(b) $\forall\, M > 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, v,w \in [-M,M] \quad \forall\, t,s \in I,\ t \neq s$

$$|v-w| \leqslant \delta \Rightarrow \left|\frac{f(t,v)-f(s,v)}{\phi(t)-\phi(s)} - \frac{f(t,w)-f(s,w)}{\phi(t)-\phi(s)}\right| \leqslant \varepsilon$$

(C2) *dla dowolnego $t \in I$ funkcja $u \mapsto f(t,u)$ posiada ciągłą pochodną na $\mathbb{R}$ oraz*

(a) *funkcje $\frac{\partial f}{\partial u}(t,\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są jednostajnie ciągłe na zwartych podzbiorach ze względu na u, jednostajnie ze względu na t, to znaczy*

$$\forall\, M > 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, v,w \in [-M,M] \quad \forall\, t \in I$$

$$|v-w| \leqslant \delta \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial u}(t,v) - \frac{\partial f}{\partial u}(t,w)\right| \leqslant \varepsilon$$

(b) *pochodna $\frac{\partial f}{\partial u}\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest lokalnie ograniczona, to znaczy*

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, L_M > 0 \quad \forall\, t \in I \quad \forall\, v \in [-M,M] \quad \left|\frac{\partial f}{\partial u}(t,v)\right| \leqslant L_M.$$

Wówczas nieautonomiczny operator superpozycji $F\colon \Lambda BV \to \Lambda BV$ generowany przez funkcję f jest jednostajnie ciągły na ograniczonych podzbiorach ΛBV.

Warunki dostateczne na jednostajną ciągłość nieautonomicznego operatora superpozycji w przestrzeni ΛBV sformułowaliśmy również z innej perspektywy. Na funkcję $f\colon I\times[-M,M]\to\mathbb{R}$ możemy spoglądać jako na generator pewnej krzywej $\mathcal{F}\colon I\to E$ w odpowiedniej przestrzeni funkcyjnej E. Okazuje się, że warunki na jednostajną ciągłość operatora superpozycji F (na ograniczonych podzbiorach ΛBV) mogą być sformułowane w terminach własności tej krzywej.

Twierdzenie 21 ([H6, Theorem 3]). *Załóżmy, że funkcja $f\colon I\times[-M,M]\to\mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:*

(D1) *funkcja f jest ciągła;*

(D2) *dla dowolnego $t\in I$ funkcja $[-M,M]\ni u\mapsto f(t,u)$ ma ciągłą pochodną;*

(D3) *odwzorowanie $\mathcal{L}\colon I\to \mathrm{Lip}[-M,M]$ dane wzorem $\mathcal{L}(t)=f(t,\cdot)$ jest ciągłe;*

(D4) *odwzorowanie $\mathcal{F}\colon I\to C[-M,M]$ dane wzorem $\mathcal{F}(t)=f(t,\cdot)$ ma ograniczone Λ-wahanie tzn. $\mathrm{var}_\Lambda^{C[-M,M]}(\mathcal{F})<+\infty$;*

(D5) *odwzorowanie $\mathcal{F}\colon I\to C[-M,M]$ dane wzorem $\mathcal{F}(t)=f(t,\cdot)$ ma Λ-wahanie Wienera równe 0, tzn. $W_\Lambda^{C[-M,M]}(\mathcal{F})=0$.*

Wówczas nieuatonomiczny operator superpozycji $F\colon \overline{B_{\Lambda BV}(0,\tilde{M})}\to\Lambda BV$ generowany przez funkcję f jest jednostajnie ciągły.

Wahania $\mathrm{var}_\Lambda^{C[-M,M]}$ oraz $W_\Lambda^{C[-M,M]}$ występujące w warunkach (D4) oraz (D5) oznaczają odpowiednio Λ-wahanie oraz Λ-wahanie Wienera funkcji *o wartościach w przestrzeni Banacha*. Odpowiednie definicje znaleźć można w pracy [H6].

W przestrzeni funkcji o ograniczonym q-całkowym p-wahaniu rozpatrywaliśmy również problem *acting conditions.*

Twierdzenie 22 ([H4, Theorem 3]). *Funkcja borelowska $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ generuje autonomiczny operator superpozycji $F\colon IBV_1^q\to IBV_1^q$ wtedy i tylko wtedy gdy f spełnia globalny warunek Lipschitza.*

4.4. Operatory całkowe

Rozważmy teraz liniowe operatory $K\colon E\to E$ postaci

$$Kx(t)=\int_0^1 k(t,s)x(s)\mathrm{d}s,$$

dla $x\in E$, gdzie E jest pewną przestrzenią funkcji o wahaniu ograniczonym. Funkcja $k\colon I\times I\to\mathbb{R}$ (oczywiście spełniająca odpowiednie założenia) nazywana jest *jądrem operatora całkowego K*. Operatory tej postaci w naturalny sposób pojawiają się gdy rozpatrujemy równania całkowe typu Hammersteina (1) .

Poniższe stwierdzenie dotyczące tych odwzorowań mówi, że odwzorowania spełniające pewne naturalne warunki (podane w pracy [14] i gwarantujące ciągłość operatora K) są faktycznie pełnociągłe.

Stwierdzenie 23 ([H1, Proposition 6]). *Niech $p,r\in[1,+\infty)$ oraz załóżmy, że odwzorowanie $k\colon I\times I\to\mathbb{R}$ spełnia założenia*

(a) dla każdego $t\in I$ funkcja $s\mapsto k(t,s)$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a;

(b) funkcja $s\mapsto k(0,s)$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a;

(c) $\mathrm{var}(k(\cdot,s))\leqslant m(s)$ dla p.w. $s\in I$, gdzie $m\colon I\to[0,+\infty)$ jest funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a.

Wówczas operator całkowy $K\colon BV_p \to BV_r$, dany wzorem

$$Kx(t) = \int_0^1 k(t,s)x(s)\mathrm{d}s, \qquad t \in I,\ x \in BV_p, \tag{6}$$

jest pełnociągły.

Następnie podobny rezultat uzyskaliśmy dla przestrzeni ΛBV

Stwierdzenie 24 ([H3, Proposition 4]). *Załóżmy, że $k\colon I \times I \to \mathbb{R}$ spełnia*

(a) dla każdego $t \in I$ funkcja $s \mapsto k(t,s)$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a;

(b) funkcja $s \mapsto k(0,s)$jest całkowalna w sensie Lebesgue'a;

(c) istnieje ciąg Watermana Λ dla którego $\mathrm{var}_\Lambda\,(k(\cdot,s)) \leqslant m(s)$ dla p.w. $s \in I$, gdzie $m\colon I \to [0,+\infty)$ jest funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a.

Wówczas operator K, zadany wzorem

$$Kx(t) = \int_0^1 k(t,s)x(s)\mathrm{d}s \quad t \in I, \quad x \in \Lambda BV, \tag{7}$$

przekształca przestrzeń ΛBV w przestrzeń ΛBV i jest pełnociągły.

Następnie podaliśmy charakteryzację liniowych i ciągłych operatorów całkowych z BV do BV.

Twierdzenie 25 ([H2, Theorem 4]). *Załóżmy, że K jest liniowym operatorem całkowym z jądrem $k\colon I \times I \to \mathbb{R}$, tzn. K dany jest wzorem*

$$Kx(t) = \int_0^1 k(t,s)x(s)\mathrm{d}s, \qquad t \in I. \tag{8}$$

Operator K odwzorowuje przestrzeń BV w siebie w sposób ciągły wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są następujące warunki:

(H1) dla każdego $t \in I$, funkcja $s \mapsto k(t,s)$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a na I;

(H2) istnieje stata $M > 0$ taka, że $\sup\limits_{\xi \in I} \mathrm{var}\left(\int_0^\xi k(\cdot,s)\mathrm{d}s\right) \leqslant M$.

Założenia te są spełnione nawet przez niektóre jądra słabo osobliwe, w szczególności te, które odpowiadają całkowaniu ułamkowego rzędu Riemanna-Liouville'a ([H2, Example 1]). Podobne warunki można podać również dla operatorów całkowych działających z BV do BV_p lub ΛBV.

Twierdzenie 26 ([H2, Theorem 5]). *Załóżmy, że $p \in [1,+\infty)$. Liniowy operator całkowy K zadany wzorem (8) jest ciągłym odwzorowaniem z BV do BV_p wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są następujące warunki:*

(i) dla każdego $t \in I$ funkcja $s \mapsto k(t,s)$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a na I;

(ii) istnieje stała $M > 0$ taka, że $\sup\limits_{\xi \in I} \mathrm{var}_p\left(\int_0^\xi k(\cdot,s)\mathrm{d}s\right) \leqslant M$.

Twierdzenie 27 ([H3, Theorem 14]). *Liniowy operator całkowy K, zadany wzorem (8), jest ciągłym odwzorowaniem z BV do ΛBV wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są następujące warunki:*

(a) dla każdego $t \in I$ funkcja $s \mapsto k(t,s)$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a na I;

(b) istnieje stała $M > 0$ taka, że $\sup\limits_{\xi \in I} \mathrm{var}_\Lambda\left(\int_0^\xi k(\cdot,s)\mathrm{d}s\right) \leqslant M$.

Udało się również podać dwa różne warunki dostateczne na ciągłość operatora całkowego $K : L^q \to IBV_1^q$.

Twierdzenie 28 ([H4, Theorem 1]). *Niech $1 < q < +\infty$ oraz $1/q + 1/q' = 1$. Załóżmy, że funkcja $k\colon I \times I \to \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:*

(a) k jest funkcją mierzalną w sensie Lebesgue'a na $I \times I$;

(b) istnieje taka funkcja $m_0 \in L^{q'}$, że $\|k(\cdot, s)\|_{L^q} \leqslant m_0(s)$ dla p.w. $s \in I$;

(c) istnieje taka funkcja $m \in L^{q'}$, że $\mathrm{ivar}_1^q(k(\cdot, s); 0, 1) \leqslant m(s)$ dla p.w. $s \in I$.

Wówczas liniowy operator całkowy K, o jądrze k, działa z L^q do IBV_1^q i jest ciągły.

Twierdzenie 29 ([H4, Theorem 2]). *Let $1 < q < +\infty$ and $1/q + 1/q' = 1$. Załóżmy, że funkcja $k\colon I \times I \to \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:*

(a) k jest funkcją mierzalną w sensie Lebesgue'a na $I \times I$;

(b) funkcja $s \mapsto k(t, s)$należy do przestrzeni $L^{q'}$ dla p.w. $t \in I$;

(c) $\mathcal{K}_0 = \left(\int_0^1 \|k(t, \cdot)\|_{L^{q'}}^q \, \mathrm{d}t\right)^{1/q} < +\infty$;

(d) $\mathcal{K} = \sup_{\mathcal{I}} \sum_{i=1}^N \sup_{0<h<t_i-t_{i-1}} \left(\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i-h} \left(\int_0^1 |k(t+h, s) - k(t, s)|^{q'} \mathrm{d}s\right)^{q/q'} \mathrm{d}t\right)^{1/q} < +\infty$,

gdzie supremum jest brane po wszystkich skończonych podziałach $\mathcal{I}$ przedziału I. Wówczas liniowy operator całkowy K, o jądrze k, działa z L^q do IBV_1^q i jest ciągły.

Warto zauważyć, że operator całkowy Riemanna-Liouville'a ułamkowego rzędu $\alpha \in (1 - \frac{1}{q}, 1)$ spełnia założenia Twierdzenia 28 ([H4, Theorem 5]).

4.5. Twierdzenia o istnieniu

Jak już zauważyliśmy we wstępie, metody analizy nieliniowej, które związane są z pojęciem zwartości, były praktycznie nieosiągalne w przestrzeniach typu BV zanim pojawiły się wspomniane wyżej wyniki. Poniżej przedstawię kilka obserwacji, które nieco zmieniły krajobraz.

Następujące twierdzenie zostało udowodnione przy pomocy twierdzenia Schaudera o punkcie stałym.

Twierdzenie 30 ([H1, Theorem 5]). *Załóżmy, że jądro $k\colon I \times I \to \mathbb{R}$ oraz nieliniowość $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniają założenia*

1° *$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest taką funkcją ciągłą, że:*

(a) f jest absolutnie ciągła na każdym zwartym podprzedziale $\mathbb{R}$;

(b) istnieje takie $q \in (1, +\infty)$, że $f' \in L^q[-a, a]$ dla każdego $a > 0$;

(c) f jest sub-liniowa, tzn. $\lim_{|u|\to+\infty} |f(u)|/|u| = 0$;

2° *jądro $k\colon I \times I \to \mathbb{R}$spełnia warunki:*

(a) dla każdego $t \in I$ funkcja $s \mapsto k(t, s)$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a;

(b) funkcja $s \mapsto k(0, s)$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a;

(c) $\mathrm{var}\, k(\cdot, s) \leqslant m(s)$ dla p.w. $s \in I$, gdzie $m\colon I \to [0, +\infty)$ jest funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a.

Wówczas istnieje rozwiązanie równania (1) należące do przestrzeni BV.

Podobny wynik podany jest w pracy [H3] dla przestrzeni ΛBV.

Twierdzenie 31 ([H3, Theorem 13]). *Załóżmy, że* $k\colon I \times I \to \mathbb{R}$ *oraz* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *spełniają następujące założenia*

1^0 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest funkcją posiadającą ciągłą pochodną oraz taką, że* f *jest sub-liniowa, tzn.* $\lim_{u\to\infty}|f(u)|/|u| = 0$;

2^0 *jądro* $k\colon I \times I \to \mathbb{R}$ *spełnia warunki:*

(a) dla każdego $t \in I$ *funkcja* $s \mapsto k(t,s)$*jest mierzalna w sensie Lebesgue'a;*

(b) funkcja $s \mapsto k(0,s)$ *jest całkowalna w sensie Lebesgue'a;*

(c) istnieje taki ciąg Watermana Λ, *że* $\mathrm{var}_\Lambda\,(k(\cdot,s)) \leqslant m(s)$ *dla p.w.* $s \in I$, *gdzie* $m\colon I \to [0,+\infty)$ *jest całkowalna w sensie Lebesgue'a.*

Wówczas w przestrzeni ΛBV *istnieje rozwiązanie równania* (1).

Udało nam się również zastosować w dowodzie twierdzenia o istnieniu teorię stopnia Leray'a-Schaudera.

Twierdzenie 32 ([H2, Theorem 6]). *Załóżmy, że* $k\colon I \times I \to \mathbb{R}$ *oraz* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *spełniają następujące założenia:*

(a) $\mathrm{var}\,k(\cdot,s) \leqslant m(s)$ *dla p.w.* $s \in I$, *gdzie* $m\colon I \to [0,+\infty)$ *jest funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a.*

(b) dla każdego $t \in I$, *funkcja* $s \mapsto k(t,s)$ *jest całkowalna w sensie Lebesgue'a na* I;

(c) $g \in BV$;

(d) $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest lokalnie ograniczoną funkcją Carathéodory'ego.*

Jeśli, dodatkowo, istnieje dodatnia liczba naturalna M_0 *spełniająca warunek*

$$\frac{M_0}{\|g\|_{BV} + \alpha(M_0)T_0} > 1,$$

gdzie $T_0 := \int_0^1 |k(0,s)|\mathrm{d}s + \int_0^1 m(s)\mathrm{d}s$, *to istnieje rozwiązanie problemu* (1) *należące do przestrzeni* BV *i spełniające* $\|x\|_{BV} < M_0$.

W przypadku przestrzeni funkcji o ograniczonym całkowym wahaniu pewne twierdzenia o istnieniu rozwiązań równań Hammersteina zostały udowodnione przy pomocy twierdzenia Banacha o punkcie stałym.

Twierdzenie 33 ([H4, Theorem 4]). *Załóżmy, że:*

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *spełnia warunek Lipschitza ze stałą* $L > 0$;

(b) jądro $k\colon I \times I \to \mathbb{R}$ *spełnia warunki (a)-(c) z Twierdzenia 28 lub (a)-(d) z Twierdzenia 29;*

(c) $g \in IBV_1^q$.

Wówczas istnieje taka $\delta > 0$, *że dla wszystkich* λ *spełniających* $|\lambda| < \delta$ *równanie*

$$x(t) = g(t) + \lambda \int_0^1 k(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s, \qquad t \in I, \tag{9}$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie w przestrzeni IBV_1^q.

Jak pokazaliśmy w [H4] Twierdzenie 33 może być zastosowane do pewnych zagadnień z pochodnymi Riemanna-Liouville'a rzędu ułamkowego

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) = f(x(t)), & t \in (0,1], \\ x^{(\alpha-1)}(0) = x_0, \end{cases} \tag{10}$$

gdzie $x^{(\alpha)}$ oznacza pochodną Riemanna-Liouville'a funkcji x rzędu $\alpha \in (0,1)$.

Wyniki, które uzyskaliśmy dla całkowych równań Hammersteina mogą znaleźć zastosowanie w szczególnej sytuacji, odpowiadającej funkcji Greena dla zagadnień brzegowych Sturma-Liouville'a.

$$\begin{cases} (p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = h(t) & \text{dla p.w. } t \in (0,1) \\ l_0(x(0), x'(0)) = 0 \\ l_1(x(1), x'(1)) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

gdzie l_0, l_1 odpowiadają warunkom brzegowym (szczegóły znaleźć można w pracy [H5]).

Oczywiście gdy rozpatrujemy klasyczne zagadnienia Sturma-Liouville'a z regularnymi warunkami brzegowymi pytanie o to czy rozwiązania są funkcjami o ograniczonym wahaniu w sensie Jordana jest bezzasadne. W tej, regularnej, sytuacji wszystkie rozwiązania są klasy C^1 na zwartym przedziale i jako takie mają – oczywiście – ograniczone wahanie. Jednak sytuacja może być inna gdy rozpatrywać będziemy osobliwe warunki brzegowe. W tej sytuacji udało się nam znaleźć charakteryzację (w języku rozwiązań fundamentalnych – czyli przy pomocy własności funkcji Greena) zagadnień, dla których występują rozwiązania o nieograniczonym wahaniu w sensie Jordana.

Twierdzenie 34 ([H5, Theorem 3.9]). *Załóżmy, że $G : (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R}$ jest funkcją Greena dla zagadnienia Sturma-Liouville'a* (11) *daną wzorem*

$$G(s,t) = \begin{cases} c^{-1}x_1(s)x_2(t) & 0 < s \leqslant t < 1 \\ c^{-1}x_1(t)x_2(s) & 0 < t \leqslant s < 1, \end{cases} \tag{12}$$

gdzie $x_1, x_2 \colon I \to \mathbb{R}$ są odpowiednimi rozwiązaniami fundamentalnymi (por. Twierdzenie 2.1 w pracy [H5]). Wówczas operator całkowy $K : L^2(I) \to L^2(I)$ dany wzorem

$$(Kx)(t) = \int_0^1 G(s,t)x(s)\mathrm{d}s$$

odwzorowuje przestrzeń BV w siebie wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są następujące warunki:

(a) $\exists\ \xi \in (0,1) \quad \operatorname{var}(x_2, [\xi, 1]) < +\infty$;

(b) $\exists\ \xi \in (0,1) \quad \operatorname{var}(x_1, [0, \xi]) < +\infty$;

(c) $\exists\ \xi \in (0,1) \quad \operatorname{var}(y_1, [\xi, 1]) < +\infty$, *gdzie* $y_1(t) = x_1(t)\int_t^1 x_2(s)\mathrm{d}s$;

(d) $\exists\ \xi \in (0,1) \quad \operatorname{var}(y_2, [0, \xi]) < +\infty$, *gdzie* $y_2(t) = x_2(t)\int_0^t x_1(s)\mathrm{d}s$;

(e) $\limsup_{\xi \to 0^+} \left|\int_0^\xi x_1(s)\mathrm{d}s\right| \cdot \operatorname{var}(x_2, [\xi, 1]) = M_0 < +\infty$;

(f) $\limsup_{\xi \to 1^-} \left|\int_\xi^1 x_2(s)\mathrm{d}s\right| \cdot \operatorname{var}(x_1, [0, \xi]) = M_1 < +\infty$.

4.6. Zwartość

Do niedawna o zwartości w przestrzeniach funkcji o wahaniu ograniczonym mogliśmy powiedzieć naprawdę niewiele. Można tu wspomnieć w zasadzie jedynie charakteryzację zwartości w przestrzeni BV podaną w części I znanej monografii Dunforda i Schwarza [24, Exercise IV.13.48]. Zgodnie z podanym tam ćwiczeniem (sic!) przestrzeń BV może być przedstawiona jako suma prosta podprzestrzeni NBV (złożonej z funkcji g, które są prawostronnie ciągłe i spełniają $g(0) = 0$)

oraz z podprzestrzeni złożonej ze wszystkich funkcji, które znikają poza zbiorami przeliczalnymi (izomorficznej z L^1). Na podstawie [24, Excercise IV.13.34] zbiór $K \subset NBV$ jest relatywnie zwarty wtedy i tylko wtedy gdy istnieje taka funkcja $g \in NBV$, że odwzorowanie

$$A_{\mu_g} \ni h \mapsto \int_I h(s)\mu_f(\mathrm{d}s)$$

jest jednostajnie ciągłe ze względu na $f \in K$. W powyższym zapisie μ_g jest miarą odpowiadającą funkcji $g \in NBV$ zaś A_{μ_g}jest zbiorem tych funkcji $x \in NBV$, dla których $|x(t)| \leqslant 1$ dla prawie wszystkich t ze względu na miarę μ_g. Powyższa charakteryzacja – raczej niezbyt czytelna – nie wydaje się również zbyt praktyczna.

Nieco inne obserwacje związane ze zwartością w przestrzeniach funkcji o ograniczonym p-wahaniu lub wahaniu w sensie Younga (szczególnie związane ze zwartymi włożeniami) podane zostały w pracy Ciemnoczołowskiego i Orlicza [20]. Warto również wspomnieć prace zajmujące się zwartością w przestrzeni CBV funkcji ciągłych o ograniczonym wahaniu: jedną z nich autorstwa Prusa-Wiśniowskiego [45] i drugą – wykorzystującą wielomiany Bernsteina – autorstwa Czudka [22].

W przypadku przestrzeni klasy C^k bardzo często odwołujemy się do twierdzeń o zwartym włożeniu inspirowanych Twierdzeniem Arzela-Ascoliego. Obserwacje te bezpośrednio prowadzą do dowodów pełnociągłości odpowiednich operatorów. Można zapytać się czy podobne podejście może zostać wykorzystane również w przypadku przestrzeni funkcji o ograniczonym wahaniu. Inspiracją do poszukiwania takich wyników jest wynik podany przez Ciemnoczołowkiego i Orlicza ([20, Paragraf 1.5]). Poniżej podamy kilka uogólnień podanego tam twierdzenia o włożeniu.

Załóżmy teraz, że funkcja $\omega\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ oznacza moduł ciągłości (por. Definicja 14 powyżej). Przez H^ω oznaczmy przestrzeń liniową złożoną z funkcji rzeczywistych określonych na przedziale I i spełniających następujące warunki:

$$|x(t) - x(s)| \leqslant k\omega(|t-s|) \text{ dla } t, s \in I, \text{ gdzie } k \geqslant 0.$$

Dla uproszczenia załóżmy dodatkowo, że $x(0) = 0$ dla wszystkich $x \in H^\omega$. Przestrzeń liniowa H^ω z normą

$$\|x\|_\omega = \inf\{k \geqslant 0 : |x(t) - x(s)| \leqslant k\omega(|t-s|) \text{ dla } t, s \in I\}$$

jest przestrzenią Banacha.

Przy pomocy symboli BV_ϕ^ω oraz ΛBV^ω oznaczmy przestrzenie Banacha $H^\omega \cap BV_\phi$ i $H^\omega \cap \Lambda BV$, z normami odpowiednio równymi $|x|_\phi = \max\{\|x\|_\omega, \|x\|_\phi\}$ oraz $|x|_\Lambda = \max\{\|x\|_\omega, \|x\|_\Lambda\}$.

Poniższy rezultat jest podobny do wyniku uzyskanego przez Ciemnoczołowskiego i Orlicza w pracy [20, Paragraf 1.5].

Stwierdzenie 35 ([H2, Proposition 5]). *Załóżmy, że $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $\Gamma = (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ są takimi ciągami Watermana, że $\Lambda < \Gamma$. Wówczas przestrzeń ΛBV^ω zanurza się w sposób zwarty w przestrzeni ΓBV.*

Pokazaliśmy również bezpośrednie uogólnienie wyniku Ciemnoczołowskiego i Orlicza:

Stwierdzenie 36 ([H2, Proposition 6]). *Załóżmy, że $\phi, \psi\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ są takimi wypukłymi ϕ-funkcjami, że*

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{\psi(s)}{\phi(\lambda s)} = 0 \qquad \textit{dla wszystkich } \lambda \in (0,1]. \tag{13}$$

Wówczas przestrzeń BV_ϕ^ω zanurzona jest w sposób zwarty w przestrzeni BV_ψ.

Wydaje się interesującym pytanie czy można, z grubsza mówiąc, odwrócić Stwierdzenie 35, czyli czy można udowodnić, że dla każdego zwartego podzbioru K przestrzeni ΛBV istnieje taki ciąg Watermana $\Gamma = (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, że $\Gamma < \Lambda$, $K \subset \Gamma BV$ i zbiór K jest ograniczony w normie $\|\cdot\|_{\Gamma BV}$. Poniżej pokażemy, że w ogólności odpowiedź jest negatywna, jednak dla szerokiej gamy ciągów Watermana odpowiedź ta jest pozytywna. Rozpocznijmy od dwóch definicji – przy czym dla danego ciągu Watermana Λ, symbolem $\Lambda_{(m)}$ oznaczmy ciąg Watermana powstały poprzez usunięcie początkowych $(m-1)$ wyrazów ciągu Λ.

Definicja 37 ([46]). *Mówimy, że funkcja $x \in \Lambda BV$ jest* ciągła w Λ-wahaniu, *jeśli*

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{var}_{\Lambda_{(m)}}(x) = 0.$$

Definicja 38 ([46]). *Jeżeli Λ jest ciągiem Watermana, to wartość:*

$$S_\Lambda = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{\lambda_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}}$$

jest nazywana indeksem Shao-Sablina ciągu Λ.

Zbiór wszystkich funkcji $x \in \Lambda BV$, które są ciągłe w Λ-wahaniu oznaczany będzie symbolem ΛBV_c, zaś jego podzbiór złożony ze wszystkich tych funkcji, które – dodatkowo – są ciągłe oznaczony będzie symbolem $C\Lambda BV_c$. Pojęcie ciągłości w Λ-wahaniu zostało wprowadzone przez Watermana w pracy [58]. Nieco później, w pracy [59], Waterman postawił hipotezę, że nie wszystkie funkcje o ograniczonym Λ-wahaniu są ciągłe w Λ-wahaniu. Przykład takiej funkcji został podany w pracy [25]. Problem ten został jednak rozwiązany ostatecznie przez Prusa-Wiśniowskiego w pracy [46]:

Twierdzenie 39 ([46]). *Dla dowolnego właściwego ciągu Watermana Λ, następujące zdania są równoważne:*

1. *przestrzeń $C\Lambda BV$ jest ośrodkowa;*
2. *$C\Lambda BV_c = C\Lambda BV$;*
3. *$\Lambda BV_c = \Lambda BV$;*
4. *$S_\Lambda < 2$.*

Co ciekawe, pojęcie ciągłości w Λ-wahaniu okazuje się być blisko związane ze zwartością w klasie przestrzeni ΛBV. W szczególności, mamy dość prostą obserwację, że jeśli $\Gamma < \Lambda$ oraz $x \in \Gamma BV$, to funkcja x jest ciągła w Λ-wahaniu. Udało się nam udowodnić następujące twierdzenie

Twierdzenie 40 ([H3, Theorem 18]). *Jeżeli $K \subset \Lambda BV$ jest zwarty oraz $K \subseteq \Lambda BV_c$, to istnieje taki ciąg Watermana $\Gamma < \Lambda$, że $K \subseteq \Gamma BV$ i K jest ograniczonym podzbiorem ΓBV.*

Jak wspomnieliśmy wyżej, w sytuacji gdy $S_\Lambda = 2$, istnieje ciągła funkcja $x_0 \in \Lambda BV$, która nie jest ciągła w Λ-wahaniu, a co za tym idzie istnieje zbiór zwarty (singleton złożony z tejże funkcji), który nie należy do żadnej z przestrzeni ΓBV dla $\Gamma < \Lambda$. Jednak dla przestrzeni, dla których $S_\Lambda < 2$ mamy następujący wniosek:

Wniosek 41 ([H3, Corollary 2]). *Jeżeli $S_\Lambda < 2$ oraz $K \subseteq \Lambda BV$ jest zbiorem zwartym, to istnieje ciąg Watermana $\Gamma < \Lambda$ taki, że $K \subseteq \Gamma BV$ oraz K jest ograniczonym podzbiorem ΓBV.*

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych.

Artykuły w czasopismach – przed uzyskaniem doktoratu

[D1] J. Gulgowski, *A global bifurcation theorem with applications to nonlinear Picard problems*, Nonlinear Anal. **41** (2000), no. 5-6, Ser. A: Theory Methods, 787–801.

[D2] J. Gulgowski, *Bifurcation of solutions of nonlinear Sturm-Liouville problems*, J. Inequal. Appl. **6** (2001), no. 5, 483—506.

Artykuły w czasopismach – po uzyskaniu doktoratu

[P01] J. Gulgowski, *An application of global bifurcation to the existence of nonnegative solutions of nonlinear Sturm-Liouville problem*, Advances in mathematics research, **2** (2003), 1–14, Adv. Math. Res., 2, Nova Sci. Publ., Hauppauge, NY.

[P02] S. Domachowski, J. Gulgowski, *A global bifurcation theorem for convex-valued differential inclusions*, Z. Anal. Anwendungen **23** (2004), no. 2, 275–292.

[P03] J. Gulgowski, *Applications of global bifurcation to existence theorems for Sturm-Liouville problems*, Ann. Polon. Math. **83** (2004), no. 3, 221–229.

[P04] J. Gulgowski, *Global bifurcation theorem for a class of boundary conditions for ordinary differential equations of second order*, Math. Nachr. **278** (2005), no. 4, 401–408.

[P05] J. Gulgowski, *Bernstein approximations of Dirichlet problems for elliptic operators on the plane*, Electron. J. Differential Equations 2007, No. 86, 1–14 (electronic).

[P06] J. Gulgowski, *Global bifurcation and multiplicity results for Sturm-Liouville problems*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **14** (2007), no. 5-6, 559–568.

[P07] J. Gulgowski, *Multiple global bifurcation branches for nonlinear Picard problems*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. (2009), No. 33.

[P08] J Gulgowski, *Bernstein approximations of nonlinear Sturm-Liouville problems*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, **72**, Issue 6 2010, 2982–2989.

[P09] J. J. Michalski, T. Kacmajor, J. Gulgowski and M. Mazur, *Consideration on artificial neural network architecture in application for microwave filter tuning*, Progress In Electromagnetics Research Symposium Proceedings, 1313–1317, Marrakesh, Morocco, Mar. 20-23, 2011.

[P10] J. Gulgowski, J. J. Michalski, T. Kacmajor, *Influence of number of frequency points on rational function's zeroes and poles reliability in microwave filter tuning*, Proceedings of XIX International Conference on Microwave, Radar and Wireless Communications MIKON-2012, Warsaw, Poland, May 21-23, 2012, Vol 1, 228–232.

[P11] T. Kacmajor, J. J. Michalski, J. Gulgowski, *Filter tuning and coupling matrix synthesis by optimization with cost function based on zeros, poles and Hausdorff distance*, IEEE International Microwave Symposium, 2012 Montreal.

[P12] J. Gulgowski, J. J. Michalski, *The analytic extraction of the complex-valued coupling matrix and its application in the microwave filter modeling*, PIER, **130** (2012), 131–151.

[P13] J. J. Michalski, J. Gulgowski, T. Kacmajor, *Coupling matrix synthesis by optimization with cost function based on Daubechies D4 wavelet transform*, Progress In Electromagnetics Research Symposium Proceedings, 1351–1354, Moscow, Russia, Aug. 19-23, 2012.

[P14] J. J. Michalski, J. Gulgowski, T. Kacmajor, M. Mazur, "Microwave and Millimeter Wave Circuits and Systems: Emerging Design, Technologies and Applications", Chapter: "Artificial Neural Network in Microwave Cavity Filter Tuning," Wiley 2012.

[P15] J. Gulgowski, *Approximation of solutions to second order nonlinear Picard problems with Carathéodory right-hand side*, Cent. Eur. J. Math. **12** (2014), no. 1, 155-–166.

[P16] J. Gulgowski, J.J. Michalski, *Topological attitude towards path following, applied to localization of complex dispersion characteristics for a lossy microwave, ferrite-coupled transmission line*, IMA Journal of Applied Mathematics, **80**, no. 2 (2015), 494–507, doi:10.1093/imamat/hxt055.

[P17] J. Gulgowski, *On the numerical detection of a bifurcation simplex in a curve*, Mathematica Applicanda (MS 20/59), **43**, No 1 (2015).

[P18] J. Gulgowski, S. Hille, T. Szarek and M. Ziemlańska, *Central limit theorem for some non-stationary Markov chains*, Studia Mathematica, **246** (2019) , 109–131, DOI: 10.4064/sm170325-8-9.

[P19] J. Gulgowski, T. P. Stefański, *Recurrence scheme for FDTD-compatible discrete Green's function derived based on properties of Gauss hypergeometric function*, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, **33**, issue 5 (2019), 637-653, DOI: 10.1080/09205071.2019.1568308.

Zawartość większości z powyższych prac można podzielić na kilka zasadniczych tematów.

5.1. Globalne twierdzenia bifurkacyjne

Załóżmy, że E jest przestrzenią Banacha z normą $\|\cdot\|$ zaś $A \subset \mathbb{R}^1$ jest otwartym przedziałem. Niech odwzorowanie $F : A \times E \to E$ będzie pełnociągłe oraz spełnia $F(\cdot, 0) = 0$ i niech $f : A \times E \to E$ dane będzie wzorem $f(\lambda, x) = x - F(\lambda, x)$.

Punkt $(\mu_0, 0) \in A \times E$ jest *punktem bifurkacji* odwzorowania f jeśli dla wszystkich otwartych zbiorów $U \subset A \times E$, dla których $(\mu_0, 0) \in U$, istnieje punkt $(\lambda, x) \in U$ taki, że $x \neq 0$ oraz $f(\lambda, x) = 0$. Zbiór wszystkich punktów bifurkacji odwzorowania f oznaczać będziemy przez $\mathcal{B}_f$.

W pracy [32] Krasnoselski podał warunki dostateczne na istnienie punktów bifurkacji odwzorowania $f : \mathbb{R} \times E \to E$ danego wzorem

$$f(\lambda, x) = x - \lambda T(x) - g(\lambda, x),$$

gdzie $T : E \to E$ jest pełnociaglym odwzorowaniem liniowym, g jest pełnociągłe oraz $g(\lambda, x) = o(\|x\|)$ jednostajnie ze względu na $\lambda \in \mathcal{K}$, gdzie $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem zwartym. Krasnoselski udowodnił, że jeśli μ_0^{-1} jest wartością własną operatora T nieparzystej krotności, to $(\mu_0, 0) \in \mathcal{B}_f$. Idea dowodu opierała się na wnioskach ze zmiany wartości stopnia Leray-Schaudera dla odwzorowań $f(\mu_0 - \varepsilon, \cdot)$ oraz $f(\mu_0 + \varepsilon, \cdot)$ na małych otoczeniach 0, dla małych wartości $\varepsilon > 0$.

Następnie, w pracy [48] Rabinowitz wyciągnął z obserwacji Krasnoselskiego wnioski natury globalnej. Przy tych samych założeniach o odwzorowaniu f udowodnił globalną alternatywę dla zbioru $\mathcal{R}_f \subset A \times E$, stanowiącego domknięcie (w $A \times E$) *zbioru zer nietrywialnych odwzorowania* f, tzn.

$$\mathcal{R}_f = \overline{\{(\lambda, x) \in A \times E : f(\lambda, x) = 0 \wedge x \neq 0\}}.$$

Rabinowitz udowodnił, że jeśli składowa spójności $C \subset \mathcal{R}_f$ zawiera punkt $(\mu_0, 0)$, dla którego μ_0^{-1} jest wartością własną T nieparzystej krotności, to C nie jest zbiorem zwartym lub zawiera parzystą liczbę takich właśnie odwrotności wartości własnych T nieparzystej krotności. Twierdzenie to jest jednym z najistotniejszych twierdzeń analizy nieliniowej i znane jest jako *twierdzenie bifurkacyjne Rabinowitza.*

Oryginalne twierdzenie Rabinowitza doczekało się licznych wariantów i uogólnień (chciałbym tu polecić przede wszystkim pozycje [19], [28] and [39]). Co więcej, wynik ten znalazł wiele różnych zastosowań – już w oryginalnej pracy Rabinowitza [48] to ogólne twierdzenie zostało zastosowane do zagadnień Sturma-Liouville'a postaci

$$\begin{cases} -(p(t)u'(t))' + q(t)u(t) = \varphi(t, u(t), u'(t), \lambda) & \text{dla } t \in (a, b) \\ l(u) = 0, \end{cases}$$

gdzie $l(u) = (u(a)\sin\alpha - u'(a)\cos\alpha, u(b)\sin\beta + u'(b)\cos\beta)$ oraz $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Rabinowitz rozpatrywał prawe strony φ różniczkowalne w 0, tzn. $\varphi(x) = mx + o(x)$ gdy $x \to 0$.

Idee Rabinowitza i jego następców były inspiracją moich pierwszych badań naukowych, prowadzących do rozprawy doktorskiej. Moim najważniejszym celem było, początkowo, badanie odwzorowań, które niekoniecznie są różniczkowalne w zerze – z asymptotyką w zerze daną jako $\varphi(x) = p(x) + o(x)$ gdy $x \to 0$, gdzie p jest niekoniecznie liniowe. Moje obserwacje o charakterze ogólnym znalazły swoje zastosowanie w badaniu zbiorów rozwiązań eliptycznych zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych. Badania te doprowadziły do powstania serii artykułów, które streszczę poniżej.

Skoncentrowałem się głównie na badaniu ogólniejszych zagadnień

$$\begin{cases} u''(t) + \mu u = \varphi(\lambda, t, u(t), u'(t)) & \text{dla p.w. } t \in (a, b) \\ l(u) = 0, \end{cases} \tag{14}$$

gdzie $u \colon [a, b] \to \mathbb{R}^k$, $\varphi(\lambda, t, x, y) = \lambda p(x) + o(|x| + |y|)$ i

$$l(u_1, ..., u_k) = (l_1(u_1), ..., l_k(u_k)),$$

oraz

$$l_j(u_j) = (u_j(a)\sin\alpha_j - u_j'(a)\cos\alpha_j, u_j(b)\sin\beta_j + u_j'(b)\cos\beta_j),$$

i $\alpha_j, \beta_j \in [0, \frac{\pi}{2}], \alpha_j^2 + \beta_j^2 > 0, (j = 1, ..., k)$.

- Uogólniłem globalne twierdzenie bifurkacyjne dla nieliniowych zagadnień spektralnych nieskończenie różniczkowalnych w zerze 0 (Twierdzenie 1.2 w [D1]) i zastosowałem je do nieliniowych zagadnień Picarda, w których nieliniowość nie jest różniczkowalna w zerze (Twierdzenie 1.3 w [D1]). Wyniki te zostały następnie uogólnione na układy równań różniczkowych (Twierdzenie 1 w [P03]) – również założenia na nieliniowość były dość ogólne: z asymptotyką w 0 i $+\infty$ daną przy pomocy dodatnio jednorodnej funkcji p. Podobne twierdzenia zostały udowodnione również dla pewnych szczególnych nieliniowości w otoczeniu 0 w Twierdzeniu 1 [P07]. W szczególnym przypadku rozpatrywanym w pracy [P07] można udowodnić również istnienie wielu gałęzi w zbiorze rozwiązań (Twierdzenie 2 we wspomnianej pracy). W bardziej abstrakcyjnej sytuacji, rozpatrywanej w pracy [P04] dopuszczalne były również nieliniowe warunki brzegowe $l\colon C^1([a,b],\mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ (spełniające pewne założenia obejmujące warunki brzegowe dla zagadnień Sturma-Liouville'a), zaś asymptotyka w zerze 0 dana była przy pomocy funkcji $p(x_1, x_2, ..., x_k) = (|x_1|, |x_2|, .., |x_k|)$ (Twierdzenie 2.1 w pracy [P04]).
- W pracy [D2] przedstawiłem pomysł na dowodzenie twierdzeń o istnieniu poprzez analizę globalnych gałęzi istniejących w zbiorze rozwiązań stowarzyszonego zagadnienia spektralnego. Podstawowa idea polegała na tym by pokazać, że w spójnym podzbiorze zbioru rozwiązań istnieją zarówno elementy, dla których parametr spektralny jest mniejszy jak i takie, dla których jest większy od 1 – pozwala to wywnioskować, że w rozpatrywanym podzbiorze musi istnieć punkt, dla którego parametr spektralny ma wartość 1. Pomysł sam w sobie trudno było nazwać nowym, był też raczej oczywisty, jednak zastosowany został w nietrywialny sposób, w sytuacji gdy prawa strona rozpatrywanych zagadnień spełniała jedynie pewne nierówności blisko zera i dla dużych argumentów, bez zakładania czegokolwiek o asymptotyce ([D2, Theorems 2-5]). Podstawowa idea dowodu polegała na zdefiniowaniu pewnego zaburzenia, na poziomie przestrzeni funkcyjnych, operatora superpozycji odpowiadającego funkcji φ po prawej stronie zagadnienia brzegowego. Zaburzony problem spełniał założenia odpowiedniego globalnego twierdzenia bifurkacyjnego – wówczas wystarczyło pokazać jedynie, że odpowiednia spójna gałąź zbioru rozwiązań zawiera punkt spełniający $\lambda = 1$, a element $(1, u)$ odpowiada funkcji u będącej rozwiązaniem wyjściowego zagadnienia. Pomysły te były kontynuowane w pracy [P03] dla układów równań różniczkowych – por. Twierdzenia 2, 3 oraz 4 w tej pracy. Podobne pomysły zostały zastosowane również w [P06, Theorems 1, 2, 3]
- Udowodniliśmy również globalne twierdzenie bifurkacyjne typu Rabinowitza dla pełnociągłych odwzorowań wielowartościowych o wartościach wypukłych ([P02, Theorem 1]). Wersja jednowartościowa twierdzenia podanego w [P02, Theorem 1] jest podobna do wyniku podanego w [33, Theorem 2.5]. Jednak Twierdzenie 1 z pracy [P02] jest nie tylko uogólnieniem tego wyniku na odwzorowania wypukłowartościowe, lecz również podaje nieco mocniejszy wynik (o istnieniu odpowiedniej składowej zbioru $\mathcal{R}_f$ zamiast składowej zbioru $\mathcal{R}_f \cup ([a,b] \times \{0\})$). Wspomniane globalne twierdzenie bifurkacyjne zostało następnie zastosowane do pewnej klasy inkluzji różniczkowych o wartościach wektorowych ([P02, Theorem 2]).

5.2. Aproksymacja rozwiązań nieliniowych zagadnień brzegowych przy pomocy wielomianów Bernsteina oraz Kantorowicza

Pomysł by przybliżać globalne gałęzie bifurkacyjne w zbiorze rozwiązań przy pomocy odpowiednich spójnych podzbiorów nietrywialnych zer zagadnień zaburzonych pojawiał się w przeszłości w wielu kontekstach (np. [3], [9], [49], [50]). Tematyka moich badań była jednak nieco inna: przy pomocy podobnych technik topologicznych badałem aproksymacje skończenie wymiarowe zagadnień nieskończenie wymiarowych – pokazując, że takie skończenie wymiarowe gałęzie zbioru rozwiązań przybliżają (w odpowiedni sposób) gałęzie zbioru rozwiązań w przestrzeni nieskończenie wymiarowej.

W pewnych sytuacjach klasyczne metody różnicowe nie mogą być wykorzystane – dotyczy to w szczególności problemów z prawą stroną Caratheodory'ego (kiedy szukamy słabych rozwiązań); co więcej metody różnicowe nie przystają zbyt dobrze do topologicznych metod analizy nieliniowej. Wybór odpowiedniego schematu aproksymacyjnego może zredukować te problemy – moje badania skoncentrowały się na wielomianach Bernsteina i Kantorowicza, głównie z powodu naturalnych własności operatorów $B_n : C(K) \to C(K)$ oraz $K_n : L^1(K) \to C(K)$ odpowiadających tym wielomianom ([23, 35]) dla funkcji zadanych na odpowiednim zbiorze zwartym K. Takie aproksymacje prowadzą do operatorów skończenie wymiarowych będących – jak się okazuje – homotopijnymi zaburzeniami operatorów odpowiadających odpowiednim zagadnieniom brzegowym.

Wspomniane zaburzenia indukowane odpowiednimi operatorami Bernsteina i Kantorowicza pozwalają udowodnić odpowiednie twierdzenia aproksymacyjne nie tylko dla poszczególnych rozwiązań zagadnień ale również dla całych gałęzi w zbiorze rozwiązań odpowiednich nieliniowych zagadnień spektralnych. Główne wyniki przedstawione są poniżej:

- Udowodniłem, że aproksymacje Bernsteina mogą być wykorzystane do przybliżania całych gałęzi zbioru rozwiązań nieliniowych, eliptycznych zagadnień brzegowych na płaszczyźnie (Twierdzenia 1.4 oraz 1.5 w pracy [P05]). Rozważane były dwa typy aproksymacji Bernsteina – oparte na wielomianach na trójkątach oraz na prostokątach. Ten sam schemat aproksymacyjny może być również wykorzystany do przybliżania poszczególnych rozwiązań – jak w twierdzeniu 3.1 z pracy [P05].
- W pracy [P08] aproksymacje Bernsteina zastosowałem to zagadnień Sturma-Liouville'a. Podejście to okazało się poprawnym dla całych gałęzi w zbiorze rozwiązań (nawet dla wielu gałęzi) – jak w Twierdzeniu 1 oraz Twierdzeniu 3 tej pracy. Podejście to może być zastosowane również do pokazywania istnienia rozwiązań odpowiednich zagadnień (dla ustalonego parametru spektralnego λ).
- Podobne podejście, gdy wielomiany Bernsteina zastąpimy wielomianami Kantorowicza funkcji całkowalnych, zostało również zastosowane do poszukiwania słabych rozwiązań zagadnień Picarda z prawą stroną Caratheodory'ego. Udowodniłem, że każde izolowane rozwiązanie zagadnienia z niezerową wartością lokalnego stopnia Leraya-Schaudera może być przybliżane rozwiązaniami odpowiednich, skończenie wymiarowych zagadnień indukowanych wielomianami Kantorowicza K_n (Twierdzenia 2.4 oraz 3.5 z pracy [P15]).

5.3. Metody optymalizacji w technikach mikrofalowych

Wspomniane tu badania zawarte są w serii prac powstałych we współpracy z firmą TeleMobile Electronics sp. z o.o (Gdynia, Poland) w projekcie "New optimization methods and their investigation for the application to physical microwave devices that require tuning" (grant MNiSW nr 736/N-COST/2010/0) w ramach COST Action RFCSET IC0803. W projekcie tym zajmowaliśmy się przede wszystkim mocno nieliniowym procesem strojenia filtrów mikrofalowych. Z punktu widzenia matematyki pracowaliśmy nad stworzeniem procedury optymalizacyjnej która – biorąc pod uwagę zmierzoną charakterystykę wyjściową urządzenia – proponowała właściwą pozycję specjalnych *śrub strojących*. Wprawdzie modele matematyczne filtrów mikrofalowych są dobrze znane i ugruntowane zarówno w teorii jak i praktyce – to jednak nie do końca rozumiemy wpływ pozycji śrub strojących na działanie urządzenia. W praktyce przemysłowej proces strojenia jest zwykle ręczny i heurystyczny – i bardzo odległy od automatyzacji czy nawet algorytmizacji. W ramach tego projektu zaproponowaliśmy różne rozwiązania teoretyczne, które zaowocowały budową prototypów, które zostały ciepło przyjęte przez społeczność pracującą nad technologiami mikrofalowymi.

Okazało się, że mocno nieliniowe zależności, które obserwowaliśmy mogą być dobrze modelowane przy pomocy Sztucznych Sieci Neuronowych (Artificial Neural Networks, ANN). Podejście takie nigdy wcześniej nie zostało (przy tym problemie) z powodzeniem wykorzystane. W pracach [P10, P12] zbadaliśmy samą zależność oraz różne podejścia do strojenia filtrów mikrofalowych przy pomocy ANN – wyniki przedstawione są w serii prac [P09-P11, P13]. Całość została podsumowana w rozdziale monografii [P14] poświęconej nowym technikom w dziedzinie technologii mikrofalowych. Warto wymienić tu kilka interesujących i nowatorskich pomysłów:

- został przeanalizowany wpływ pozycji śrub strojących na położenie zer i biegunów charakterystyki zespolonej filtra – co doprowadziło nas do nowatorskiego podejścia, w którym proces strojenia filtra odpowiadał procesowi stopniowego zbliżania zer i biegunów do pewnego z góry zadanego („idealnego") położenia – gdzie funkcja kosztu wyrażała się odległością Hausdorffa skończonych podzbiorów płaszczyzny zespolonej ([P11]);
- zaproponowaliśmy wykorzystanie dyskretnej transformaty falkowej ([P13]) jako pomysłu na "kompresję" sygnału na wejściu ANN – i udowodniliśmy, że jest to zarówno użyteczne jak i efektywne rozwiązanie. Warto zauważyć, że zmniejszenie wymiaru danych wejściowych skutkuje zwykle zmniejszeniem złożoności ANN i łatwiejszym procesem uczenia sieci;
- zaproponowaliśmy ([P12]) pewne uogólnienie klasycznego pojęcia macierzy sprzężeń (ang. *coupling matrix*) – wartości znajdujące się w tej macierzy mają dokładnie określoną interpretację fizyczną, która zakłada występowanie tam jedynie wartości rzeczywistych. Niestety dane zebrane podczas faktycznych pomiarów nie pasują do *żadnej* rzeczywistej macierzy o zakładanej strukturze (szczególnie gdy filtr nie jest nastrojony). Zaproponowaliśmy – i pokazaliśmy, że takie podejście może być użyteczne – by wykorzystać tu macierze o wartościach zespolonych i takie właśnie macierze wykorzystać w procesie optymalizacyjnym prowadzącym do nastrojenia filtra.

5.4. Algorytmy śledzenia krzywych

Wyniki uzyskane podczas badania aproksymacji globalnych gałęzi zbioru zer oraz problemy, na które natknąłem się podczas pracy nad zagadnieniami związanymi z technikami mikrofalowymi zaprowadziły nas do pewnych obserwacji, które mogły być zastosowane do numerycznych *algorytmów śledzenia krzywych*. Algorytmy tego typu związane są z metodami poszukiwania zer odwzorowania $f\colon \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^k$ klasy C^1. Dwie spośród metod tego typu wydają się najistotniejsze: piecewise-linear methods (PL-methods) oraz predictor-corrector methods (PC-methods) – po szczegóły odsyłamy do książki [1] oraz artykułu przeglądowego [2]. W pracy [P16] zaproponowaliśmy nowatorskie podejście do problemu śledzenia krzywych: ze znacznie zredukowaną ilością wykonywanych obliczeń – ograniczoną do wartości w wierzchołkach pewnych sympleksów. Co więcej nie musimy liczyć wartości funkcji lecz jedynie ustalić znak jej współrzędnych. Algorytm o nazwie *Follow Sign Changes* (FSC) opisany został w pracy [P16] (por. również [P17, Section 3]). Następnie algorytm ten został zmodyfikowany tak by wykrywał punkty bifurkacji na śledzonej krzywej ([P17]). Dowód poprawności zaproponowanych we wspomnianych pracach metod opierał się na czysto topologicznych narzędziach – pokazaliśmy, że zmiany znaków wykrywane przez algorytm śledzą odpowiedni niezmiennik topologiczny (stopień Brouwera obcięcia odwzorowania f do pewnej k-wymiarowej ściany sympleksu). Wyniki te podane są w Lematach 1, 2, 3 w pracy [P16] oraz w Twierdzeniu 3.3 w pracy [P17].

Co istotne, algorytm FSC został z powodzeniem zastosowany do problemu lokalizacji zespolonej charakterystyki dyspersyjnej pewnej stratnej, mikrofalowej linii transmisyjnej. Problem ten jest od strony praktycznej bardzo trudny gdyż wymaga on złożonych obliczeń do ewaluacji wartości funkcji f w każdym z punktów dziedziny. W związku z tym wszystkie ułatwienia w obliczeniach (np. przerwanie ich gdy jesteśmy pewni znaku liczby) oraz ograniczenie liczby punktów, w których funkcja jest obliczana były kluczem do znalezienia rozwiązania badanego problemu (rozdział 3 w pracy [P16]).

Literatura

[1] E. L. Allgower and K. Georg, *Introduction to Numerical Continuation Methods*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.

[2] E. L. Allgower and K. Georg, *Continuation and path following*, Acta Numerica **2** (1993), 1 - 64, DOI 10.1017/S0962492900002336.

[3] A.Ambrosetti and J.L. Gamez, *Branches of positive solutions for some semilinear Schrodinger equations*, Mathematische Zeitschrift **224** (1997), 347–362.

[4] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 2000.

[5] J. Appell et al., *Bounded Variation and Around*, De Gruyter Studies in Nonlinear Analysis and Applications, No. 17, De Gruyter, 2014.

[6] J. Appell, N. Guanda, N. Merentes, and J. L. Sanchez, *Boundedness and continuity properties of nonlinear composition operators: a survey*, Commun. Appl. Anal. **15** (2011), no. 2-4, 153–182.

[7] J. Appell, N. Merentes, and J. L. Sanchez, *Locally Lipschitz composition operators in spaces of functions of bounded variation*, Annali di Matematica Pura ed Aplicata **190** (2011), no. 1, 33–43.

[8] N. Aronszajn and P. Panitchpakdi, *Extension of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces*, Pacific J. Math. **6** (1956), 405–439.

[9] H. Berestycki, *On some nonlinear Sturm-Liouville problems*, Journal of Differential Equations **26** (1977), 375-390.

[10] A. Borucka-Cieślewicz, *On generalized q-integral variations*, Functiones et Approximatio **3** (1976), 23–35.

[11] A. Borucka-Cieślewicz, *Convergence in the space of functions of generalized q-integral M-variations*, Functiones et Approximatio **10** (1980), 111–114.

[12] F. Brauer, *Constant rate harvesting of populations governed by Volterra integral equations*, Jour. Math. Anal. Appl. **56** (1976), 18–27.

[13] D. Bugajewska, D. Bugajewski, P. Kasprzak, and P. Maćkowiak, *Nonautonomous superposition operators in the spaces of functions of bounded variation*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **48** (December 2016), no. 2, 637–660.

[14] D. Bugajewski, *On BV-solutions of some nonlinear integral equations*, Integral Equations Operator Theory **46** (2003), 387-398.

[15] Y. Brudnyi, *Nonlinear piecewise polynomial approximation and multivariate spaces of a Wiener–L. Young type. I.*, Journal of Approximation Theory **218** (2017), 9-41.

[16] Yu. A. Brudnyi, *Spaces that are definable by means of local approximations*, Tr. Mosk. Mat. Obs. **24** (1971), 69–132.

[17] A. Chambolle, V. Caselles, D. Cremers, M. Novaga, and T. Pock, *An introduction to total variation for image analysis*, Theoretical foundations and numerical methods for sparse recovery, Radon Ser. Comput. Appl. Math., vol. 9, Walter de Gruyter, Berlin, 2010, pp. 263–340.

[18] T. F. Chan and J. Shen, *Image Processing and Analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2005. Variational, PDE, wavelet, and stochastic methods.

[19] N-S. Chow and J.K. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer Verlag, 1982.

[20] J. Ciemnoczolowski and W. Orlicz, *Variation and compactness*, Comment. Math. **25** (1985), 201–214.

[21] A. Cohen, R. DeVore, P. Petrushev, and H. Xu, *Nonlinear approximation and the space $BV(R^2)$*, Amer. J. Math. **121** (1999), 587–628.

[22] K. Czudek, *Bernstein and Kantorovich polynomials diminish the Λ-variation*, J. Math. Anal. Appl. **452** (2017), no. 2, 912-925.

[23] R.A. DeVore and G.G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1993.

[24] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear Operators: General Theory*, Pure and Applied Mathematics, Interscience Publishers, 1958.

[25] R. Fleissner and J. Foran, *A note on Λ-bounded variation*, Real Anal. Exchange **4** (1978), 185-191.

[26] P. C. Hansen et al., *Deblurring Images*, Fundamentals of Algorithms, vol. 3, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2006. Matrices, spectra, and filtering.

[27] Y. K. Hu, K. A. Kopotun, and X. M. Yu, *On multivariate adaptive approximation*, Constructive Approximation **16(3)** (November 2000), 449–474, DOI 10.1007/s003659910019.

[28] J. Ize, *Topological Nonlinear Analysis: Degree, Singularity and Variations, Editors: M. Matzeu and A. Vignoli, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, Birkhauser, 1995.

[29] M. Josephy, *Composing functions of bounded variation*, Proc. Amer. Math. Soc. **83** (1981), no. 2, 354–356.

[30] P. Kasprzak and P. Maćkowiak, *Local boundedness of nonautonomous superposition operators in $BV[0;1]$*, Bulletin of the Australian Mathematical Society **92** (2015), 325–341.

[31] Y. Kim and L. A. Vese, *Image recovery using functions of bounded variation and Sobolev spaces of negative differentiability*, Inverse Probl. Imag. **3** (2009), no. 1, 43–68.

[32] M.A. Krasnoselskii, *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*, Pergamon Press, MacMillan, New York, 1964.

[33] V.K. Le and K. Schmitt, *Global Bifurcation in Variational Inequalities*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[34] J. J. Levin, *On a nonlinear Volterra equation*, J. Math. Anal. Appl. **39** (1972), 458–476.

[35] G. G. Lorentz, *Bernstein Polynomials*, Chelsea Publishing Compatny, New York, 1986.

[36] G. G. Lorentz and de Vore, *Constructive Approximation*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1993.

[37] P. Maćkowiak, *A counterexample to Ljamin's theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **142** (2014), 1773-1776.

[38] P. Maćkowiak, *On the continuity of superposition operators in the space of functions of bounded variation*, Aequationes Mathematicae (2017), 1–19.

[39] J. Mawhin, *Leray-Schauder degree: a half century of extensions and applications*, Topological Methods in Nonlinear Analysis **14** (1999), 195–228.

[40] N. Merentes, J. L. Sanchez, and S. Rivas, *Locally Lipschitz composition operators in the space Φ $BV[a,b]$*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications **75** (2012), no. 4, 1751–1757.

[41] A. P. Morse, *Convergence in variation and related topics*, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), no. 1, 48–83.

[42] J. Musielak and W. Orlicz, *On generalized variations I*, Studia Math. **18** (1959), 11-41.

[43] S. Perlman and D. Waterman, *Some remarks on functions of Λ-bounded variation*, Proc. Amer. Math. Soc. **74** (1979), no. 1, 113-118.

[44] S. Perlman, *Functions of generalized variation*, Fund. Math. **105** (1979/80), no. 3, 199–211.

[45] F. Prus-Wiśniowski, *λ-variation and Hausdorff distance*, Math. Nachr **158** (1992), 283-297.

[46] F. Prus-Wiśniowski, *Separability of the space of continuous functions that are continuous in Λ-variation*, J. Math. Anal. Appl. **344** (2008), no. 1, 274-291.

[47] F. Prus-Wiśniowski and W. H. Ruckle, *The Banach spaces ΛBV are non-reflexive*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **389** (2012), no. 2, 1394–1396.

[48] P. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, Journal of Functional Analysis **7** (1971), 487-513.

[49] B.P. Rynne, *Bifurcation from zero or infinity in Sturm-Liouville problems which are not linearizable*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **228** (1998), 141-156.

[50] K. Schmitt and H.L. Smith, *On eigenvalue problems for nondifferentiable mappings*, Journal of Differential Equations **33** (1979), 294-319.

[51] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi, *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*, Physica D **60** (1992), no. 1-4, 259–268.

[52] A. P. Terehin, *Functions of bounded q-integral p-variation and imbedding theorems*, Mathematics of the USSR-Sbornik **17** (1972), no. 2, 279-286.

[53] A. P. Terehin, *The multidimensional q-integral p-variation and generalized Sobolev L^p differentiability of L^q functions*, Siberian Mathematical Journal **13** (1972), no. 6, 952–965, DOI 10.1007/BF00971871.

[54] A. P. Terehin, *Mixed q-integral p-variation and mixed differentiability in L^p of functions from L^q (in Russian)*, Mat. Zametki **32** (1982), no. 2, 151–167.

[55] A. P. Terehin, *A mixed q-integral p-variation, and theorems of equivalence and imbedding of classes of functions with a mixed modulus of smoothness (in Russian)*, Trudy Mat. Inst. Steklov. **150** (1979), 306–319.

[56] D. Waterman, *On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation*, Studia Math. **44** (1972), 107–117.

[57] D. Waterman, *On Λ-bounded variation*, Studia Math. **57** (1976), 33–45.

[58] D. Waterman, *On the summability of Fourier series of functions of Λ-bounded variation*, Studia Math. **55** (1976), 97-109.

[59] D. Waterman, *Bounded variation and Fourier series*, Real Anal. Exchange **3** (1977), 61-85.

[60] A. Zygmund, *Trigonometric Series Vol. I, 3rd edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

Gdańsk, 7 marca 2019

Jacek Gulgowski